
电机内的电磁场
（第二版）
汤蕴璆 编著
科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

电机内的电磁场

（第二版）

汤蕴璆　编著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书是研究电机内电磁场问题的专著. 书中系统地介绍了恒定磁场和时变电磁场的基本方程及其解法，并用电机内的一系列典型问题和实际问题说明其应用. 书中收入了近40年来国外有关电机内电磁场问题的主要研究成果，特别是近10年来在电磁场数值计算方面的进展，同时也反映了作者近年来所取得的研究成果.

全书共10章，内容总体上分成：恒定磁场的基本理论和解析计算；恒定磁场的数值计算；时变电磁场的基本理论和解析计算；时变电磁场的数值计算；电磁力；同步电机内的电磁场问题等部分. 每章后面列有参考文献目录，书末附有恒定磁场和似恒电磁场解答的唯一性等4个附录.

本书可供高等工科院校电机系的研究生、教师和从事电机设计、研究的工程技术人员阅读、参考.

图书在版编目(CIP)数据

电机内的电磁场/汤蕴璆 编著. -2版. -北京：科学出版社，1998. 1
ISBN 7-03-005296-X

Ⅰ. 电… Ⅱ. 汤… Ⅲ. 电机—电磁场 Ⅳ. TM301.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第25665号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
北京科地亚印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1981年12月第一版 开本：787×1092 1/16
1998年1月 第二版 印张：29 1/2
1998年1月 第三次印刷 字数 683 000
印数：8 881—10 080
定价：58.00元

第二版序

自本书第一版问世以来，已整整经过 14 年．在此期间，电磁场的数值计算取得了巨大进展；特别是在 80 年代末期，国际上对三维涡流场的表述、规范和唯一性等问题，从理论到实际计算，均已得到较为圆满的解决．在工程上，电磁场的数值计算亦得到许多实际应用．随着我国经济的快速发展，毋庸置疑，数值计算的重要性将日益突出，工程应用将更为广泛．基于这一背景，有必要对本书第一版进行大幅度的调整、全面修改和充实，以便较好地反映近年来在此领域内的一系列新成果．

与第一版相比较，第二版的主要特点是：

1．对恒定磁场的解析解法方面的内容进行了大幅度的删减和调整，删去图解法一章；

2．数值法中增加加权余量法、二阶元和等参元等内容；

3．增加三维问题的分析和计算：在解析法方面，增加了实心转子感应电机内的三维涡流场、圆柱坐标内三维正弦涡流场的通解等内容；在数值法方面，增加了三维恒定磁场的数值解、三维涡流场和准三维行波磁场的数值解等内容；

4．增加正弦电磁场的数值解(第七章)和同步电机内的电磁场问题(第十章)两章，论述了感应电动机的起动，同步电机的稳态和瞬态参数，实心转子电机的异步运行，汽轮发电机的端部磁场等一系列重要的实际问题，并阐明其数值计算方法．

作者相信，全面修订、改写后的第二版的出版，对国内电机电磁场计算的发展，将会起到一定的推动作用；对提高大型电机的设计和研究水平，亦会产生积极的影响．

吴海容教授编写了本书的第 3-2 节和附录 B、C、附录 D 的 D-3、D-4 和 D-5 三节；刘汉炎副教授编写了第四章第 4-1 至 4-10 节和附录 D 的 D-1、D-2 二节；沈阳工业大学谢德馨教授编写了第七章的第 7-5、7-6、7-7 节的后半部分和第 7-8、7-9 节；汤蕴璆教授编写了其余章节，并对全稿进行了整理、统一和定稿．

本书由哈尔滨大电机研究所徐怡高级工程师主审．在本书交付出版前，他仔细审阅了全稿，改正了手稿中一些笔误和不妥之处，并对各章提出了许多宝贵意见．在此，作者谨向他表示衷心的感谢．

本书由中国科学院科学出版基金资助出版，也得到了哈尔滨市科学技术委员会优秀学术专著出版基金的资助．对此，作者深表谢意．

由于作者水平有限，书中可能还会有不少缺点和错误，欢迎读者指正．

作 者

1996 年 5 月

第一版序

为把我国建设成为现代化的社会主义强国，需要尽快地发展机械工业、电力工业、钢铁工业和轻工业．为了设计并研制出运行可靠、性能良好的新的巨型交流发电机组、大型轧钢电机和其他各种高质量的电机，迫切需要研究电磁场的基本理论，并采用新的计算手段——电子计算机来计算电机和电机工程中的一些重要的电磁场问题．但是，直到目前为止，国内还没有一本系统的、比较完整的研究和论述电机内电磁场问题的著作．本书的编写，就是为了部分地满足这方面的需要．

本书初稿曾在1972年为哈尔滨大电机研究所举办的“电机内的电磁场”讲座中使用过．由于近年来国内外在电磁场计算方面有许多新的进展，这次出版时，对初稿的内容进行了全面的调整和充实；例如，重写了恒定磁场的数值解法一章(第七章)，增加了汽轮发电机的端部磁场一章(第十二章)等．就编写方法而言，本书一方面考虑到电磁场理论本身的体系，另一方面又注意到解决工程实际问题时所用的方法；既注意到电磁场的近代数值解法，亦注意到电机中某些经典问题的解析解法．

本书的第七章和附录四、附录五由哈尔滨大电机研究所计算机组刘汉炎编写，第十二章由李哲生编写，第五章第二节和附录一、二、三由吴海容编写，汤蕴璆编写了其余各章并校阅了全稿．整个工作得到哈尔滨电工学院教材科和哈尔滨大电机研究所的热情支持．

考虑到本书主要是供从事电机设计和研究方面的科技人员、高等工科院校电机系的教师和研究生阅读，所以编写本书时，认为读者已经熟悉“电工基础”、“微分方程”和“向量分析”等方面的基本内容．至于书中涉及的某些比较专门的内容，例如“椭圆函数”、“矩阵”和“恒定磁场数值计算的典型程序”等，则放在附录部分备查．

由于作者水平有限，书中可能会有不少缺点、错误，欢迎读者指正．

作 者

1979年7月

目　录

第二版序
第一版序
绪论 …… 1
第一章　恒定磁场的基本理论 …… 3
1-1　恒定磁场的基本方程 …… 3
1-2　标量磁位和向量磁位 …… 5
1-3　恒定磁场的边界条件 …… 9
1-4　恒定磁场的唯一性 …… 12
1-5　磁场能量和直流电感 …… 13
1-6　小结 …… 14
第二章　恒定磁场的解析解法 …… 16
2-1　无界空间中的恒定磁场 …… 16
2-2　镜像法 …… 24
2-3　边界面为铁磁平面时线电流的镜像 …… 24
2-4　边界面为铁磁圆柱面时线电流的镜像 …… 34
2-5　具有铁磁边界时拉普拉斯方程的直接求解 …… 36
2-6　主极磁场正弦分布时同步发电机的极靴外形 …… 39
2-7　正弦电枢磁动势在均匀气隙内产生的磁场 …… 40
2-8　气隙磁场正弦分布时电枢铁心内的空载磁场 …… 42
2-9　线电流的影响 …… 45
2-10　载流导体在电机气隙中产生的磁场 …… 47
2-11　具有铁磁边界时泊松方程的解法 …… 52
2-12　半闭口圆形槽内载流导体所生的磁场 …… 53
2-13　变压器原、副绕组的漏磁场和漏电感 …… 56
2-14　用双重傅氏级数法解泊松方程 …… 60
2-15　小结 …… 64
第三章　二维恒定无旋磁场的特殊解法——保角变换法 …… 67
3-1　共轭函数和保角变换 …… 67
3-2　许瓦兹-克利斯多菲尔变换 …… 71
3-3　主极磁场的边缘效应 …… 75
3-4　凸极电机主极的极间漏磁 …… 78
3-5　电枢开槽时的气隙磁场和卡氏因数 …… 80
3-6　电枢开有一系列齿、槽时的气隙磁场 …… 85
3-7　电枢槽深为有限时气隙磁场的分布 …… 91
3-8　转子偏心时的气隙磁场 …… 92
3-9　小结 …… 96
第四章　恒定磁场的数值解法 …… 98

4-1 有限差分法 …… 98
4-2 二维拉普拉斯方程和泊松方程的差分离散 …… 101
4-3 电枢开槽时气隙磁场的数值计算 …… 106
4-4 槽内载流导体所生磁场的数值计算 …… 109
4-5 准泊松方程的差分离散 …… 110
4-6 负载时直流电机内的非线性磁场 …… 115
4-7 有限单元法 …… 122
4-8 二维泊松方程的变分表述 …… 129
4-9 用有限元法解泊松方程的混合边值问题 …… 133
4-10 用有限元法计算槽内载流导体所产生的磁场 …… 144
4-11 二维准泊松方程混合边值问题的有限元解法 …… 145
4-12 周期性边界条件的处理 …… 149
4-13 凸极同步电机空载磁场的有限元计算 …… 151
4-14 使用二阶元时准泊松方程的有限元解法 …… 155
4-15 加权余量法 …… 162
4-16 三维恒定无旋磁场的有限元解法 …… 164
4-17 三维恒定旋度磁场的有限元解法 …… 173
4-18 小结 …… 182
第五章 时变电磁场的基本理论 …… 186
5-1 静止介质中的麦克斯韦方程 …… 186
5-2 涡流方程和波动方程 …… 188
5-3 时变电磁场中的电磁位 …… 190
5-4 时变电磁场的边界条件 …… 194
5-5 似恒电磁场解答的唯一性 …… 197
5-6 电磁场的能量及其转化 …… 198
5-7 小结 …… 201
第六章 正弦电磁场的解析解法 …… 203
6-1 半无限大导体内的正弦电磁场 …… 203
6-2 双层半无限大导体内的正弦电磁场 …… 206
6-3 薄长金属片中的正弦电磁场 …… 207
6-4 矩形开口槽内导体的电流集肤效应 …… 212
6-5 槽内空心导体中的电流集肤效应 …… 217
6-6 矩形-梯形组合槽内导体的电流集肤效应 …… 220
6-7 叠片铁心的片间涡流 …… 223
6-8 处于二维正弦磁场中矩形导体内的涡流 …… 227
6-9 圆形半闭口槽内导体的电流集肤效应 …… 232
6-10 用叠加法计算涡流损耗 …… 234
6-11 行波磁场作用在导电平板上时平板内的涡流 …… 237
6-12 计及涡流反应时正弦行波电流片的镜像 …… 241
6-13 实心转子感应电动机中的行波涡流场 …… 244
6-14 圆柱坐标系中三维复涡流方程和复拉普拉斯方程的解答 …… 255
6-15 磁饱和的影响 …… 258
6-16 小结 …… 263

第七章　正弦电磁场的数值解法 …… 265
7-1　二维线性正弦涡流场的有限元分析 …… 265
7-2　凸形槽内导体的电流集肤效应 …… 270
7-3　二维非线性正弦涡流场的有限元分析 …… 273
7-4　笼型感应电动机起动性能的有限元计算 …… 275
7-5　三维正弦涡流场的 A，φ 和 T，Ω 表述 …… 280
7-6　A，φ-A 法的有限元离散 …… 287
7-7　采用三棱柱或六面体单元时 A，φ-A 法中各元素的计算公式 …… 295
7-8　T，Ω-Ω 法的有限元离散 …… 306
7-9　三维正弦涡流问题中边界条件的确定 …… 308
7-10　准三维行波电磁场的 A，φ 表述 …… 311
7-11　准三维行波电磁场问题的有限元离散 …… 315
7-12　小结 …… 324
第八章　电磁场的瞬态 …… 327
8-1　薄长钢片中恒定磁场的建立和衰减 …… 327
8-2　具有矩形截面的实心铁心中恒定磁场的建立和衰减 …… 330
8-3　圆柱铁心内磁场的建立和衰减 …… 333
8-4　电磁场瞬态的数值计算 …… 335
第九章　电磁力和电磁转矩 …… 341
9-1　载流导体和铁磁物质在磁场中受到的电磁力 …… 341
9-2　槽内载流导体所受到的径向电磁力 …… 342
9-3　旋转电机定、转子线圈间的切向电磁力 …… 345
9-4　电枢齿壁上所受到的切向电磁力 …… 346
9-5　磁场的张力张量 …… 348
9-6　载流导体置于槽内时作用在电枢上的切向电磁力 …… 352
9-7　用虚位移法求机-电系统中的电磁力 …… 358
9-8　交流电机的电磁转矩 …… 360
9-9　电磁力和电磁转矩的数值计算 …… 363
9-10　小结 …… 367
第十章　同步电机内的电磁场问题 …… 369
10-1　同步发电机额定励磁电流的数值计算 …… 369
10-2　饱和同步电抗的数值计算 …… 373
10-3　瞬态电抗的数值计算 …… 376
10-4　异步运行时汽轮发电机的运算电抗及其频率特性 …… 385
10-5　汽轮发电机的端区磁场 …… 390
10-6　汽轮发电机定、转子绕组端部电流密度的分布 …… 393
10-7　汽轮发电机端区磁场的有限元计算 …… 402
附录 A　恒定磁场和似恒电磁场解答的唯一性 …… 412
附录 B　椭圆积分和雅可比椭圆函数 …… 421
附录 C　恒定磁场问题的有限元自适应网格加密 …… 430
附录 D　线性代数方程组的数值解法 …… 443

绪　论

电机是一种电磁-机械能量转换装置. 为了产生能量转换，电机内必须要有磁场(或电场)作为耦合场. 当转子旋转时，耦合场受到扰动，磁场及其贮能发生变化，电枢绕组内就会产生感应电势，转子上则将受到电磁力的作用；于是机械能就转换为电能或反之. 因此，要研究旋转电机内能量转换的机制，必须对电机内的磁场分布(尤其是气隙磁场和槽内磁场的分布)有清楚的了解.

如所周知，电机的运行性能取决于电机的参数和损耗. 为了准确地进行电机的磁路、参数、损耗和电磁力等计算，亦必须知道气隙、铁心、槽内、绕组端部以及某些结构部件附近的电磁场分布. 因此研究电机内的电磁场，对设计一台性能良好的电机具有重要的意义；对于大型同步发电机(汽轮发电机和水轮发电机)尤其是这样.

此外，有些问题根本不能用路的概念而必须用电磁场的理论来研究和解决；例如具有实心转子的感应和同步电机，直线电机和超导电机的电磁性能，开槽以后电磁转矩的分布等等. 对于这类问题，电磁场理论的重要性是不言而喻的.

但是由于实际电机的边界形状比较复杂，加上铁心饱和的影响，利用解析法来求解电机内的电磁场问题常常碰到一系列的困难. 所以，多年来电磁场理论在电机中的应用受到一定的限制；所解决的问题大多是局部的，经过简化的. 近年来由于计算技术的发展，情况发生了很大的变化. 对于特定的电机，根据边界形状和部件所用材料，我们可以把定子、转子、气隙等不同区域分成许多网格，然后把电磁场方程离散化，再用电子计算机逐次渐近地算出各点的磁场值. 这样，我们就可以较准确地算出考虑磁饱和、介质的各向异性性质、定转子开槽、绕组端部电密的复杂分布等一系列因素时，电机横断面或者电机部分区域内磁场的二维或三维分布.

旋转电机内的电磁场，从作用上看，大体上可分成以下几类：

(1) 气隙磁场；

(2) 铁心内的磁场；

(3) 绕组端部磁场；

(4) 槽内漏磁场和凸极电机主极的极间漏磁场；

(5) 实心转子中的电磁场.

其中(1)和(2)为主磁场；(3)和(4)是漏磁场.

按照是否随时间而变化，电机内的电磁场可分为：

(1) 恒定磁场；

(2) 时变电磁场.

同步电机的主极磁场、极间漏磁场等属于恒定磁场. 交流电机定子槽内导体的涡流损耗、实心转子感应电机内的电磁场问题等均属于时变电磁场问题. 由于电机中时变电磁场的变化频率很低，电机的线性尺寸比电磁波的波长要小得多，因此位移电流可以忽略不计；在电磁场理论中，这种场称为似恒电磁场. 对于似恒电磁场，在导电介质中，麦

克斯韦方程简化为涡流方程．研究实心转子或导体中的涡流时，都是从涡流方程出发来求解．对于非导电媒介质，或者可以忽略导体中的涡流和集肤效应的情况，麦克斯韦方程进一步简化为拉普拉斯方程或泊松方程，即所研究的问题实质上可以作为恒定磁场问题来处理，例如气隙磁场，电枢槽内的漏磁场，变压器原、副绕组间的漏磁场等．

本书先研究电机内的恒定磁场问题，然后研究时变电磁场问题，最后专设一章集中研究大型同步电机中的电磁场问题．研究时着重注意分析和解决问题的方法，同时注意到联系实际．由于电机内的磁场问题(例如气隙磁场、槽内磁场等)大多可以简化成二维的情况，所以在整个分析中，我们将以二维问题为主．对于某些需要作为三维问题来处理的，例如实心转子感应电动机、汽轮发电机的端部磁场等问题，我们将引入三维分析．

由于数值法的巨大威力，以及在科学研究工作和实际工程问题中的日益广泛应用，本书以相当大的篇幅来阐明数值法(特别是有限元法)的基本思想和实施；并以直流电机、感应电机和同步电机中一系列大家关心的实际问题为例，说明数值法的应用．为了反映80年代末三维涡流场计算方面的巨大进展，同时考虑到三维计算的发展前景，在第四章和第七章中分别列入了三维恒定磁场、三维涡流场和准三维行波电磁场的数值计算等内容，使读者对三维问题的数值解法有一个基本的了解．由于篇幅的限制，对积分方程法、边界元法等其他数值方法，本书没有列入．

第一章　恒定磁场的基本理论

电机中的电磁场问题，很多可以作为恒定磁场问题来研究．本章首先说明恒定磁场的基本定律及其积分和微分形式，然后引入标量磁位和向量磁位，并导出其所满足的微分方程，最后对恒定磁场的唯一性作一简介．

1-1　恒定磁场的基本方程[1—6]

不随时间变化的电流称为恒定电流，在恒定电流周围将形成恒定磁场．恒定磁场的分布可用磁感强度 **B** 来描述．实验证明，在恒定磁场中，磁场强度 **H** 和磁感强度 **B** 分别遵守安培环路定律和磁通连续性定律．下面对这两条定律作一简要说明．

（一）安培环路定律

在恒定磁场内，磁场强度沿任意闭合曲线 C 的线积分值，恰好等于通过以 C 为边缘的曲面 S 的电流值，这个规律就称为安培环路定律．用数学形式表示时，

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \tag{1-1}$$

式中 **J** 为通过微分面积 $d\mathbf{S}$ 处的电流密度向量，积分 $\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$ 表示通过曲面 S 的电流；回线 C 的循行方向与面积 S 的法线方向之间符合右手螺旋关系．式(1-1)是安培环路定律的积分形式．

研究磁场问题时，常需知道磁场中任意一点的 **H** 值，因此应设法找出与式(1-1)相应的微分形式．

利用向量分析中的斯托克斯定理，可得

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathrm{rot}\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$$

于是

$$\int_S (\mathrm{rot}\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

由于上式对任意闭合曲线 C 以及把 C 作为边界的任意曲面 S 都成立，所以等式左、右积分号内的被积函数应当相等，即

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{1-2}$$

此式就是安培环路定律的微分形式．式(1-2)说明，磁场强度的旋度就等于该点的电流密度．

研究电机磁场问题时，常用的坐标系为直角坐标系和圆柱坐标系．在直角坐标系中，rot**H** 的表达式为

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \tag{1-3}$$

在圆柱坐标系中：

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_r\dfrac{1}{r} & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_z\dfrac{1}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_r & rH_\theta & H_z\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{a}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)+\mathbf{a}_\theta\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)+\mathbf{a}_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right] \tag{1-4}$$

（二）磁通连续性定律

分析和实验表明，对空间任意区域，出、入闭合曲面 S 的磁通量恒相等；即磁感强度 $\mathbf{B}$ 对闭合曲面 S 的面积分恒等于零，

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0 \tag{1-5}$$

这一规律就称为磁通连续性定律，式(1-5)为其积分形式. 式(1-5)说明，磁通线是处处连续的，无头无尾的.

从式(1-5)出发，利用向量分析中的高斯定理，不难证明

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=0 \tag{1-6}$$

这就是磁通连续性定律的微分形式. 式(1-6)说明，磁感强度的散度恒等于零，即 $\mathbf{B}$ 是一个无源场.

在直角坐标系中，$\mathrm{div}\mathbf{B}$ 的表达式为

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{1-7}$$

在圆柱坐标系中

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{1-8}$$

以上这两条定律均未涉及介质的磁性质，即无论对什么介质，它们都成立. 至于场向量 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 之间的关系，则将取决于介质的磁性质.

（三）介质的宏观磁性质

介质的电磁性质是很复杂的，但是一般来讲，介质内每点的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间常可用该点的磁导率 μ 将其联系起来，即

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \tag{1-9}$$

式(1-9)就称为介质的成分方程. 对于各向同性的磁介质，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 为同一方向，此时 μ 为一标量；若介质为线性，则 μ 为常值；若介质为非线性，则 μ 将是磁感强度的函数. 对

于非各向同性的介质，μ 将是一个张量.

在电机中，常见的介质有两种，一是空气，一是铁心. 空气的磁导率 μ_0 为一常值，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$H/m. 铁心则是一种非线性磁介质，且严格来讲 B 与 H 之间不是单值关系. 但在工程分析中，一般把铁心的平均磁化曲线作为其 $B\sim H$ 关系，即认为 B、H 之间为单值关系；且在多数情况下近似认为 $\mu_{Fe}=$常值.

（四）恒定磁场的基本方程

综上所述，可得恒定磁场的基本方程为：

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J},\quad \mathrm{div}\mathbf{B}=0,\quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \tag{1-10}$$

从亥姆霍兹定理可知，对于无界空间中的一个向量场，若其旋度和散度在整个空间中的值已经给定，则该向量场就是完全确定的. 从式(1-10)可见，若空间的电流密度分布给定，则 **H** 的旋度就是确定的；另外 **B** 的散度恒等于零；而 **B** 与 **H** 又通过成分方程联系起来. 因此，式(1-10)是恒定磁场的一个完整方程组，它将导致一个 **B**(或 **H**)的偏微分方程，并使场向量得以确定.

1-2 标量磁位和向量磁位[1—5]

按照磁场强度的旋度是否等于零，恒定磁场分成无旋场和旋度场两种. 从式(1-10)可知，在电流密度 $\mathbf{J}=0$ 处(载流区之外)，$\mathrm{rot}\mathbf{H}=0$，该处的磁场就是无旋场；在 $\mathbf{J}\neq0$ 处(载流区内部)，$\mathrm{rot}\mathbf{H}\neq0$，该处的磁场为旋度场.

（一）无旋磁场和标量磁位

由向量分析可知，旋度为零的向量场总可以表示为一标量的梯度场. 在无旋磁场中，由于磁场强度的旋度为零，所以磁场强度可表示为一标量 Ω 的梯度，即

$$\mathbf{H}=-\mathrm{grad}\Omega \tag{1-11}$$

Ω 称为标量磁位.

在直角坐标系中，$\mathrm{grad}\Omega$ 的表达式为：

$$\mathrm{grad}\Omega=\mathbf{i}\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\Omega}{\partial z} \tag{1-12}$$

所以

$$H_x=-\frac{\partial\Omega}{\partial x},\quad H_y=-\frac{\partial\Omega}{\partial y},\quad H_z=-\frac{\partial\Omega}{\partial z} \tag{1-13}$$

在圆柱坐标系中，

$$\mathrm{grad}\Omega=\mathbf{a}_r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\mathbf{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}+\mathbf{a}_z\frac{\partial\Omega}{\partial z} \tag{1-14}$$

所以

$$H_r=-\frac{\partial\Omega}{\partial r},\quad H_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta},\quad H_z=-\frac{\partial\Omega}{\partial z} \tag{1-15}$$

下面可以见到，引入标量磁位 Ω 后，仅需求解 Ω 所满足的标量偏微分方程即可确定场的分布，而无需直接求解 **H** 的向量偏微分方程，从而使场的求解得到简化.

标量磁位 Ω=常值 的曲面（曲线）就称为标量等磁位面（线）. 可以证明，标量等磁位面（线）和磁力线互成正交（图 1-1）. 另外，若空间存在载流导体，则任意两点 A 和 B 之间的标量磁位差可为多值. 例如在图 1-2 中，若从 A 点出发，环绕电流 i 后到达 B 点，则 A、B 两点的磁位差 Ω_{AB}应为

$$\Omega_{AB}=\int_A^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=ki+\int_{AmB}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=ki+\Omega_{AmB} \tag{1-16}$$

式中 Ω_{AmB}为从 A 点经 m 到达 B 点（即不环绕电流 i）时 A、B 两点的磁位差；k 为环绕 i 的次数.

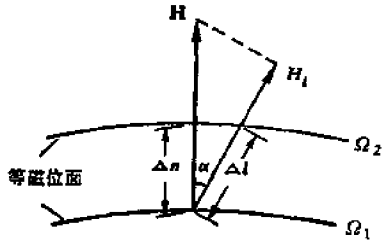


图 1-1　磁力线与标量等磁位面

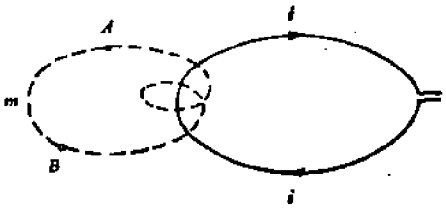


图 1-2　标量磁位的多值性

对于各向同性介质，把式(1-11)和(1-9)代入式(1-6)，可得

$$\mathrm{div}(\mu\,\mathrm{grad}\Omega)=0 \tag{1-17}$$

这就是标量磁位所满足的微分方程.

对于线性均匀介质，μ=常值，于是

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\Omega)=\nabla^2\Omega=0 \tag{1-18}$$

即标量磁位 Ω 满足拉普拉斯方程. 在直角坐标系中，拉普拉斯方程为

$$\nabla^2\Omega=\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=0 \tag{1-19}$$

在圆柱坐标系中，

$$\nabla^2\Omega=\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=0 \tag{1-20}$$

对非线性介质，$\mu\neq$常值，此时在直角坐标系中式(1-17)的展开式将为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)=0 \tag{1-21}$$

在圆柱坐标系中则有

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\left(\mu\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)=0 \tag{1-22}$$

即 Ω 满足准拉普拉斯方程.

无旋磁场除了可用标量磁位 Ω 来表征和计算之外，还可用向量磁位 **A** 来分析、计算. 下面可以看到，在无旋场内，**A** 满足向量拉普拉斯方程.

（二）旋度场和向量磁位

在旋度场中 $\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}\neq0$，**H** 不能用一个梯度场来表示，因而不存在标量磁位的概念.

但是由向量分析可知：一个散度为零的向量场总可以表示为另一向量的旋度场．由于磁感强度的散度恒等于零，故为便于计算，在旋度磁场中可以引入一个向量磁位 **A**，使

$$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A} \tag{1-23}$$

根据亥姆霍兹定理，为使 **A** 成为唯一，还应确定 **A** 的散度．对于恒定磁场，为便于解出 **A**，通常规定

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=0 \tag{1-24}$$

此规定称为库仑规范．由此即可导出 **A** 所满足的微分方程．

把 $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ 代入 $\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}$，可得

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{A}\right)=\mathbf{J} \tag{1-25}$$

对于线性介质，μ=常值，上式可简化为

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A}=\mu\mathbf{J} \tag{1-26}$$

式(1-26)通常称为 **A** 的旋度旋度方程．再考虑到

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A}=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{A}-\text{✡}\mathbf{A}$$

而 divA 已规定为 0，于是最后可得

$$\text{✡}\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} \tag{1-27}$$

式中✡是作用于向量 **A** 的向量拉普拉斯算符①．式(1-27)就是介质为线性时 **A** 所满足的微分方程，此式为一向量方程，称为向量泊松方程．

对于直角坐标系，✡**A** 恰好等于标量拉普拉斯算符∇^2分别作用于 A_x、A_y、A_z 后所组成的向量，即

$$\text{✡}\mathbf{A}=\mathbf{i}\nabla^2A_x+\mathbf{j}\nabla^2A_y+\mathbf{k}\nabla^2A_z \tag{1-28}$$

此时向量泊松方程(1-27)可以分解成三个标量方程，即

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2A_x&=\frac{\partial^2A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_x}{\partial z^2}=-\mu J_x\\ \nabla^2A_y&=\frac{\partial^2A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_y}{\partial z^2}=-\mu J_y\\ \nabla^2A_z&=\frac{\partial^2A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}=-\mu J_z\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

式(1-29)说明：在旋度磁场中，向量磁位及其在直角坐标系内的三个分量都满足泊松方程．在无旋场中，$\mathbf{J}=0$，向量磁位满足拉普拉斯方程．

由泊松方程解出向量磁位后，由 $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ 即可求出磁感强度 **B**

$$\left.\begin{aligned}&B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\quad B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\quad B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\\ &\mathbf{B}=\mathbf{i}B_x+\mathbf{j}B_y+\mathbf{k}B_z\end{aligned}\right\} \tag{1-30}$$

对于圆柱坐标系，根据向量拉普拉斯算符的定义，经过运算可知，**A** 的三个分量 A_r、A_θ 和 A_z 应满足下列方程：

① 向量拉普拉斯算符的定义为：
✡**A**=grad（div**A**）−rot rot**A**.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}A_r+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}=-\mu J_r\\
&\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r^2}A_\theta+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}=-\mu J_\theta\\
&\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}=-\mu J_z
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}31)$$

或

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 A_r-\frac{1}{r^2}A_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}=-\mu J_r\\
&\nabla^2 A_\theta-\frac{1}{r^2}A_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}=-\mu J_\theta\\
&\nabla^2 A_z=-\mu J_z
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}32)$$

而

$$\left.\begin{aligned}
&B_r=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z},\quad B_\theta=\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r},\quad B_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\\
&\mathbf{B}=\mathbf{a}_r B_r+\mathbf{a}_\theta B_\theta+\mathbf{a}_z B_z
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}33)$$

式(1-32)说明，在圆柱坐标系中，A_z 单独满足标量泊松方程，A_r 和 A_θ 则组成联立偏微分方程组.

电机内许多磁场问题可以作为二维平行平面场来处理. 对于二维平行平面磁场，若电流密度为 z 方向，$\mathbf{J}=\mathbf{k}J_z$，$J_x=J_y=0$，则向量磁位亦为 z 方向，$\mathbf{A}=\mathbf{k}A_z$，$A_x=A_y=0$，且磁场和磁位沿 z 方向的变化率为零，因此仅需求解 A_z 的二维泊松方程即可. 对于直角坐标系，

$$\nabla^2 A_z=\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}=-\mu J_z\qquad(1\text{-}34)$$

而

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y},\quad B_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x}\qquad(1\text{-}35)$$

此时求解向量场 $\mathbf{B}$ 的问题，转化为一个求解 A_z 的二维标量泊松方程问题，使求解显著简化.

对于极坐标系，若 $\mathbf{J}=\mathbf{a}_z J_z$，$J_r=J_\theta=0$，则 $\mathbf{A}=\mathbf{a}_z A_z$，$A_r=A_\theta=0$，此时有

$$\nabla^2 A_z=\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2}=-\mu J_z\qquad(1\text{-}36)$$

而

$$B_r=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta},\quad B_\theta=-\frac{\partial A_z}{\partial r}\qquad(1\text{-}37)$$

向量磁位求出后，通过某一面积 S 的磁通量 Φ 即可求出：

$$\begin{aligned}
\Phi&=\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\int_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}\\
&=\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\oint_C A_x dx+A_y dy+A_z dz
\end{aligned}\qquad(1\text{-}38)$$

式中 C 为曲面 S 的周界曲线(图 1-3). 式(1-38)说明：通过面积 S 的磁通量就等于向量磁

位 A 沿 S 面周界曲线 C 的回路积分值.

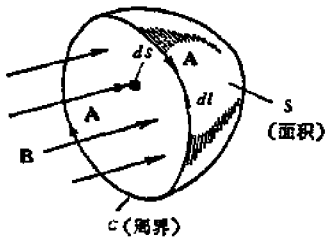


图 1-3 由向量磁位 A 求磁通量 Φ

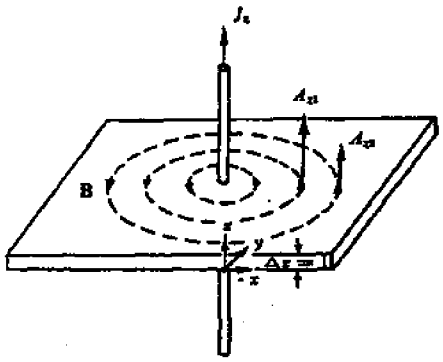


图 1-4 二维平面场中 A_z 与 Φ 的关系

对于二维平行平面磁场，由于 $A_x=A_y=0$，所以通过单位轴向长度（$\Delta z=1$）的磁通量 Φ 应为(图 1-4)：

$$\begin{aligned}\Phi_{(\Delta z=1)} &= \oint_C A_z dz = \int_0^1 A_{z2} dz - \int_0^1 A_{z1} dz \\ &= A_{z2} - A_{z1} = \Delta A_z\end{aligned} \tag{1-39}$$

上式说明，通过 1、2 两点轴向为单位长度的矩形面积内的磁通量 $\Phi_{(\Delta z=1)}$，就数值而言，恰好等于该两点向量磁位值 A_{z2}和 A_{z1}之差. 故在二维情况下，A_z 将具有力线函数的性质，且等 A_z 线就可以代表磁力线. 这是二维平行平面磁场中向量磁位 A_z 具有的一个重要特点.

1-3 恒定磁场的边界条件[1,6—10]

实际问题的求解域常常是有界的. 另外，在所研究的区域内部，常常会遇到不同 μ 值的磁介质(例如空气和铁心)形成一些交界面. 研究通过边界(交界面)时场向量 **B** 和 **H** 的变化规律，并建立起相应的边界(交界面)条件，对于求解具有特定边界的磁场问题是必不可少的.

在交界面处，由于介质性质的突变，场向量亦会发生突变；因此边界条件应当用磁场基本方程组的积分形式(而不是微分形式)来导出.

(一) 磁感强度的边界条件

设交界面一侧的磁导率为 μ_1，另一侧为 μ_2. 穿过交界面作一平行于交界面的无限薄的小扁平匣，小匣上、下面的面积 $S_1=S_2=\Delta S$，如图 1-5 所示. 把磁通连续性定律应用到该小匣，并使 $\Delta S\to 0$，再考虑到小匣侧面的面积为一高阶无穷小量，可得

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = (B_{1n} - B_{2n})\Delta S = 0$$

即

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1-40}$$

或

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \tag{1-41}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为交界面处的单位法向量. 式(1-40)说明，磁场通过交界面处，磁感强度的法向分量是连续的.

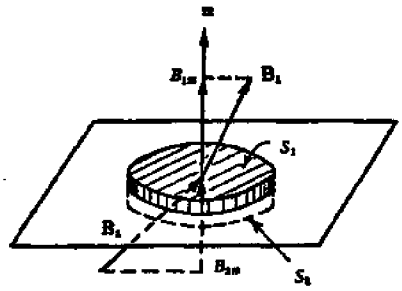


图 1-5　交界面两边磁感强度法向分量的关系

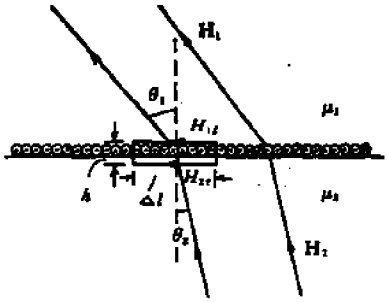


图 1-6　交界面两边磁场强度切向分量的关系

（二）磁场强度的边界条件

紧靠交界面两侧作一矩形小扁回路，回路的长边 Δl 与边界面平行，$\Delta l \to 0$；短边 h 为高阶无穷小量，如图 1-6 所示；边界面上的电流密度为 J. 对此扁回路应用安培环路定律，可得

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{1t} - H_{2t})\Delta l = Jh \cdot \Delta l$$

于是

$$H_{1t} - H_{2t} = \lim_{h \to 0} Jh \tag{1-42}$$

下面根据交界面上电流密度值为有限或无限时，分成两种情况来讨论.

若交界面上的电流密度 J 为有限值，则当回路的短边 $h \to 0$ 时，$\lim\limits_{h \to 0} Jh = 0$，于是

$$H_{1t} = H_{2t} \tag{1-43}$$

或

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \tag{1-44}$$

式(1-43)说明，若交界面上的电流密度为有限值(或零)，磁场通过交界面时，磁场强度的切向分量是连续的.

在研究电机磁场问题时，常把交界面上的载流导体压缩成具有同一电负荷的无限薄的电流片. 对于无限薄的电流片，电流密度 $J \to \infty$，但 $\lim\limits_{h \to 0} Jh$ 为一有限值，它就等于每单位切向长度内的安培导体数，即电负荷 K. 于是式(1-42)可写成

$$H_{1t} - H_{2t} = K \tag{1-45}$$

或

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \tag{1-46}$$

式中 $\mathbf{K} = \lim\limits_{h \to 0} \mathbf{J}h$，即 $\mathbf{K}$ 的方向与电流密度向量 $\mathbf{J}$ 一致，大小等于电负荷 K 的值. 式(1-

45)说明，当磁场通过电密为无穷大的电流片时，磁场强度的切向分量将发生突变.

当然，实际的电流片不会是无限薄，因此电密亦不可能达到无穷大；故磁场通过载流层时，磁场强度的切向分量仍为连续，但 H_t 的值在逐步变化；通过载流层后，H_t 的总变化量应等于该处的电负荷值.

（三）几种常见情况的边界条件

下面讨论电机中常见的几种二维情况的边界条件.

若交界面上的电密为有限值，式(1-40)和(1-43)亦可改写成

$$\left.\begin{aligned}\mu_1 H_1\cos\theta_1 &= \mu_2 H_2\cos\theta_2\\ H_1\sin\theta_1 &= H_2\sin\theta_2\end{aligned}\right\}$$

式中 θ 为磁场与交界面法线间的夹角. 把这两个式子相除，可得

$$\frac{\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{1-47}$$

若区域 2 为铁心，区域 1 为空气；并设 $\mu_2=\mu_{Fe}=\infty$，则式(1-47)变成 $\frac{\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_2}=0$. 此时可有以下几种情况：

1. 载流导体在空气区，铁心为一半无穷大平面，铁心内无载流导体. 对这种情况，磁力线从空气进入铁心时垂直于铁心表面，$\theta_1=0°$，铁心表面为一标量等磁位面.

2. 铁心为圆筒形(双连域)，铁心内无载流导体，且铁心链过的总电流值 $\sum i=0$，如图 1-7 所示. 这种情况与第一种情况类似，磁力线从空气进入铁心时垂直于铁心内表面，铁心内表面为一标量等磁位面.

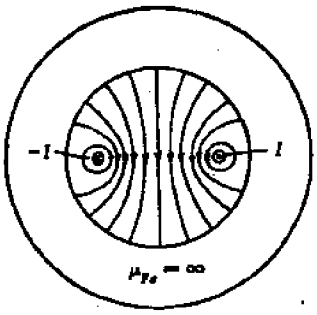


图 1-7　铁心为双连域，铁心链过的总电流 $\sum i=0$ 时

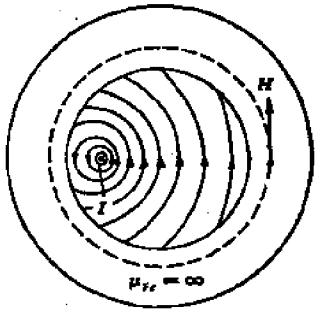


图 1-8　铁心为双连域，铁心链过的总电流 $\sum i\neq 0$ 时

3. 铁心为圆筒形，铁心内无载流导体，但铁心链过的总电流值 $\sum i\neq 0$，如图 1-8 所示. 对这种情况，铁心内表面和铁心内部将有切向磁场强度 H_t($H_t=\frac{\sum i}{2\pi r}$，其大小与电流位置无关)，$\theta_2=90°$，磁力线从空气进入铁心时不再垂直于铁心内表面.

4. 铁心内有载流导体. 此时 $\theta_2=90°$，磁力线与铁心表面重合.

(四)用向量磁位表达时的边界条件

对于恒定磁场，若采用库仑规范，则 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$，或 $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=0$. 将它应用到交界面处的小扁匣(图 1-5)，不难证明

$$A_{1n}=A_{2n} \tag{1-48}$$

上式表示，交界面两侧向量磁位的法向分量是连续的.

再在交界面两侧作一小扁回路，并利用 $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\Phi$，不难证明当回路宽度 h 趋近于零时，$A_{2t}-A_{1t}=\lim_{h\to 0}(hB)=0$，于是

$$A_{1t}=A_{2t} \tag{1-49}$$

即交界面两侧向量磁位的切向分量是连续的.

由于 **A** 的切向和法向分量均为连续，所以可以肯定，在交界面两侧向量磁位 **A** 是连续的，即

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2 \tag{1-50}$$

另外，根据式(1-46)有

$$\mathbf{n}\times\left(\frac{1}{\mu_1}\mathrm{rot}\mathbf{A}_1-\frac{1}{\mu_2}\mathrm{rot}\mathbf{A}_2\right)=\mathbf{K} \tag{1-51}$$

式(1-50)和(1-51)这两个式子就是用向量磁位表达时，恒定磁场的边界条件.

1-4 恒定磁场的唯一性[1,4,5,8]

从 1-2 节可知，求解恒定磁场问题实质上是求解满足特定边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程问题. 这两个方程可以用解析法、数值法或实验法求解. 各类解法中又有许多不同的方法，解答的形式亦可以互不相同. 此外，根据经验，有时亦可以提出一些尝试性解答. 于是就会产生这样的问题：在所提出的解答中，哪一个是真解？在电磁场理论中，此问题就称为解答的唯一性问题.

对于无旋磁场，标量磁位 Ω 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\Omega=0$. 可以证明，对于拉普拉斯方程，若边界曲面 S 上的磁位值 Ω_S 已经给定，或者磁位的法向导数 $\frac{\partial\Omega}{\partial n}$ 已经给定，则整个区域 V 内 Ω 的解答就是唯一的.

对于旋度磁场，向量磁位 **A** 满足向量泊松方程 $\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}$. 利用向量形式的格林定理可以证明（见附录 A)：在所研究的区域 V 内，若给定电流密度 **J** 的大小和分布，同时给定边界曲面 S 上向量磁位的切向分量 $\mathbf{A}_t$ 或者磁场强度的切向分量 $\mathbf{H}_t$ 两者之一，并且规定边界 S 上向量磁位的法向分量 A_n 为零，则 V 内磁感强度 **B** 和向量磁位 **A** 的解答均为唯一. 这就是恒定磁场的唯一性定理.

唯一性定理具有重要的理论和实际意义. 它告诉我们，如果有一个尝试解满足上述条件，则此解就是唯一、真正的解. 这样，唯一性定理就为恒定磁场的某些特殊解法（例如镜像法）提供了理论依据，并为求解具体问题时应当列出哪些边界条件，提供了指示，从而给实际工作带来很大方便.

1-5 磁场能量和直流电感

(一) 磁场能量

区域 V 内的磁场解出后，该区域内的磁场能量 W_m 即可算出．对于线性介质，

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}dV \tag{1-52}$$

磁场能量亦可以用向量磁位 $\mathbf{A}$ 来表达．将 $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ 代入上式，并利用

$$\mathrm{div}(\mathbf{H}\times\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}$$

式(1-52)可改写为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}dV - \frac{1}{2}\int_V \mathrm{div}(\mathbf{H}\times\mathbf{A})dV \\ &= \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}dV - \frac{1}{2}\int_S (\mathbf{H}\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \tag{1-53}$$

式中 S 为体积 V 的边界曲面．

如果要计算整个空间的磁能，可将 S 看作为一个半径 $r\to\infty$ 的球面．当 r 很大时，$H\propto\frac{1}{r^2}$，$A\propto\frac{1}{r}$，而 $S\propto r^2$；于是随着 $r\to\infty$，式(1-53)右端第二项积分的值将趋向于零；此时式(1-53)可简写成

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}dV \tag{1-54}$$

从式(1-53)可见，若边界面 S 上的磁场强度 $\mathbf{H}$ 或向量磁位 $\mathbf{A}$ 等于零，右端第二项积分的值亦等于零，此时同样可以用式(1-54)来计算有限区域 V 内的磁场能量．由于非载流区内的 $\mathbf{J}=0$，所以式(1-54)的积分仅需在载流区内进行，从而大大简化了计算，这是用式(1-54)来计算磁能的优点．

对于非线性介质，式(1-52)和(1-53)应改写为

$$W_m = \int_V\left(\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\right)dV \tag{1-55}$$

或

$$W_m = \int_V\left(\int_0^A \mathbf{J}\cdot d\mathbf{A}\right)dV - \int_S\left(\int_0^A \mathbf{H}\times d\mathbf{A}\right)d\mathbf{S} \tag{1-56}$$

(二) 直流电感

与恒定磁场相应的电感称为直流电感．对于能够归化成一个集中参数的系统，磁能 $W_m=\frac{1}{2}Li^2$，于是直流自感 L 就等于

$$L=\frac{2W_m}{i^2} \tag{1-57}$$

按照电路中的定义，自感亦等于单位电流所产生的自感磁链．若磁场为二维，载流

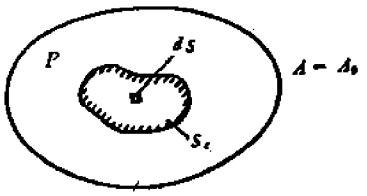


图 1-9　由磁链来确定自感

导体中的电流为 i，截面积为 S_c(图 1-9)，P 点处的向量磁位为 A；则在 $A=A_0$ 的等 A 线范围内，面积为 dS 的单元导体所链的磁链为

$$(A_0-A)\ l\cdot\frac{dS}{S_c}$$

式中 l 为导体的轴向长度. 于是在 $A=A_0$ 范围内，导体的自感 L_0 应为

$$L_0=\frac{l}{iS_c}\int_{S_c}(A_0-A)dS \tag{1-58}$$

积分在整个面积 S_c 内进行.

1-6　小　结

恒定磁场的基本方程有三个：安培环路定律、磁通连续性定律和介质的成分方程. 这三个方程形成了确定场量 **B**（或 **H**）的完整微分方程组.

根据电流密度是否为零，恒定磁场分为无旋场（**J**＝0 的区域）和旋度场（**J**≠0 的区域）. 在无旋场中，标量磁位和向量磁位同时存在，它们分别满足标量和向量拉普拉斯方程. 在旋度场中，只存在向量磁位，此时向量磁位满足向量泊松方程. 在无旋场中引入标量位，可以使求解向量场 **B** 的问题简化为求解标量场 Ω 的问题；在旋度场中引入向量位，对于二维磁场亦可以带来类似的简化. 另外，利用向量磁位来计算磁通量和磁场能量亦比较简便.

恒定磁场的边界条件是：磁场通过交界面时，磁感强度的法向分量保持连续；磁场强度的切向分量可能有跃变，跃变量等于交界面上电流片的电负荷值；向量磁位则总是连续的.

求解标量磁位的拉普拉斯方程时，若边界面上的磁位值给定(称为第一类边值问题或狄里赫利问题)，或者磁位的法向导数给定（称为第二类边值问题或诺伊曼问题），则求解域内标量磁位的解答就是唯一的. 求解向量磁位的向量泊松方程时，若给定域内的电密，以及边界面上向量磁位的切向分量或者磁感强度的切向分量值，磁场 **B** 的解答就是唯一的；若再给定边界面上向量磁位的法向分量为零，则向量磁位 **A** 的解答将是唯一的. 注意要解的方程是标量还是向量微分方程是十分重要的，因为一方面在某些坐标系中方程的展开形式会有所变化；另一方面，要求给出的边界条件亦是不同的.

求出磁场后，根据磁场能量或导体的磁链，即可确定相应的直流电感. 关于载流导体和磁质在磁场中所受到的电磁力，将在第九章中专门研究.

参 考 文 献

[1] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941.

[2] W. K. H. Panofsky, M. Pillips, Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, 2nd Edition, 1962.

[3] P. M. Morse, H. Feshbach, Methods of Theorectical Physics, McGraw-Hill, 1953.

[4] P. Moon, D. E. Spencer, Field Theory for Engineers, Van Nostrand, 1961.

[5] W. R. Smythe, Static and Dynamic Electricity, McGraw-Hill, 1950.

[6] J. Van Bladel, Electromagnetic Fields, Hemisphere Publishing Corporation, 1985.

[7] R. M. Fano, L. J. Chu and R. B. Adler, Electromagnetic Fields, Energy and Forces, John Wiley & Sons, 1960.

[8] K. Simonyi, Theoretische Elektrotechnik, VEB Deutscher Verlag, 1956.

[9] Л. Р. Нейман, П. Л. Калантаров, Теоретические основы электротехники, ГЭИ, 1959.

[10] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems, Pergamon Press, 2nd Edition, 1973.

[11] P. Silvester, Modern Electromagnetic Fields, Prentice-Hall, 1968.

[12] M. Stafl, Electrodynamics of Electrical Machines, Iliffe Book Ltd, 1967.

第二章　恒定磁场的解析解法

本章先研究无界空间中恒定磁场的计算，再研究具有铁磁边界时恒定磁场的解析解法，包括镜像法，求解拉普拉斯方程边值问题的分离变量法，求解泊松方程边值问题的分区法和双重傅氏级数法等；同时列举电机中的一系列典型问题来说明方法的应用．关于恒定磁场的数值解法，将在第四章中说明．

2-1　无界空间中的恒定磁场[1—9]

计算无界空间中的磁场，实用上有三种方法：

（1）利用安培定律算出空间各点的磁感强度 **B**；

（2）根据给定的电流密度确定空间各点的向量磁位 **A**，再由 **B**＝rot**A** 算出 **B**；

（3）由泊松方程解出 **A**，再算出 **B**.

具体采用哪种方法，要根据实际情况而定．本节先研究长直线电流产生的二维磁场，再研究长直圆形截面、矩形截面和具有任意形状截面的载流导体所产生的二维磁场，最后研究螺管线圈的磁场．

（一）长直线电流所产生的磁场

长直线电流所产生的磁场可作为二维平行平面场来处理．根据右手定则可知，该磁场的磁力线为在垂直于导线平面内以导线为中心的一系列同心圆，如图 2-1 所示．此时磁场仅有切向分量 B_θ.

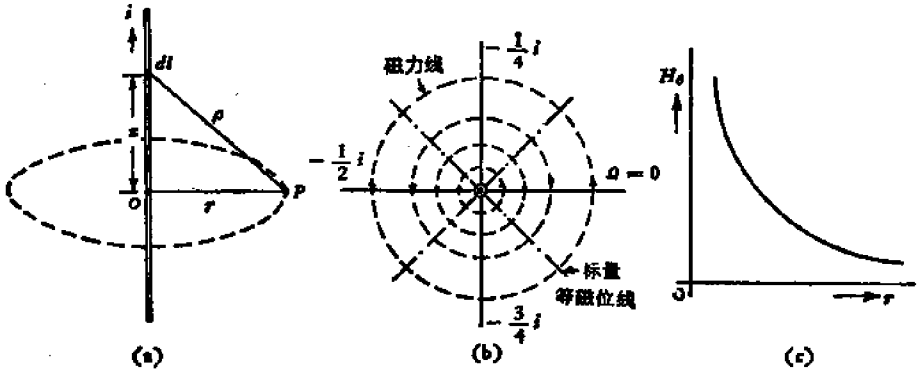


图 2-1　长直线电流所产生的磁场

根据安培定律，B_θ 应为

$$B_\theta=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(d\mathbf{l}\times\rho)_\theta}{\rho^3}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r\,dz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{u_0 i}{2\pi r}\qquad(2\text{-}1)$$

式中ρ为电流元 dl 到场点 P 之间的距离. 由于对称关系，式 (2-1) 亦可以从安培环路定律直接导出，即

$$H_\theta \cdot 2\pi r = i$$

所以

$$B_\theta = \mu_0 H_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

考虑到 $B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$，所以向量磁位 A_z 为

$$A_z = -\int B_\theta dr = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r + C \tag{2-2}$$

由于导体外部的电流密度处处为零，故除导线所在处（原点）之外，可以定义一个标量磁位 Ω. 因为 $H_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$，所以

$$\Omega = -\int H_\theta r d\theta = -\int \frac{i}{2\pi r} r d\theta = -\frac{i}{2\pi}\theta + C' \tag{2-3}$$

若取水平线（$\theta = 0°$）处的标量磁位为 0，则 $C' = 0$.

从式 (2-3) 可见，标量等磁位线为从原点放射出的一系列直线，如图 2-1(b)所示. 由于磁力线为一系列同心圆，所以磁力线与标量等磁位线互相正交.

（二）长直圆形截面载流导体的磁场

由于对称关系，具有圆形截面的长直载流导体所产生磁场其磁力线仍然是围绕导体中心的一系列同心圆. 设导体的半径为 b，电流为 i，根据安培环路定律，在导体内部离中心 r 处 ($r < b$)，

$$H_{\theta i} 2\pi r = i\left(\frac{r}{b}\right)^2$$

所以

$$B_{\theta i} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(\frac{r}{b}\right)^2 \tag{2-4}$$

向量磁位 A_{zi} 则为

$$A_{zi} = -\int B_{\theta i} dr = -\int \frac{\mu_0 i}{2\pi b^2} r dr = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{r}{b}\right)^2 + C \tag{2-5}$$

设在原点处 $A_{zi} = 0$，则 $C = 0$，于是

$$A_{zi} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{r}{b}\right)^2 \tag{2-6}$$

在导体外部($r > b$)有

$$H_{\theta e} = \frac{i}{2\pi r}$$

所以

$$B_{\theta e} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \tag{2-7}$$

向量磁位 A_{ex} 为

$$A_{ex} = -\int \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r + C' \tag{2-8}$$

考虑到导体表面处 A_z 为连续，由此可知 $C' = \frac{\mu_0 i}{4\pi}$ $(2 \ln b - 1)$，于是

$$A_{ex} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{\mu_0 i}{4\pi} \tag{2-9}$$

圆形截面导体的向量磁位亦可以用叠加法求得. 把载流导体分成无穷多股线电流，把每股线电流所产生的向量磁位 dA_z 积分，即可求得空间 P 点的总磁位 A_z.

设导体内部 Q 点与场点 P 之间的距离为 ρ（图 2-2），则 Q 处的线电流在 P 点所产生的向量磁位 dA_z 为

$$dA_z = -\frac{\mu_0 J_z}{2\pi} \ln \rho \, dx dy \tag{2-10}$$

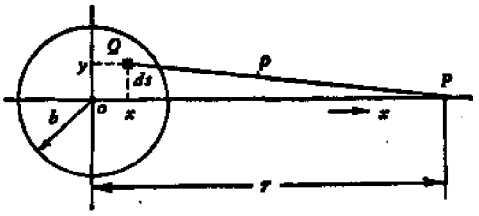


图 2-2　把圆形截面的载流导体分成许多股线电流

于是整个导体所生的向量磁位 A_z 为

$$\left.\begin{aligned} A_z &= -\frac{\mu_0 J_z}{2\pi}\int_{-b}^{0}\int_{0}^{\sqrt{b^2-x^2}} \ln[(r-x)^2 + y^2] dy dx + C'' \\ &= -\frac{\mu_0 J_z}{2\pi}\left[\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi b^2}{2}(2\ln b - 1)\right] + C'', \qquad r < b \text{ 时} \\ &= -\frac{\mu_0 J_z}{2\pi}\pi b^2 \ln r + C'', \qquad r > b \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{2-11}$$

同理，若令原点处的 $A_z = 0$，则 $C'' = \frac{\mu_0 J_z}{4} b^2 (2\ln b - 1)$；不难看出，式(2-11)与式(2-6)和(2-9)一致.

（三）两根载有反向电流的长直圆形导体的磁场

实际的载流导体都有一定的回路. 把组成回路的各根导体所产生的向量磁位叠加，即可求出合成向量磁位 A_z.

以原点 O 处的向量磁位为零，在导体内部，A_{ei} 为

$$\begin{aligned} A_{ei} &= \left(-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{r_1^2}{b^2}\right) + \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} + \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{b}\right) \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left[1 - \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 + \ln\left(\frac{r_2}{b}\right)^2\right], \qquad r_1 < b \text{ 时} \end{aligned} \tag{2-12}$$

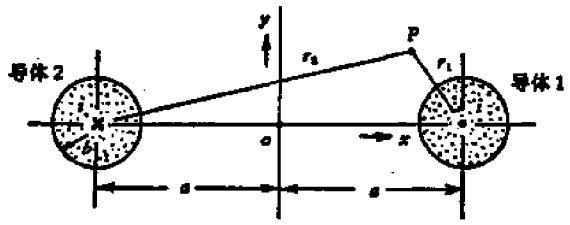


图 2-3　两根长直反向电流产生的向量磁位

在导体外部，A_{xx}为

$$A_{xx}=\left(-\frac{\mu_0 i}{4\pi}-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r_1}{b}\right)+\left(\frac{\mu_0 i}{4\pi}+\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{b}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1},\qquad r_1,r_2\geqslant b\text{ 时}\qquad(2\text{-}13)$$

图 2-4 表示$\frac{b}{a}=\frac{1}{60}$时等 A_z 面的图形.

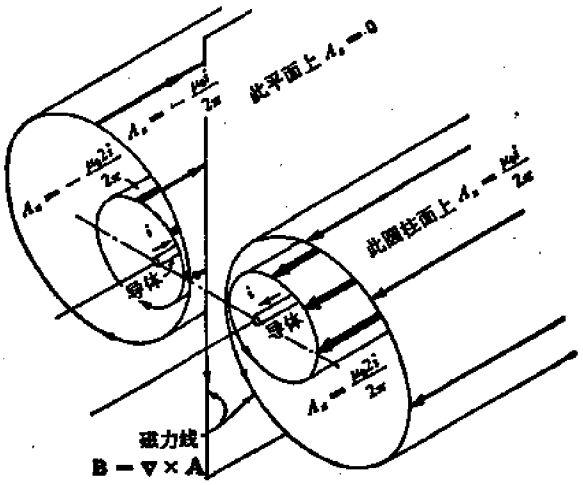


图 2-4　二长直反向电流的磁场$\left(\frac{b}{a}=\frac{1}{60}\right)$

（四）无限多根等距排列的线电流的磁场

图 2-5 表示一组无限多根等距排列的线电流，线电流间的距离为 a. 现计算这组电流所产生的磁场.

重复应用单根线电流所产生的磁位公式，可得

$$A_z=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\ln\{(x^2+y^2)[x^2+(y-a)^2][x^2+(y+a)^2]\cdots\}+C$$

$$=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\ln\left\{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\left[1+\frac{x^2}{(a-y)^2}\right]\left[1+\frac{x^2}{(a+y)^2}\right]\cdots\right.$$

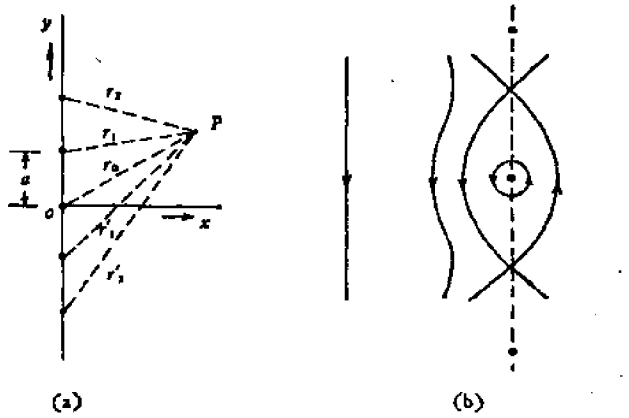


图 2-5　一组等距排列的线电流

$$\times y^2(a-y)^2(a+y)^2\cdots\Big\}+C$$

$$=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\ln\left\{\left(\mathrm{ch}2\pi\frac{x}{a}-\cos 2\pi\frac{y}{a}\right)\frac{1}{2\pi^2}a^2a^4\cdots\right\}+C \tag{2-14}$$

令任意常数 $C=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\ln\left\{\frac{1}{2\pi^2}a^2a^4\cdots\right\}$，最后可得

$$A_z=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\ln\left[\mathrm{ch}2\pi\frac{x}{a}-\cos 2\pi\frac{y}{a}\right] \tag{2-15}$$

磁感强度 **B** 则为

$$\mathbf{B}=-\frac{\mu_0 i}{2a}\frac{\sin 2\pi\frac{y}{a}}{\mathrm{ch}2\pi\frac{x}{a}-\cos 2\pi\frac{y}{a}}\mathbf{i}+\frac{\mu_0 i}{2a}\frac{\mathrm{sh}2\pi\frac{x}{a}}{\mathrm{ch}2\pi\frac{x}{a}-\cos 2\pi\frac{y}{a}}\mathbf{j} \tag{2-16}$$

图 2-5 (b) 表示这种电流排列所形成的部分磁场图形. 从图可见，当 $x\gg a$，即距离此电流阵较远时，磁场基本与 $x=0$ 的平面相平行，其值趋于 $\frac{\mu_0 i}{2a}$；这正是线密度为 $\frac{i}{a}$ 的电流片在远处所产生的磁场. 电流的间断排列对磁场结构的影响，仅在 a 这个数量级的范围以内.

（五）长直矩形截面载流导体的磁场

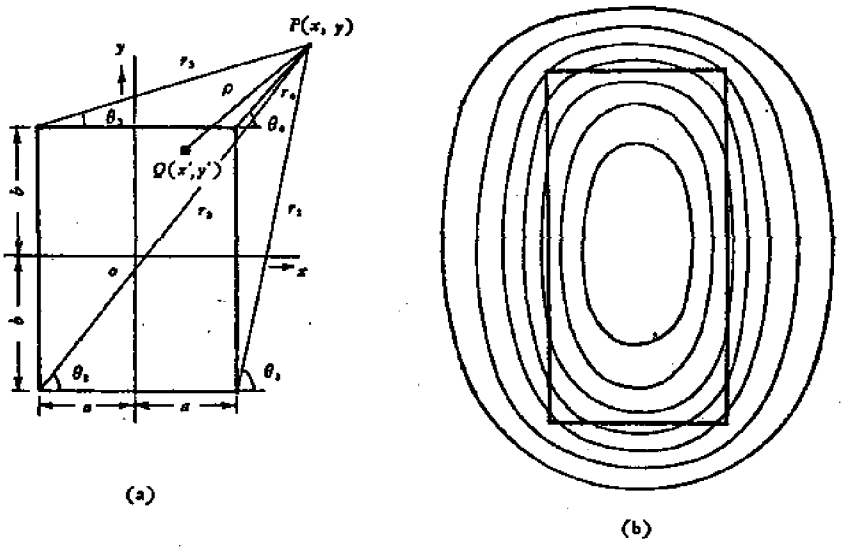
利用叠加原理亦可以求出矩形截面载流导体在任一点 $P(x,y)$ 处所产生的总向量磁位 A_z（图 2-6）：

$$\begin{aligned}A_z&=-\frac{\mu_0 J_z}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\ln\rho\,dy'dx'+C\\&=-\frac{\mu_0 i}{16\pi ab}\int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\ln[(x'-x)^2+(y'-y)^2]dy'dx'+C\\&=-\frac{\mu_0 i}{16\pi ab}\Big\{(a-x)(b-y)\ln[(a-x)^2+(b-y)^2]\\&\quad+(a+x)(b-y)\ln[(a+x)^2+(b-y)^2]\\&\quad+(a-x)(b+y)\ln[(a-x)^2+(b+y)^2]\end{aligned}$$

$$+(a+x)(b+y)\ln[(a+x)^2+(b+y)^2]$$
$$+(a-x)^2\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{b-y}{a-x}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{b+y}{a-x}\right]$$
$$+(a+x)^2\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{b-y}{a+x}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{b+y}{a+x}\right]$$
$$+(b-y)^2\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{a-x}{b-y}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{a+x}{b-y}\right]$$
$$+(b+y)^2\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{a-x}{b+y}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{a+x}{b+y}\right]\Big\}+C \tag{2-17}$$

式中 C 为任意常数. 若使 $x=0$，$y=0$ 处的 $A_z=0$，可得

$$C=\frac{\mu_0 i}{16\pi ab}\left[4ab\ln(a^2+b^2)+4a^2\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}+4b^2\mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{b}\right] \tag{2-18}$$



(a)

(b)

图 2-6 长直矩形截面的载流导体及其等 A_z 线

(a) 长直矩形截面的载流导体；(b) 载流导体的等 A_z 线

磁感强度则为

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}=-\frac{\mu_0 i}{8\pi ab}\Big[(y+b)(\theta_1-\theta_2)-(y-b)(\theta_4-\theta_3)$$
$$+(x+a)\ln\frac{r_2}{r_3}-(x-a)\ln\frac{r_1}{r_4}\Big] \tag{2-19}$$

$$B_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{\mu_0 i}{8\pi ab}\Big[(x+a)(\theta_2-\theta_3)-(x-a)(\theta_1-\theta_4)$$
$$+(y+b)\ln\frac{r_2}{r_1}-(y-b)\ln\frac{r_3}{r_4}\Big] \tag{2-20}$$

式中 r_1，r_2，r_3 和 r_4，θ_1，θ_2，θ_3 和 θ_4 分别为 P 点到矩形顶点的距离和水平角度［图 2-6(a)］. 图 2-6(b)表示磁场的磁力线（等 A_z 线）.

当矩形的一条边 b 趋近于零时，载流导体就变成宽度为 $2a$ 的电流片，这种电流片可以近似地表示一个分布绕组. 若原点位于电流片的中央，则

$$A_z = -\frac{\mu_0 i}{8\pi a}\Big\{(a+x)\ln[(a+x)^2+y^2] + (a-x)\ln[(a-x)^2+y^2] + 2y\Big(\mathrm{tg}^{-1}\frac{a+x}{y} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{a-x}{y}\Big) - 4a\Big\} + C \tag{2-21}$$

取原点 $x=y=0$ 处的 $A_z=0$，则

$$C = \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\ln a - 1) \tag{2-22}$$

磁感强度则为：

$$\left.\begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi a}\Big(\mathrm{tg}^{-1}\frac{a+x}{y} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{a-x}{y}\Big) \\ B_y &= \frac{\mu_0 i}{8\pi a}\ln\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\ln\frac{r_2}{r_1} \end{aligned}\right\} \tag{2-23}$$

若 $a\to\infty$，则 $B_x=\mp\frac{\mu_0 i}{4a}$，$B_y=0$，即无限长的电流片将仅有 x 方向的磁感强度.

（六）向量磁位积分解的差分近似

若导体截面形状比较复杂，积分就有一定困难. 此时可用差分求积法来计算向量磁位积分解的近似值.

例如对图 2-7 所示长直载流导体，若用均匀网格（即 $\Delta x'=\Delta y'=h$）将导体截面分成 N 个单元导体，则整个导体在场点 P 处所产生的总向量磁位 A_z 应为

$$A_z = -\frac{\mu_0 J_z}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\iint_n \ln\sqrt{(x-x'_n)^2+(y-y'_n)^2}\,dx'_n dy'_n \tag{2-24}$$

式(2-24)中的每一个积分均在单元面积 $\Delta x'\cdot\Delta y'=h^2$ 内进行.

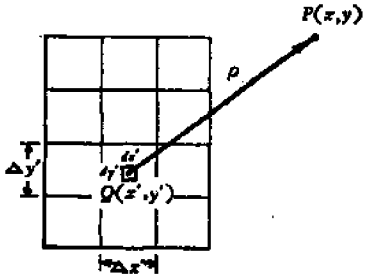


图 2-7　积分解的差分近似

若 P 点在第 n 个单元之外，则在进行式（2-24）的积分时，距离 $\sqrt{(x-x'_n)^2+(y-y'_n)^2}$ 可近似认为是一常值，并等于 P 点与第 n 个小方格中心点 Q 之间的距离，此时

$$\iint_n \ln\sqrt{(x-x'_n)^2+(y-y'_n)^2}\,dx'_n dy'_n \approx h^2\ln\sqrt{(x-x'_{nc})^2+(y-y'_{nc})^2} \tag{2-25}$$

式中(x'_{nc},y'_{nc})为第 n 个单元导体中心点的坐标. 若 P 点在第 n 个单元内部，上述积分在该

单元内的平均值为

$$\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h\left[\int_0^h\int_0^h \ln\sqrt{(x-x_n')^2+(y-y_n')^2}\,dx_n'dy_n'\right]dxdy = h^2\ln 0.44705h \quad (2\text{-}26)$$

于是，当 P 点在导体外部时，P 点的总向量磁位为

$$A_z \approx -\frac{\mu_0 J_z}{2\pi}\sum_{n=1}^{N} h^2 \ln\sqrt{(x-x_m')^2+(y-y_m')^2}$$

$$= -\frac{\mu_0 i}{4\pi N}\sum_{n=1}^{N}\ln[(x-x_m')^2+(y-y_m')^2] \quad (2\text{-}27)$$

式中 i 为整个导体内的电流，$i=Nh^2J_z$. 若 P 点在导体内部，则

$$A_z \approx -\frac{\mu_0 i}{4\pi N}\left\{\ln(0.44705h)^2+\sum_{n=1}^{N-1}\ln[(x-x_m')^2+(y-y_m')^2]\right\} \quad (2\text{-}28)$$

这样，由式 (2-27) 和 (2-28)，即可用计算机算出 P 点的向量磁位.

（七）螺管线圈的磁场

螺管线圈的磁场可用安培定律来计算.

若螺管的参数方程为

$$\left.\begin{aligned} &x' = a\cos\theta, \quad y' = a\sin\theta, \quad z' = a\theta\,\mathrm{tg}\alpha \\ &\mathrm{tg}\alpha = \frac{p}{2\pi a} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}29)$$

式中 p 为螺距(图 2-8)，a 为线圈的半径；则沿螺管轴线上($r=0$) 磁场的 z 向分量 B_z 为：

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_c \frac{(d\mathbf{l}\times\boldsymbol{\rho})_z}{\rho^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_c \frac{\rho_y dx' - \rho_x dy'}{\rho^3}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{2\pi N}\frac{a^2 d\theta}{[a^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{2\pi N}\frac{d\theta}{[1+(\theta\,\mathrm{tg}\alpha - z/a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2p}\left\{\frac{Np-z}{[a^2+(Np-z)^2]^{\frac{1}{2}}}+\frac{z}{(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad (2\text{-}30)$$

式中 N 为线圈的总匝数.

在螺管线圈中心处，$z=\frac{1}{2}Np$，上式成为

$$B_{z(\text{中心})} = \frac{\mu_0 i}{p}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2a}{Np}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2\text{-}31)$$

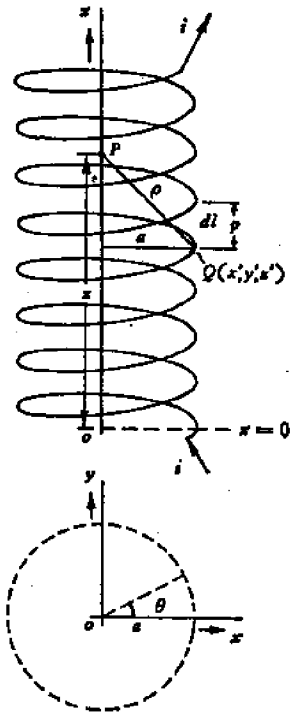


图 2-8 螺管线圈

当线圈很长时，$Np \gg a$，$B_{z(\text{中心})} \approx \frac{\mu_0 i}{p}$. 在管口处，$z=0$，式 (2-30) 变成

$$B_{z(\text{管口})}=\frac{\mu_0 i}{2p}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a}{Np}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{2-32}$$

当线圈很长时，$B_{z(\text{管口})}\approx\frac{\mu_0 i}{2p}$；即等于管中心处磁感强度的$\frac{1}{2}$.

2-2 镜像法[2,3,8]

电机中的磁场问题大多具有铁磁介质作为边界. 在载流导体所生磁场的作用下，铁磁边界将被磁化并对原先的磁场分布产生一定的影响；最终的磁场分布将由载流导体所生的磁场和磁化的铁磁边界所产生的磁场共同确定. 铁磁边界对原磁场的影响有两种处理方法，一是镜像法，另一是边界磁位法. 这里，先研究镜像法.

前已述及，在给定电密分布和边界条件后，区域内部磁场的解答就是确定的、唯一的. 图 2-9(a)、(b)分别表示两个场域. 图(a)中 1、2 为两个线电流，*ab*、*cd*、*ef* 表示边界面，区域内部介质的磁导率为 μ_1；图(b)表示另外一个完全处于磁导率 μ_1 中的场域，其中线电流 1、2 的大小和位置与图(a)中完全相同，3、4、5、6…等表示另外几组线电流. 如果图(b)中线电流 1、2、3、4、5、6…等在 *ab*、*cd*、*ef* 处所产生的磁场和磁位值与图(a)中相应边界上的值完全相同，则根据唯一性定理可知，图(a)和图(b)中区域 I 内的磁场应完全相同. 于是，在计算区域 I 内的磁场时，可以用处于均匀介质、位于边界面后面的等效虚拟电流 3、4、5、6…去代替实际边界面的影响，这种方法就称为镜像法. 线电流 1、2 称为原像，3、4、5、6…等称为镜像，边界面 *ab*、*cd*、*ef* 称为镜面或反射面.

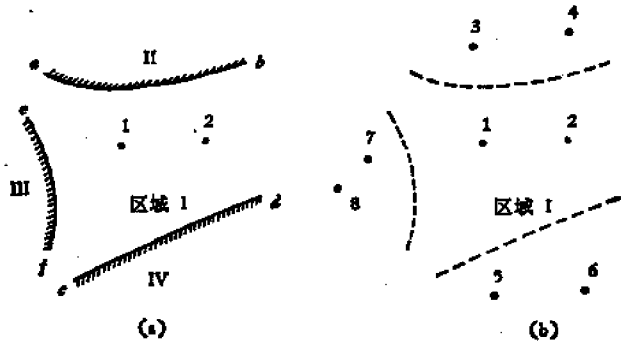


图 2-9 用镜像电流来代替边界的影响

(a) 实际图形；(b) 原像和镜像

下面先研究边界面为铁磁平面时线电流的镜像.

2-3 边界面为铁磁平面时线电流的镜像[2,3,8,10,11]

(一) 边界面为一半无穷大铁磁平面时

设边界面为一半无穷大铁磁平面，其磁导率为 μ_2，其上为磁导率 μ_1 的介质，如图 2-

10(a)所示；区域 1 内有线电流 i，现研究此电流在区域 1 内所形成的磁场.

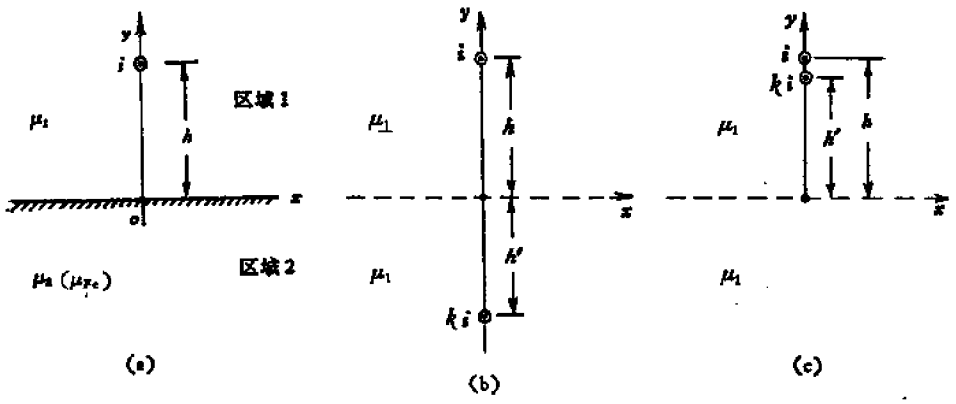


图 2-10　线电流在铁磁平面上面时镜像电流的求法

若原电流的坐标为(0，h)，则除边界面以外，区域 1 和 2 内的向量磁位 A_z 将满足下列泊松方程：

$$\nabla^2 A_z = -\mu_1 i\,\delta(x, y-h) \tag{2-33}$$

式中 $\delta(x,y-h)$为二维狄拉克脉冲函数，其定义为

$$\left.\begin{aligned} &\delta(x,y-h)=0, \quad \text{除 } x=0, y=h \text{ 一点外;}\\ &\delta(x,y-h)=\infty, \quad x=0, y=h \text{ 时;}\\ &\int_S \delta(x,y-h)\,dS = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2-34}$$

在区域 1 和 2 的交界面上，边界条件为：

$$\left.\begin{aligned} &B_{1y} = B_{2y}, \quad \text{即} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_2\\ &H_{1x} = H_{2x}, \quad \text{即} \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_1 = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_2 \end{aligned}\right\} \tag{2-35}$$

在无穷远处，

$$B_x = B_y = 0 \tag{2-36}$$

对于区域 1，试将边界的影响用一处于均匀介质 μ_1 内的镜像电流 ki 去代替. 从对称性考虑，镜像电流应在 y 轴上，其位置设为(0，$-h'$)，如图 2-10(b)所示. 于是可得区域 1 内向量磁位的试解 A_{z1}为：

$$A_{z1} = -\frac{\mu_1 i}{4\pi}\{\ln[x^2+(y-h)^2] + k\ln[x^2+(y+h')^2]\}, \quad y>0 \tag{2-37}$$

显然，h'必须大于零，即镜像电流必定在边界的另一边，否则 A_{z1}就不会满足微分方程(2-33).

对于区域 2，同理可以把边界的影响等效地用一个处于均匀介质 μ_1、位于 (0，$+h'$) 的虚拟电流 ki 来代替. 于是可得区域 2 内的试解 A_{z2}为

$$A_{z2} = -\frac{\mu_1 i}{4\pi}\{\ln[x^2+(y-h)^2] + k\ln[x^2+(y-h')^2]\}, \quad y<0 \text{ 时} \tag{2-38}$$

现在来看这两个试解在什么情况下才能满足原泊松方程和给定的边界条件. 把 A_{z1} 和 A_{z2} 求导、核算，不难发现这两个试解将满足式(2-33)、(2-35)和(2-36)，若

$$\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2}+k\frac{y+h'}{x^2+(y+h')^2}\right]_{y=0}=\frac{1}{\mu_2}\left[\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2}+k\frac{y-h'}{x^2+(y-h')^2}\right]_{y=0} \tag{2-39}$$

即要求

$$h'=h,\qquad k=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1} \tag{2-40}$$

将上述关系代入 A_{z1} 和 A_{z2}，最后可得

$$A_{z1}=-\frac{\mu_1 i}{4\pi}\left\{\ln\left[x^2+(y-h)^2\right]+\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\ln\left[x^2+(y+h)^2\right]\right\},\quad y>0\text{ 时} \tag{2-41}$$

$$\begin{aligned}A_{z2}&=-\frac{\mu_1 i}{4\pi}\left\{1+\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\right\}\ln\left[x^2+(y-h)^2\right]\\&=-\frac{\mu_2 i}{4\pi}\left(\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)\ln\left[x^2+(y-h)^2\right],\qquad y<0\text{ 时}\end{aligned} \tag{2-42}$$

从式(2-41)和(2-42)可知：

(1) 计算区域 1 内的磁场时，可把整个空间作为具有 μ_1 的均匀介质，磁场用原电流 i 和边界面后面对称位置处的镜像电流 $\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}i$ 算出；

(2) 计算区域 2 内的磁场时，可把整个空间作为具有 μ_2 的均匀介质，磁场用位于原像处的虚拟合成电流 $\frac{2\mu_1}{\mu_1+2\mu}i$ 算出.

图 2-11 表示 $\frac{\mu_2}{\mu_1}=9$，载流导体在区域 1 或区域 2 中时，两个区域内的磁场分布图.

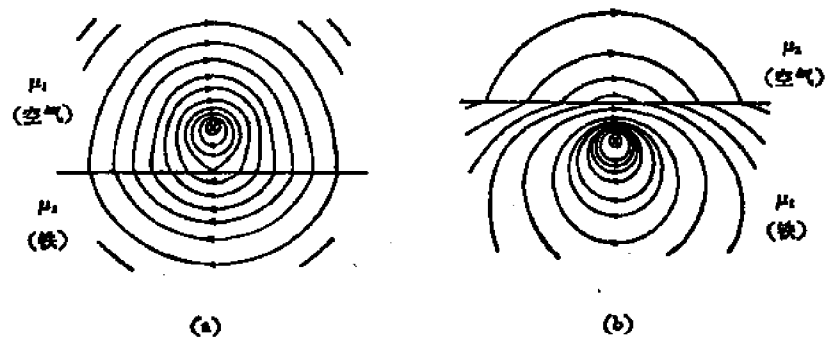


图 2-11 $\frac{\mu_2}{\mu_1}=9$ 时线电流所产生的磁场

(a) 线电流在区域 1 中；(b) 线电流在区域 2 中

下面来讨论两种特殊情况：

(1) 若 $\frac{\mu_2}{\mu_1}=\infty$，则 $k=1$. 这是载流导体置于 $\mu_{Fe}=\infty$ 的铁磁平面上面时的情况，此时镜面为一完全反射面，镜像电流与原电流同大小，铁磁平面为一标量等磁位面.

(2) 若$\frac{\mu_2}{\mu_1}=0$，则$k=-1$. 此时镜像电流与原电流反号，这有两种情况：一种是$\mu_2=0$，即介质2为一不透磁的物质；另一种是区域1为铁心，$\mu_1=\infty$，区域2为其他介质，载流导体置于铁心中的情况. 对这两种情况，边界面上的$A_{z1}\to 0$，即边界面与磁力线重合.

从式(2-41)还可以看出，若区域1为空气，区域2为铁心，由于$\frac{\mu_2}{\mu_1}$ $(=\frac{\mu_{Fe}}{\mu_0})\gg 1$，故可把铁心的磁导率$\mu_{Fe}$近似地看作为$\infty$，由此所引起的误差最大不会超过$\frac{\mu_0}{\mu_{Fe}}$. 例如当$\frac{\mu_{Fe}}{\mu_0}=1000$时，最大误差不超过0.1%. 故以后研究时，多数情况将把μ_{Fe}作为∞来考虑.

(二) 边界面为两个铁磁平面时

当边界面为两个$\mu_{Fe}=\infty$的铁磁平面时，原电流及其镜像对两个镜面来回反射，从而得到一系列镜像. 如果在多次反射后，最后的两个镜像互相重合，则镜像总数是有限的；如果反射所得镜像一直不能重合，则将得到无限多个镜像.

下面根据边界的具体布置，分成两种情况来研究.

边界面为二交接的铁磁平面时 图2-12表示二交接的铁磁平面，其间的夹角$\theta=\frac{\pi}{n}$ (n=整数). 若$\mu_{Fe}=\infty$，分析表明，镜像来回反射的规则是：

(1) B面内的镜像(与水平面成β_k角)对A面反射时，在A面的另一边内(与水平面成$-\beta_k$角)得到一个大小相等的镜像；

(2) A面内的镜像(与水平面成$-\alpha_k$角)对B面反射时，在B面的另一边角度相等处(与水平面成$\frac{2\pi}{n}+\alpha_k$角) 得到一个大小相等的镜像；

(3) 若边界面为标量等磁位面，则反射前、后的两镜像电流同号；若边界面为磁力线，则反射前、后两镜像电流为反号.

按照上述规则来回反射，即可找到全部镜像，如表2-1所示.

表2-1 反射时镜像的位置

反射面	$A(-\alpha_k)$	$B(\beta_k)$
原电流位置		$+\alpha$
第1次反射	$-\alpha$	$\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha\right)$
第2次反射	$-\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha\right)$	$\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)$
第3次反射	$-\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)$	$\left(\frac{4\pi}{n}-\alpha\right)$
第4次反射	$-\left(\frac{4\pi}{n}-\alpha\right)$	$\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)$
第k次反射	$-\left(\frac{k\pi}{n}-\alpha\right)$	$\left(\frac{k\pi}{n}+\alpha\right)$

可以看出，若n=整数，则反射次数和镜像数将是有限的；反射次数$k=n$，镜像和原电流的总数为$2k$. 例如对图2-12的情况，$n=2$，故$k=2$，镜像电流和原电流的总数等于4.

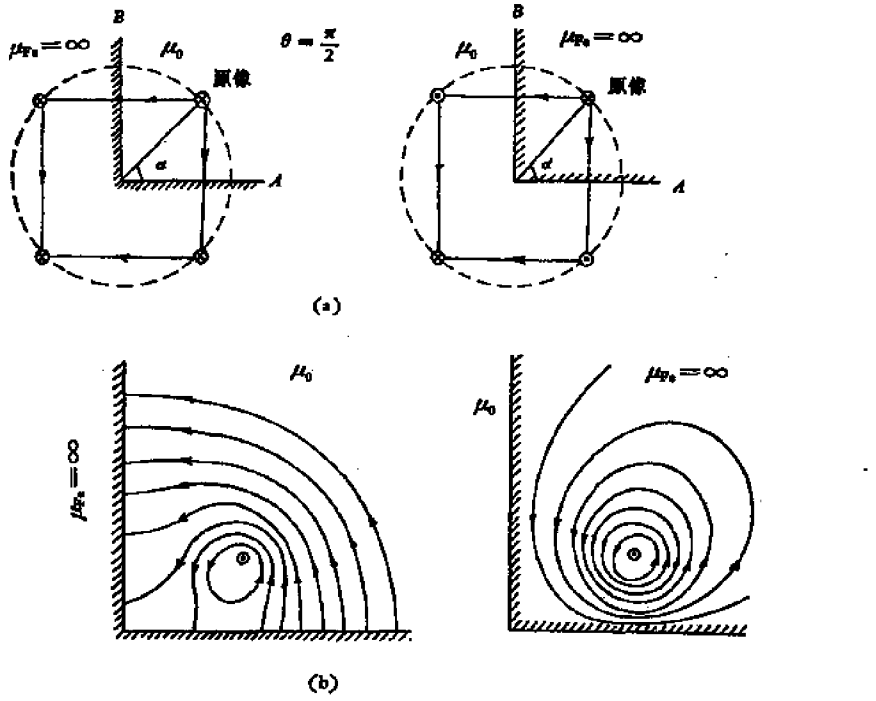


图 2-12　边界面为二交接铁磁平面时线电流的镜像$\left(\mu_{Fe}=\infty,\ \theta=\frac{\pi}{2}\right)$

(a) 原像和镜像；(b) 磁场分布

全部镜像找出后，应利用图形的对称性进行核对，看原像和镜像所形成的磁场图形在边界处是否符合给定的边界条件.

边界面为二平行铁磁平面时　图 2-13 (a) 表示一根线电流置于二平行的铁磁平面之间的情况. AA 与 BB 面间的距离为 a，线电流离 AA 面的距离为 h. 若 $\mu_{Fe}=\infty$，则该二平面分别为不同磁位的标量等磁位面. 此时把原像和镜像对 AA、BB 面来回反射，可得无限多个镜像. 从图 2-13(a)不难看出，原像和镜像可以分成 Ⅰ、Ⅱ 两组，它们分别组成一个相距 $2a$ 的电流阵.

以 AA 线作为 x 轴，通过线电流的铅垂线为 y 轴，则 Ⅰ 组和 Ⅱ 组电流所产生的向量磁位 $A_{z(\mathrm{I})}$和 $A_{z(\mathrm{II})}$应分别为：

$$A_{z(\mathrm{I})}=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\ln\left[\mathrm{ch}2\pi\frac{x}{2a}-\cos 2\pi\frac{y+h}{2a}\right] \tag{2-43}$$

$$A_{z(\mathrm{II})}=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\ln\left[\mathrm{ch}2\pi\frac{x}{2a}-\cos 2\pi\frac{y-h}{2a}\right] \tag{2-44}$$

总向量磁位 A_z 为

$$\begin{aligned}A_z&=A_{z(\mathrm{I})}+A_{z(\mathrm{II})}\\&=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left\{\ln\left[\mathrm{ch}\pi\frac{x}{a}-\cos\pi\frac{y+h}{a}\right]+\ln\left[\mathrm{ch}\pi\frac{x}{a}-\cos\pi\frac{y-h}{a}\right]\right\}\end{aligned} \tag{2-45}$$

磁感强度则为

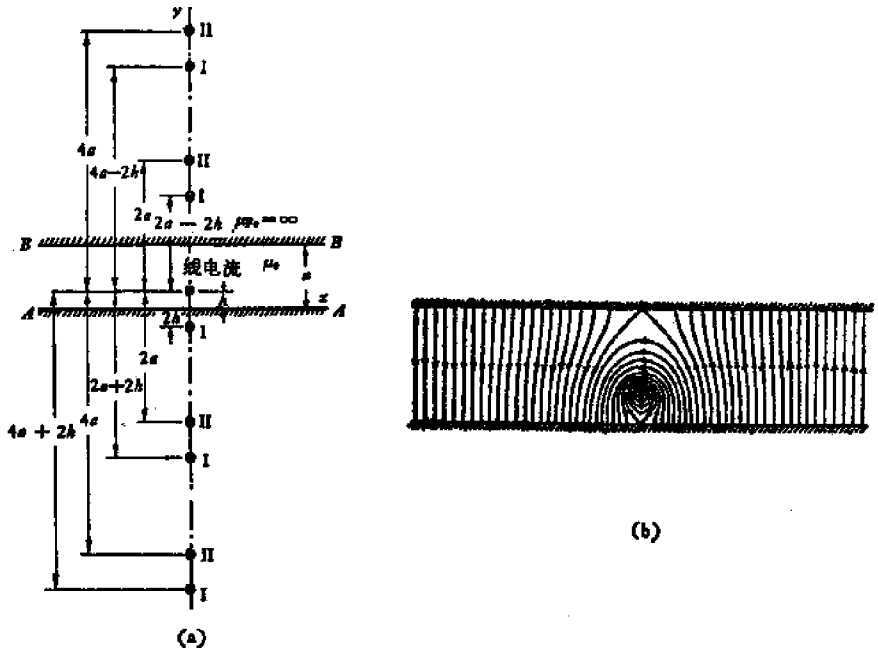


图 2-13　边界面为二平行铁磁平面时线电流的镜像（$\mu_{Fe}=\infty$）
（a）原像和镜像的排列；（b）磁场分布图

$$\left.\begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0 i}{4a}\left[\frac{\sin\pi\dfrac{y+h}{a}}{\mathrm{ch}\pi\dfrac{x}{a}-\cos\pi\dfrac{y+h}{a}}+\frac{\sin\pi\dfrac{y-h}{a}}{\mathrm{ch}\pi\dfrac{x}{a}-\cos\pi\dfrac{y-h}{a}}\right] \\ B_y &= \frac{\mu_0 i}{4a}\left[\frac{\mathrm{sh}\pi\dfrac{x}{a}}{\mathrm{ch}\pi\dfrac{x}{a}-\cos\pi\dfrac{y+h}{a}}+\frac{\mathrm{sh}\pi\dfrac{x}{a}}{\mathrm{ch}\pi\dfrac{x}{a}-\cos\pi\dfrac{y-h}{a}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{2-46}$$

图 2-13(b)表示相应的磁场分布图.

在 AA 和 BB 面上，$B_x=0$，B_y 分别为

$$B_{y(y=0)} = \frac{\mu_0 i}{2a}\left[\frac{\mathrm{sh}\pi\dfrac{x}{a}}{\mathrm{ch}\pi\dfrac{x}{a}-\cos\pi\dfrac{h}{a}}\right] \tag{2-47}$$

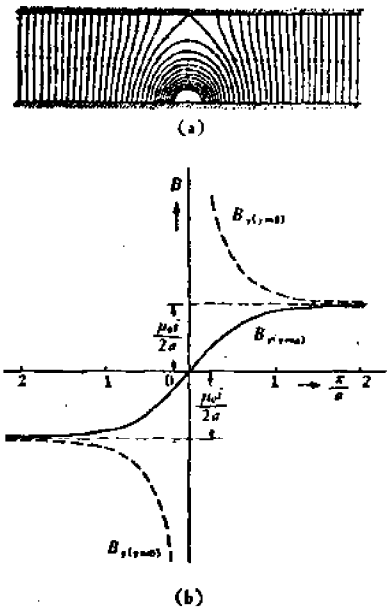
$$B_{y(y=a)} = \frac{\mu_0 i}{2a}\left[\frac{\mathrm{sh}\pi\dfrac{x}{a}}{\mathrm{ch}\pi\dfrac{x}{a}+\cos\pi\dfrac{h}{a}}\right] \tag{2-48}$$

若载流导体置放在铁心表面处，此时 $h\to 0$，于是式(2-45)和(2-46)将变成

$$A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left[\mathrm{ch}\pi\frac{x}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}\right] \tag{2-49}$$

$$\left.\begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0 i}{2a}\frac{\sin\pi\frac{y}{a}}{\mathrm{ch}\pi\frac{x}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}} \\ B_y &= \frac{\mu_0 i}{2a}\frac{\mathrm{sh}\pi\frac{x}{a}}{\mathrm{ch}\pi\frac{x}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}} \end{aligned}\right\} \tag{2-50}$$

图 2-14 表示相应的磁场分布图. 从图可见，只在离导体较远处，磁力线才是均匀、垂直地通过气隙；在接近载流导体处，磁力线呈半圆形，这与通常电机学书中所介绍的有一定差别.



(a)

(b)

图 2-14 单根载流导体在气隙中产生的磁场($h=0$)

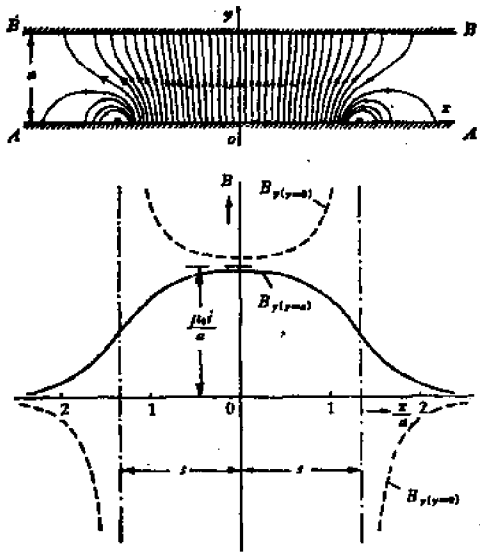


图 2-15 载流线圈在气隙中产生的磁场

把组成一个线圈的两根载流导体所产生的向量磁位叠加，可得载流线圈在二平行铁磁平面间产生的总磁位 A_z，如图 2-15 所示. 设线圈的节距为 $2s$，坐标原点取在线圈中心处，则

$$\begin{aligned} A_z &= -\frac{\mu_0 i}{2\mu}\left\{\ln\left[\mathrm{ch}\pi\frac{x+s}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}\right]-\ln\left[\mathrm{ch}\pi\frac{x-s}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}\right]\right\} \\ &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{\mathrm{ch}\pi\frac{x+s}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}}{\mathrm{ch}\pi\frac{x-s}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}} \end{aligned} \tag{2-51}$$

磁感强度为

$$\left.\begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0 i}{2a}\left[\frac{\sin\pi\frac{y}{a}}{\mathrm{ch}\pi\frac{x+s}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}}-\frac{\sin\pi\frac{y}{a}}{\mathrm{ch}\pi\frac{x-s}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}}\right] \\ B_y &= \frac{\mu_0 i}{2a}\left[\frac{\mathrm{sh}\pi\frac{x+s}{a}}{\mathrm{ch}\pi\frac{x+s}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}}-\frac{\mathrm{sh}\pi\frac{x-s}{a}}{\mathrm{ch}\pi\frac{x-s}{a}-\cos\pi\frac{y}{a}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}52)$$

对于上、下边界面，$B_x=0$，B_y 为

$$B_{y(y=0)} = \frac{\mu_0 i}{2a}\left[\mathrm{cth}\pi\frac{x+s}{2a}-\mathrm{cth}\pi\frac{x-s}{2a}\right] \quad (2\text{-}53)$$

$$B_{y(y=a)} = \frac{\mu_0 i}{2a}\left[\mathrm{th}\pi\frac{x+s}{2a}-\mathrm{th}\pi\frac{x-s}{2a}\right] \quad (2\text{-}54)$$

（三）边界面为多个垂直交接的铁磁平面时

图 2-16(a)表示一个线电流置放在电枢槽内时的情况．设 $\mu_{Fe}=\infty$，槽很深．此时原电流对槽壁和槽底等三个垂直交接的铁磁平面来回反射，可得图 2-16(b)所示一系列镜像．

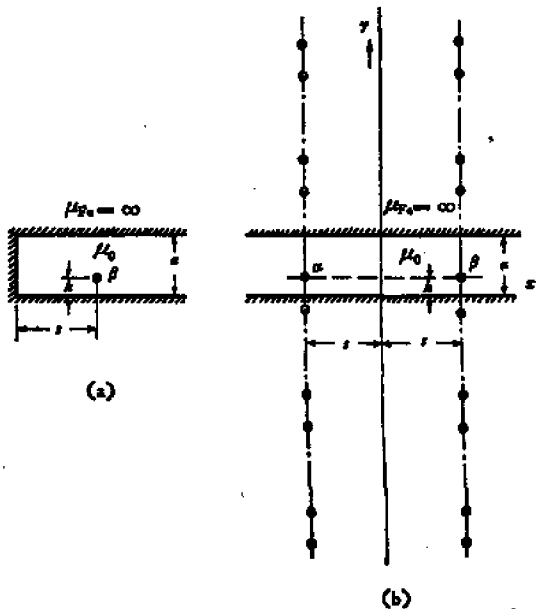


图 2-16　置于电枢槽内的线电线（$\mu_{Fe}=\infty$）
（a）实际图形；（b）原像和镜像

若边界面为四个垂直交接的铁磁平面，如图 2-17 所示，则镜像将具有沿 x 方向和 y 方向的双重周期性．此时总磁位 A_z 应为原像和所有镜像所生磁位的总和．

（四）边界面为铁磁平面时载流回路的镜像

载流回路在铁磁平面外部时　图 2-18(a)表示在铁磁平面外边有一载流回路

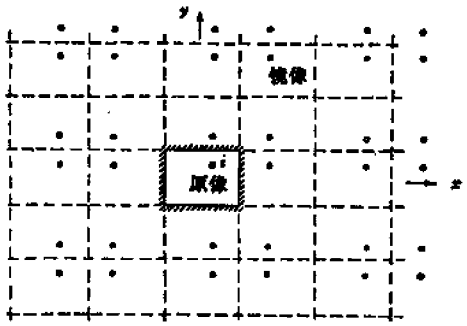


图 2-17　边界面为四个垂直交接的铁磁平面时线电流的镜像（$\mu_{Fe}=\infty$）

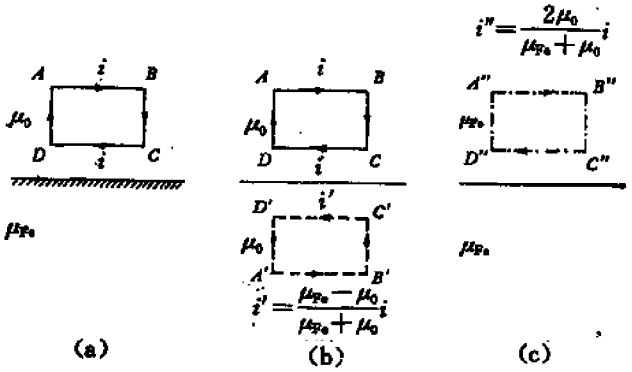


图 2-18　矩形载流回路在铁心外部时的镜像

(a) 实际回路；(b) 计算空气中磁场时回路的镜像；(c) 计算铁内磁场时的合成电流

$ABCD$. 设 $\mu_1=\mu_0$，$\mu_2=\mu_{Fe}$，回路中的电流为 i，根据前面导出的结果，可知在计算空气中的磁场时 [图 2-18(b)]：

(1) 整个空间的磁导率可认为是 μ_0，回路的镜像 $A'B'C'D'$ 位于边界的另一边，镜像电流 $i'=\dfrac{\mu_{Fe}-\mu_0}{\mu_{Fe}+\mu_0}i$；

(2) 与铁磁平面相平行的部分 AB 和 CD，镜像电流的方向与原电流一致；与铁磁平面相垂直的部分 DA 和 BC，镜像电流的方向与原电流相反.

在计算铁心内磁场时 [图 2-18(c)]：

(1) 整个空间的磁导率可认为是 μ_{Fe}；

(2) 磁场可用位于原像位置、方向与原电流相同、大小为 $i''=\dfrac{2\mu_0}{\mu_{Fe}+\mu_0}i$ 的合成虚拟电流来计算.

若 $\mu_{Fe}=\infty$，铁磁平面为一标量等磁位面，表面处磁感强度仅有法向分量，铁内磁场强度为零. 若载流回路中部分导体为倾斜，可以把导体分解成平行和垂直于铁磁平面的两个分量来分析.

载流回路在铁磁平面内部时　图 2-19(a)表示载流回路在铁磁平面内部的情况. 设 $\mu_1=\mu_{Fe}$，$\mu_2=\mu_0$，可知在计算铁内磁场时 [图 2-19(b)]：

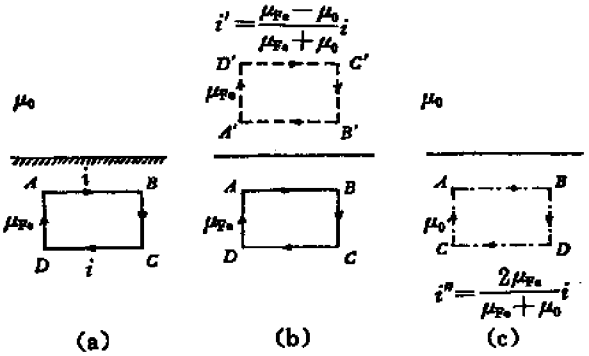


图 2-19　矩形载流回路在铁心内部时的镜像

(a) 实际回路；(b) 计算铁内磁场时回路的镜像；(c) 计算空气中磁场时的合成电流

(1) 整个空间的磁导率可认为是 μ_{Fe}，镜像位于边界的另一边，镜像电流 $i'=\frac{\mu_{Fe}-\mu_0}{\mu_{Fe}+\mu_0}i$；

(2) 与铁磁平面相平行的电流，其镜像与原电流反方向；与铁磁平面相垂直的电流，其镜像与原电流同方向.

在计算空气内的磁场时 [图 2-19(c)]：

(1) 整个空间的磁导率认为是 μ_0；

(2) 磁场可用位于原像位置、与原电流同方向、大小为 $i''=\frac{2\mu_{Fe}}{\mu_{Fe}+\mu_0}i$ 的合成虚拟电流来计算.

若 $\mu_{Fe}=\infty$，则铁磁平面的表面与磁力线重合.

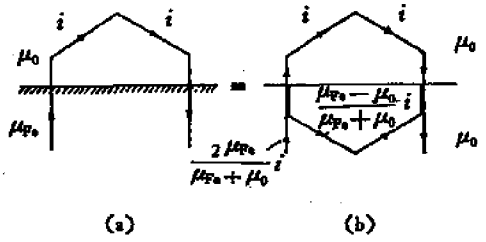


图 2-20　电机中线圈端部的镜像

(a) 实际线圈；(b) 计算端部磁场时原电流和镜像电流

载流回路部分在铁外、部分在铁内时　电机的线圈，其有效部分嵌在铁心槽内，端部则在铁心外边，它属于部分在铁内、部分在铁外的载流回路. 如果忽略定、转子之间空气隙的影响①，而把铁心作为一个无穷大的铁磁平面时，可得图 2-20 所示的简化图形.

在计算线圈端部空气中的磁场时，一方面要考虑端部电流 i 的作用，镜像电流 $\frac{\mu_{Fe}-\mu_0}{\mu_{Fe}+\mu_0}i$ 的作用，同时还要考虑嵌在铁心内部线圈直线部分的作用，在铁心外部其作用相

① 气隙的影响将在第十章中研究.

当于$\frac{2\mu_{Fe}}{\mu_{Fe}+\mu_0}i$，如图 2-20(b)所示.

与前两种情况相比较，这种情况的特点是：由于载流线圈穿过了交界面，所以不论μ_{Fe}是否等于无穷大，在铁心和空气交界面处，磁场强度既有切向分量，又有法向分量.

2-4 边界面为铁磁圆柱面时线电流的镜像[2,3,14]

实际电机的定、转子表面均为铁磁圆柱面，下面来研究边界为圆柱面时线电流的镜像.

(一) 线电流在铁磁圆柱之外时

设铁磁圆柱的半径为 R_0，中心与坐标原点重合，磁导率 $\mu_2=\mu_{Fe}=\infty$；线电流 i 在圆柱外面的区域 1 中，$\mu_1=\mu_0$，用极坐标表示时线电流的位置为 $(a, 0)$，如图 2-21 所示.

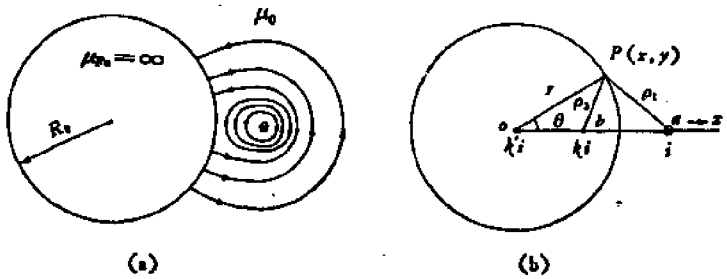


图 2-21 线电流在铁磁圆柱外面时的镜像 ($\mu_{Fe}=\infty$)
(a) 实际图形；(b) 原像和镜像

由于 $\mu_{Fe}=\infty$，所以磁力线将垂直于圆柱表面. 从磁力线的会聚趋势和对称性来看，圆柱磁化的效果与柱内某一点 $(b, 0)$ 处的线电流 ki 和原点处的线电流 $k'i$ 这两个镜像电流的效果相当. 现在来考察，能否找到适当的 b 和 k、k'，使原像和镜像所产生的 A_z 在柱外区域满足原来的泊松方程和边界条件：

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 i\delta(x-a, y), \qquad r > R_0 \text{ 时} \tag{2-55}$$

$$B_\theta = 0, \qquad \text{当 } r = R_0 \text{ 和 } r = \infty \text{ 时} \tag{2-56}$$

用极坐标表示时，原像 i 和镜像 ki、$k'i$ 在 P 点所产生的向量磁位 A_z 为 [图 2-21 (b)]：

$$\begin{aligned} A_z &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\{\ln\rho_1^2 + k\ln\rho_2^2 + k'\ln r^2\} + C \\ &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\{\ln[r^2+a^2-2ar\cos\theta] + k\ln[r^2+b^2-2br\cos\theta] + k'\ln r^2\} + C \end{aligned} \tag{2-57}$$

切向磁感强度 B_θ 为

$$B_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[\frac{r-a\cos\theta}{r^2+a^2-2ar\cos\theta} + k\frac{r-b\cos\theta}{r^2+b^2-2br\cos\theta} + k'\frac{1}{r}\right] \tag{2-58}$$

不难看出，当$r>R_0$时，式(2-57)是满足原泊松方程的；此外，在$r\to\infty$时，式（2-58）满足$B_\theta=0$. 但是要使$r=R_0$时，无论θ是什么值，B_θ均要等于零，就要求

$$\frac{R_0-a\cos\theta}{R_0^2+a^2-2aR_0\cos\theta}+k\frac{R_0-b\cos\theta}{R_0^2+b^2-2bR_0\cos\theta}+\frac{k'}{R_0}=0 \tag{2-59}$$

即要求

$$\left.\begin{aligned}&k=1,\quad k'=-1,\\&ab=R_0^2\quad 或 b=\frac{R_0^2}{a}\end{aligned}\right\} \tag{2-60}$$

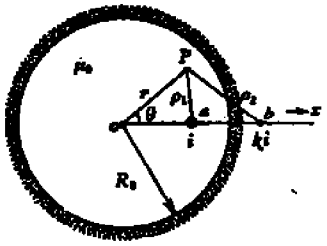
上式表明：$\mu_{Fe}=\infty$的圆柱边界面，其效果可以用两个镜像电流来代替，一个位于$\left(\frac{R_0^2}{a},\ 0\right)$处，其值为$i$；另一个位于原点，其值为$-i$.

若圆柱的磁导率$\mu_{Fe}\neq\infty$，根据$r=R_0$处的边界条件可以证明，圆柱外（区域1）的磁场可以用处于均匀介质μ_1、位于$\frac{R_0^2}{a}$处的镜像电流$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}i$和另一位于原点的第二镜像电流$-\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}i$和原像这三个电流来计算；圆柱内（区域2）的磁场可用均匀介质μ_2、位于原像位置的合成虚拟电流$\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}i$来计算.

（二）线电流在铁磁圆柱之内时

若线电流在铁磁圆柱之内（a，0）处，区域1的磁导率$\mu_1=\mu_0$，区域2（铁心）的磁导率$\mu_2=\mu_{Fe}=\infty$，如图2-22所示；则可设想用位于（b，0）处的镜像电流ki来代替边界面的影响. 此时向量磁位A_z的试解为：

$$\begin{aligned}A_z&=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\{\ln\rho_1^2+k\ln\rho_2^2\}+C\\&=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\{\ln[r^2+a^2-2ar\cos\theta]+k\ln[r^2+b^2-2br\cos\theta]\}+C\end{aligned} \tag{2-61}$$



（$\mu_{Fe}=\infty$）

图2-22 线电流在铁磁圆柱之内时的镜像

在圆柱内部，$r<R_0$，A_z应满足原来的泊松方程和边界条件：

$$\nabla^2 A_z=-\mu_0 i\delta(x-a,y) \tag{2-62}$$

$$\left.\begin{aligned}&H_\theta=\frac{i}{2\pi R_0},\quad r=R_0\text{ 时}\\&B=\text{有限值},\quad r<R_0\text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{2-63}$$

不难看出，式(2-61)的试解满足泊松方程(2-62)．对式(2-61)求导，可得

$$H_\theta = \frac{i}{2\pi}\left[\frac{r-a\cos\theta}{r^2+a^2-2ar\cos\theta} + k\frac{r-b\cos\theta}{r^2+b^2-2br\cos\theta}\right] \tag{2-64}$$

要使此 H_θ 在 $r=R_0$ 处满足边界条件(2-63)，就要求

$$\frac{R_0-a\cos\theta}{R_0^2+a^2-2aR_0\cos\theta} + k\frac{R_0-b\cos\theta}{R_0^2+b^2-2bR_0\cos\theta} = \frac{1}{R_0} \tag{2-65}$$

亦即要求

$$k=1, \qquad ab=R_0^2 \tag{2-66}$$

上式说明，在计算圆柱内部磁场时，镜像电流的大小为 i，位置在距离原点 $\frac{R_0^2}{a}$ 处．

若 $\mu_{Fe}\neq\infty$，不难证明，圆柱内部磁场可用均匀介质 μ_1 内、原像和位于 b 点 $\left(ab=\frac{R_0^2}{a}\right)$ 的镜像电流 $\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}i$ 来计算；圆外磁场则可用处于均匀介质 μ_2、位于 a 点的合成电流 $\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}i$ 和位于原点的另一虚拟电流 $\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}i$ 来计算．

图 2-23 表示 $\frac{\mu_2}{\mu_1}=9$，载流导体在圆柱内部时磁场的分布图．

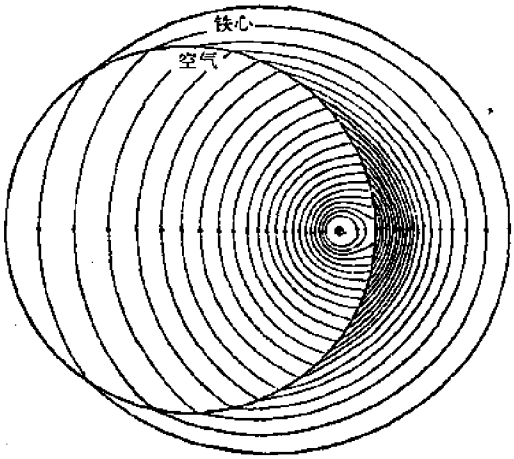


图 2-23　线电流在圆柱内部时的磁场分布$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}=9\right)$

2-5　具有铁磁边界时拉普拉斯方程的直接求解[3,12—18]

如前所述，在载流区外，标量磁位和向量磁位都满足拉普拉斯方程．在直角坐标系和极坐标系中，拉普拉斯方程可用分离变量法来求解．

（一）直角坐标系

在二维直角坐标系中，拉普拉斯方程为：

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2-67}$$

式中 u 既可以是标量磁位 Ω，亦可以是向量磁位 A_z，视解题需要而定.

设 u 的解答为

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \tag{2-68}$$

其中 X 仅为 x 的函数，Y 仅为 y 的函数. 把上式代入式 (2-67)，可得

$$\nabla^2 u = X''Y + Y''X = 0$$

或

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \tag{2-69}$$

式中 X''和 Y''分别为 X 对 x、Y 对 y 的二阶导数. 由于$\frac{X''}{X}$仅为 x 的函数，$\frac{Y''}{Y}$仅为 y 的函数，故要使式 (2-69) 成立，唯一的可能性是

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -m_k^2 \tag{2-70}$$

式中 m_k 为一任意常数. 由此可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dx^2} + m_k^2 X = 0 \\ \frac{d^2Y}{dy^2} - m_k^2 Y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-71}$$

这样，拉普拉斯方程就分解成二个常微分方程.

显然，当 $m_k \neq 0$ 时，式 (2-71) 的解答为

$$\left.\begin{aligned} X_k &= A_k \cos m_k x + B_k \sin m_k x \\ Y_k &= C_k \mathrm{sh} m_k y + D_k \mathrm{ch} m_k y \end{aligned}\right\} \tag{2-72}$$

于是可得特解 u_k 为

$$u_k = X_k Y_k = (A_k \cos m_k x + B_k \sin m_k x)(C_k \mathrm{sh} m_k y + D_k \mathrm{ch} m_k y) \tag{2-73}$$

若 $m_k = 0$，则式(2-71)的解答为

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= k_1 x + k_2 \\ Y_0 &= k_3 y + k_4 \end{aligned}\right\} \tag{2-74}$$

于是，可得另一组特解 u_0 为

$$\begin{aligned} u_0 &= X_0 Y_0 = (k_1 x + k_2)(k_3 y + k_4) \\ &= A_0 xy + B_0 x + C_0 y + D_0 \end{aligned} \tag{2-75}$$

最后，把所有的特解线性叠加，可得拉普拉斯方程的通解为

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos m_k x + B_k \sin m_k x)(C_k \mathrm{sh} m_k y + D_k \mathrm{ch} m_k y) \\ &+ A_0 xy + B_0 x + C_0 y + D_0 \end{aligned} \tag{2-76}$$

式中 A_k、B_k、C_k、D_k、A_0、B_0、C_0、D_0 和 m_k 为任意常数，由具体问题的边界条件来确定.

式(2-76)中 u_k 的解答对 x 是周期性函数，对 y 是双曲线函数. 亦可令式(2-70)的右端项等于 m_k^2，此时 u 将变成

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\mathrm{ch}m_kx+B_k\mathrm{sh}m_kx)(C_k\sin m_ky+D_k\cos m_ky)$$
$$+A_0xy+B_0x+C_0y+D_0 \tag{2-77}$$

即 u_k 对 y 是周期性函数，对 x 是双曲线函数. 具体来说是选择式 (2-76) 还是 (2-77) 作为解答，应当根据问题的实际情况来判定.

这里要注意，拉普拉斯方程的特解有无限多个，选择的灵活性很大；但是这决不意味着问题的解答具有任意性. 恰恰相反，对于具体问题来说，如果选定的特解或特解的组合满足给定的边界条件，则解答将是唯一的.

(二) 极坐标系

在极坐标系中，拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0 \tag{2-78}$$

上式亦可用分离变量法求解. 设

$$u(r,\theta)=R(r)\cdot\Theta(\theta) \tag{2-79}$$

其中 R 仅为 r 的函数，Θ 仅为 θ 的函数. 把上式代入式 (2-78)，可得

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=m^2 \tag{2-80}$$

式中 R''和 R'分别为 R 对 r 的二阶和一阶导数；Θ''为 Θ 对 θ 的二阶导数；m 为任意常数. 由此可得

$$\left.\begin{aligned}r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-m^2R=0\\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+m^2\Theta=0\end{aligned}\right\} \tag{2-81}$$

这样，原来的方程 (2-78) 就分解成两个常微分方程.

当 $m\neq0$ 时，式(2-81)的解答为

$$\left.\begin{aligned}R_m=A_mr^m+B_mr^{-m}\\ \Theta_m=C_m\cos m\theta+D_m\sin m\theta\end{aligned}\right\} \tag{2-82}$$

当 $m=0$ 时，式 (2-81) 的解答为

$$\left.\begin{aligned}R_0=A_0\ln r+B_0\\ \Theta_0=C_0\theta+D_0\end{aligned}\right\} \tag{2-83}$$

于是，极坐标系中拉普拉斯方程的通解为

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}R_m\Theta_m$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}(A_mr^m+B_mr^{-m})(C_m\cos m\theta+D_m\sin m\theta)+(A_0\ln r+B_0)(C_0\theta+D_0) \tag{2-84}$$

式中 A_m、B_m、C_m、D_m，A_0、B_0、C_0、D_0 为任意常数；由于电机内的磁场通常都是 θ 角的周期性函数，所以 m 是正整数；它们的值均由具体问题的边界条件来确定.

分析表明，式 (2-84) 中的第一部分 $\sum_{m=1}^{\infty}$ 项实质上表示磁化的铁磁边界的作用；第二

部分 $A_0 \ln r$ 和 $C_0\theta$ 项则表示线电流的作用（见第 2-9 节）. 若在所研究的区域内没有线电流，则第二部分等于零.

下面研究电机中的几个实例.

2-6 主极磁场正弦分布时同步发电机的极靴外形[14,15,16]

在设计同步发电机时，常常希望发电机的空载电势波形接近于正弦形，为此要求主极磁场在电枢表面为正弦分布. 下面来研究怎样设计主极极靴外形，以使主极磁场成为正弦分布.

空载时电枢电流为零，气隙磁场为无旋场，此时标量磁位 Ω 满足拉普拉斯方程. 设电枢表面为光滑，电枢直径很大，电枢表面可近似作为平面考虑，此时可选用直角坐标系来求解，如图 2-24 所示.

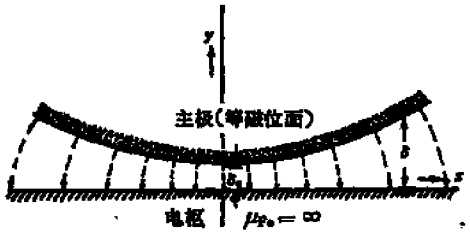


图 2-24 主极磁场正弦分布时极靴和气隙的形状

在二维直角坐标系中，拉普拉斯方程的解为：

$$\Omega=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos m_kx+B_k\sin m_kx)(C_k\,\mathrm{sh}\,m_ky+D_k\,\mathrm{ch}\,m_ky)$$

设电枢和主极铁心的磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$，则本问题的边界条件为：

1. 电枢和主极表面均为标量等磁位面. 若电枢表面的磁位设为零，主极设为 Ω_0，则

$$\left.\begin{aligned} y=0\text{ 时}, &\quad \Omega=0\\ y=\delta\text{ 时}, &\quad \Omega=\Omega_0\end{aligned}\right\} \tag{2-85}$$

2. 在电枢表面，磁场为正弦分布，即

$$y=0\text{ 时}, \qquad B_y=-B_f\cos\frac{\pi}{\tau}x \tag{2-86}$$

根据边界条件 1 中的第一式，可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos m_kx+B_k\sin m_kx)D_k=0$$

所以

$$D_k=0 \tag{2-87}$$

于是

$$\Omega=\sum_{k=1}^{\infty}(A'_k\cos m_kx+B'_k\sin m_kx)\ \mathrm{sh}\,m_ky \tag{2-88}$$

根据边界条件 2 可知

$$B_{y(y=0)} = -\mu_0\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$= -\mu_0\left[\sum_{k=1}^{\infty}(A_k'\cos m_k x + B_k'\sin m_k x)m_k \operatorname{ch} m_k y\right]_{y=0}$$

$$= -B_f\cos\frac{\pi}{\tau}x$$

所以

$$A_k' = \frac{B_f}{\mu_0 m_k},\quad m_k = \frac{\pi}{\tau},\quad B_k' = 0 \tag{2-89}$$

把 A_k'、B_k' 和 m_k 代入式 (2-88)，可得

$$\Omega = \frac{B_f\tau}{\mu_0\pi}\cos\frac{\pi}{\tau}x\ \operatorname{sh}\frac{\pi}{\tau}y \tag{2-90}$$

$$\left.\begin{aligned} B_x &= -\mu_0\frac{\partial \Omega}{\partial x} = B_f\sin\frac{\pi}{\tau}x\ \operatorname{sh}\frac{\pi}{\tau}y \\ B_y &= -\mu_0\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -B_f\cos\frac{\pi}{\tau}x\ \operatorname{ch}\frac{\pi}{\tau}y \end{aligned}\right\} \tag{2-91}$$

上面是用标量磁位求解的. 如用向量磁位 A_z 求解，亦可得到与式 (2-91) 相同的结果.

再利用边界条件 1 中的第二式，可得主极表面 $y=\delta$ 处的磁位

$$\Omega_0 = \frac{B_f\tau}{\mu_0\pi}\cos\frac{\pi}{\tau}x\ \operatorname{sh}\frac{\pi}{\tau}\delta \tag{2-92}$$

在主极中心最小气隙处，$x=0$，$y=\delta_0$，

$$\Omega_0 = \frac{B_f\tau}{\mu_0\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi}{\tau}\delta_0 \tag{2-93}$$

把上面这两个式子相除，可得

$$\operatorname{sh}\frac{\pi}{\tau}\delta = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{\tau}\delta_0}{\cos\dfrac{\pi}{\tau}x}$$

或

$$\delta = \frac{\tau}{\pi}\operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{\tau}\delta_0}{\cos\dfrac{\pi}{\tau}x}\right) \tag{2-94}$$

式(2-94)即为获得正弦气隙磁场时气隙的方程式.

2-7 正弦电枢磁动势在均匀气隙内产生的磁场[8,14]

设气隙为均匀，其值为 δ_0，定子边加有 ν 次谐波磁动势 $F_\nu\sin\nu\frac{\pi}{\tau}x$，如图 2-25 所示，现求气隙内的磁场分布.

为简化计，设 $\mu_{Fe}=\infty$；再把定子载流导体作为无限薄的电流片来处理，该电流片在

定、转子之间形成一个 $F_\nu \sin\nu\frac{\pi}{\tau}x$ 的标量磁位差. 这样，气隙内的磁场为无旋场，问题简化成为拉普拉斯方程的第一类边值问题. 此时气隙内标量磁位 Ω 的解答可写成

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos m_k x + B_k\sin m_k x)(C_k\mathrm{sh}m_k y + D_k\mathrm{ch}m_k y)$$

本问题的边界条件是：

1. 转子的标量磁位设为零，即

$$y = \delta_0 \text{ 时，} \quad \Omega = 0 \qquad (2\text{-}95)$$

2. 定子表面磁位按正弦分布，即

$$y = 0 \text{ 时，} \Omega = F_\nu \sin\nu\frac{\pi}{\tau}x \qquad (2\text{-}96)$$

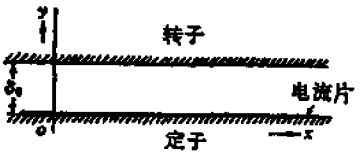


图 2-25　把定子载流导体作为电流片来处理

由边界条件 2 可知，

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos m_k x + B_k\sin m_k x)D_k = F_\nu \sin\nu\frac{\pi}{\tau}x$$

所以

$$A_k = 0 \qquad (2\text{-}97)$$

$$\left.\begin{aligned} B_k \cdot D_k &= 0, && \text{当 } m_k \neq \nu\frac{\pi}{\tau} \text{ 时} \\ B_k \cdot D_k &= F_\nu, && \text{当 } m_k = \nu\frac{\pi}{\tau} \text{ 时} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}98)$$

于是

$$\Omega = \left(C\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}y + F_\nu \mathrm{ch}\nu\frac{\pi}{\tau}y\right)\sin\nu\frac{\pi}{\tau}x \qquad (2\text{-}99)$$

式中 C 为一常数，可由边界条件 1 确定.

由边界条件 1 可知

$$\left(C\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0 + F_\nu \mathrm{ch}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0\right)\sin\nu\frac{\pi}{\tau}x = 0$$

所以

$$C = -F_\nu\frac{\mathrm{ch}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0}{\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0} \qquad (2\text{-}100)$$

把 C 代入式 (2-99)，可得

$$\Omega = F_\nu\frac{\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}(\delta_0 - y)}{\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0}\sin\nu\frac{\pi}{\tau}x \qquad (2\text{-}101)$$

磁感强度则为

$$\left.\begin{aligned} B_x &= -\mu_0\nu\frac{\pi}{\tau}F_\nu\frac{\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}(\delta_0-y)}{\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0}\cos\nu\frac{\pi}{\tau}x \\ B_y &= \mu_0\nu\frac{\pi}{\tau}F_\nu\frac{\mathrm{ch}\nu\frac{\pi}{\tau}(\delta_0-y)}{\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0}\sin\nu\frac{\pi}{\tau}x \end{aligned}\right\} \tag{2-102}$$

ν 次谐波的单位面积气隙磁导 λ_ν 为

$$\lambda_\nu=\frac{B_{y\nu}(y=\delta_0)}{F_\nu}=\mu_0\frac{\nu\frac{\pi}{\tau}}{\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0}=\frac{\mu_0}{\delta_0}\frac{1}{k_{\delta\nu}} \tag{2-103}$$

式中 $k_{\delta\nu}$ 为 ν 次谐波磁场的衰减因数

$$k_{\delta\nu}=\frac{\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0}{\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0} \tag{2-104}$$

从式(2-104)可以看出，仅当 δ_0 比 ν 次谐波磁场的极距 $\frac{\tau}{\nu}$ 小很多时，$\mathrm{sh}\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0\approx\nu\frac{\pi}{\tau}\delta_0$，$k_{\delta\nu}\approx1$，此时 λ_ν 才等于 $\frac{\mu_0}{\delta_0}$；若 δ_0 与 $\frac{\tau}{\nu}$ 相近，则 $k_{\delta\nu}>1$，磁场通过气隙时将有衰减，这相当于有效气隙增大、λ_ν 减小. 图 2-26 表示 $k_{\delta\nu}=f\left(\nu\frac{\delta_0}{\tau}\right)$.

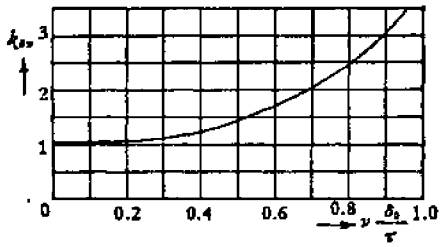


图 2-26 ν 次谐波磁场的衰减因数

2-8 气隙磁场正弦分布时电枢铁心内的空载磁场[14—16]

(一) 电枢表面光滑时

空载时，电枢电流为零，同步电机电枢铁心内的磁场为一无旋场. 设电枢为转子，电枢表面光滑，其内、外半径分别为 R_2 和 R_1；铁心的磁导率 μ_{Fe}=常值，电枢表面磁场为正弦分布，电机的极对数为 p. 下面来研究电枢铁心内的磁场分布.

电枢铁心内的标量磁位 Ω 满足拉普拉斯方程，用极坐标表达时，其解答为：

$$\Omega=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m r^m+B_m r^{-m})(C_m\cos\ m\theta+D_m\sin\ m\theta)$$

本问题的边界条件为：

1. 电枢表面处磁场为正弦分布，即

$$r=R_1\text{ 时},\quad B_r=B_1\cos p\theta \tag{2-105}$$

2. 在电枢铁心内缘处，磁场的径向分量为零，即

$$r=R_2\text{ 时},\quad B_r=0 \tag{2-106}$$

此外，整个磁场分布应对 $\theta=0$ 的轴线对称，即

$$\Omega(r,\theta)=\Omega(r,-\theta) \tag{2-107}$$

由式（2-107）可知，磁位是 θ 的偶函数，由此可知 $D_m=0$. 于是 Ω 的解答可简化成

$$\Omega=\sum_{m=1}^{\infty}(A'_m r^m+B'_m r^{-m})\cos m\theta \tag{2-108}$$

由边界条件 1 可知，

$$-\mu_{Fe}\sum_{m=1}^{\infty}(mA'_m R_1^{m-1}-mB'_m R_1^{-m-1})\cos m\theta=B_1\cos p\theta$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}&B'_m R_1^{-m-1}-A'_m R_1^{m-1}=0,\quad\text{当 } m\neq p\text{ 时}\\&B'_m R_1^{-m-1}-A'_m R_1^{m-1}=\frac{B_1}{m\mu_{Fe}},\quad\text{当 } m=p\text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{2-109}$$

由边界条件 2 可知

$$B'_m R_2^{-m-1}-A'_m R_2^{m-1}=0 \tag{2-110}$$

联解式（2-109）和（2-110），可知

$$\left.\begin{aligned}&A'_m=B'_m=0,\quad\text{当 } m\neq p\text{ 时}\\&A'_m=\frac{B_1}{\mu_{Fe}p}\frac{R_1^{1-p}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2p}-1},\quad B'_m=\frac{B_1}{\mu_{Fe}p}\frac{R_1^{1+p}}{1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-2p}},\quad\text{当 } m=p\text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{2-111}$$

把求出的各个系数代入式（2-108），可得铁心内的标量磁位 Ω 为

$$\Omega=\frac{B_1R_1}{\mu_{Fe}p}\frac{1}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{p}-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-p}}\left[\left(\frac{r}{R_2}\right)^{p}+\left(\frac{r}{R_2}\right)^{-p}\right]\cos p\theta \tag{2-112}$$

磁场强度可从 $H_r=-\frac{\partial\Omega}{\partial r}$，$H_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$ 求出. 据此即可画出铁心内的等位线和磁力线. 图 2-27 表示一台四极电机的电枢铁心磁场分布图.

电枢铁心内 A、B 两点（$r=R_1$，$p\theta=0°$ 和 180°）间的标量磁位差 Ω_{AB} 为

$$\Omega_{AB}=\Omega_A-\Omega_B=\frac{2B_1R_1}{\mu_{Fe}p}\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{p}+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-p}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{p}-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-p}} \tag{2-113}$$

设 B_a 为电枢铁心内的平均磁感强度，H_a 为对应的磁场强度，h_a 为电枢轭高，τ 为极距，l_a 为铁心的轴向长度，则 $B_a h_a l_a=\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}B_1\tau l_a$，所以

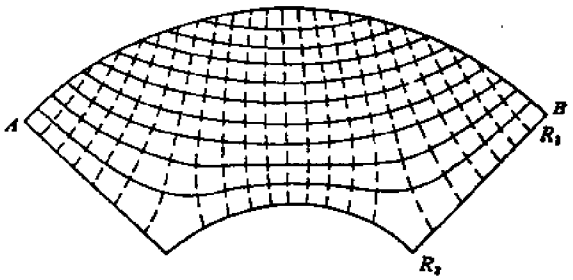


图 2-27　空载时电枢铁心内的磁场分布（$2p=4$）
——磁力线；…等磁位线

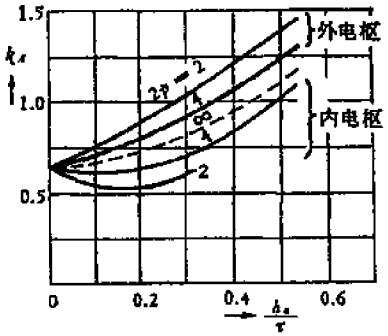


图 2-28　$k_A=f\left(\frac{h_a}{\tau}\right)$

$$B_1=\frac{\pi h_a}{\tau}B_a=\frac{\pi h_a}{\tau}\mu_{Fe}H_a \tag{2-114}$$

把 B_1 代入式(2-113)，再考虑到 $\tau=\frac{\pi R_1}{p}$，可得

$$\Omega_{AB}=2\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^p+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-p}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^p-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-p}}\frac{h_a}{\tau}\tau H_a=k_A\tau H_a \tag{2-115}$$

式中

$$k_A=2\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^p+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-p}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^p-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-p}}\frac{h_a}{\tau} \tag{2-116}$$

由式(2-115)可知，若气隙磁场为正弦分布，空载磁路计算时，电枢铁心内的磁位降可用平均磁场强度 H_a 乘以等效磁路长度 $k_A\tau$ 来计算．图 2-28 表示 $2p=2$，4，…，∞时的 $k_A=f\left(\frac{h_a}{\tau}\right)$．

（二）开槽的影响

实际的电枢铁心上开有齿、槽，此时应把轭部和齿、槽部分分开处理．在轭部铁心内，标量磁位仍满足拉普拉斯方程；在齿、槽部分，由于有空气和铁心两种介质，情况比较复杂．为简化分析，工程上常用 x 和 y 方向具有不同磁导率的各向异性介质去近似模拟（图 2-29）．

设电枢槽形为开口槽，槽宽为 b_s，齿宽为 b_z，齿距为 t_z，$t_z=b_s+b_z$；等效的各向异性介质沿 x 方向和 y 方向的磁导率分别为 μ_x 和 μ_y．对 x 方向，磁通经过齿、槽时磁路为串联，故

$$\frac{b_s+b_z}{\mu_x}=\frac{b_s}{\mu_0}+\frac{b_z}{\mu_{Fe}}$$

由此可求出

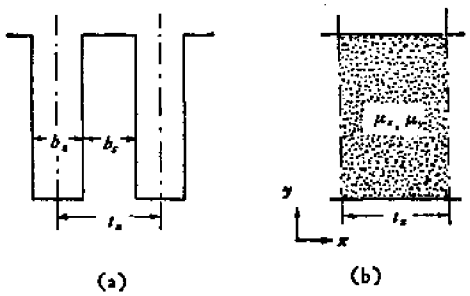


图 2-29 用各向异性介质去近似模拟齿、槽区域
(a) 实际齿、槽；(b) 各向异性介质

$$\mu_x = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0}\frac{b_s}{t_z} + \frac{1}{\mu_{Fe}}\frac{b_z}{t_z}} \tag{2-117}$$

对 y 方向，磁通通过齿、槽时磁路为并联，故

$$\mu_y\ (b_s+b_z) = \mu_0 b_s + \mu_{Fe} b_z$$

由此可得

$$\mu_y = \mu_0 \frac{b_s}{t_z} + \mu_{Fe}\frac{b_z}{t_z} \tag{2-118}$$

引入各向异性介质后，在齿、槽区内，标量标位 Ω 应满足准拉普拉斯方程

$$\mu_x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0 \tag{2-119}$$

这样，分别列出轭部和齿、槽部分标量磁位的通解，再利用边界条件确定其中的任意常数，即可得到最终的解答.

2-9 线电流的影响[2,3,8,14,15]

前已述及，位于原点的线电流所产生的标量磁位 $\Omega=\frac{i}{2\pi}\theta$，向量磁位 $A_z=-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln r$；所以在极坐标中，$m=0$ 时拉普拉斯方程的特解 $A_0\ln r$ 和 $C_0\theta$ 就表示线电流的影响.

计及线电流和铁磁边界的影响时，二维标量磁位拉普拉斯方程的通解为

$$\Omega = \sum_{m=1}^{\infty}(A_m r^m + B_m r^{-m})(C_m\cos m\theta + D_m \sin m\theta) + \frac{i}{2\pi}\alpha \tag{2-120}$$

二维向量磁位拉普拉斯方程的通解为

$$A_z = \sum_{m=1}^{\infty}(A'_m r^m + B'_m r^{-m})(C'_m\cos m\theta + D'_m \sin m\theta) - \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho \tag{2-121}$$

式中 α 和 ρ 为以线电流所在位置 O' 作为原点时，场点 P 的局部坐标（图 2-30）. 若以 O 点为原点，P 点的整体坐标为 r，θ；此时 α 和 ρ 可展开成 θ 和 r 的无穷级数：

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{a}{r}\right)^m \sin\, m\theta, \qquad \text{当 } r > a \text{ 时;} \\ \alpha &= \pi - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m \sin\, m\theta, \qquad \text{当 } r < a \text{ 时;} \\ \alpha &= \frac{\theta+\pi}{2}, \qquad \text{当 } r = a \text{ 时.} \end{aligned}\right\} \tag{2-122}$$

$$\left.\begin{aligned} \ln\rho &= \ln r - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{a}{r}\right)^m \cos\, m\theta, \qquad \text{当 } r > a \text{ 时;} \\ \ln\rho &= \ln a - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos\, m\theta, \qquad \text{当 } r < a \text{ 时;} \\ \ln\rho &= \ln a - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos\, m\theta, \qquad \text{当 } r = a \text{ 时.} \end{aligned}\right\} \tag{2-123}$$

下面举例说明式（2-120）和（2-121）的应用.

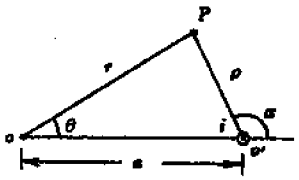


图 2-30　α，ρ 与 θ，r 的关系

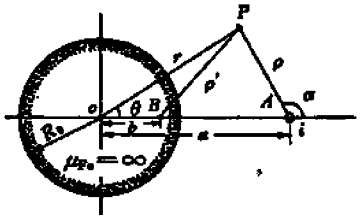


图 2-31　线电流在铁磁圆柱外部时

图 2-31 表示位于铁磁圆柱外的一根长直线电流，现求空气中的向量磁位 A_z. 此问题前面已用镜像法研究过，现在再用求解拉普拉斯方程的办法求解. 计及线电流的影响时，拉普拉斯方程的通解为

$$A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}(A'_m r^m + B'_m r^{-m})(C'_m \cos m\theta + D'_m \sin m\theta)$$

由于整个磁场与 x 轴对称，$A_z(r,\theta)=A_z(r,-\theta)$，故上式中的 $D'_m=0$. 此外，当 $r\to\infty$ 时，$B_\theta=-\dfrac{\partial A_z}{\partial r}$ 应趋近于零，故 $A'_m=0$. 于是 A_z 简化为

$$A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} B_m r^{-m}\cos m\theta \tag{2-124}$$

设 $\mu_{r_2}=\infty$，则本题的边界条件为：在圆柱表面 $r=R_0$ 处，$B_\theta=0$；即

$$r = R_0 \text{ 时}, \qquad \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0 \tag{2-125}$$

当 $r=R_0$ 时，$\ln\rho$ 可展开成 $\ln\rho=\ln a-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m\cos m\theta$，于是由式(2-125)可得

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}m\left(\frac{R_0}{a}\right)^{m-1}\frac{1}{a}\cos m\theta - \sum_{m=1}^{\infty} B_m m R_0^{-m-1}\cos m\theta = 0$$

或

$$B_m = \frac{\mu_0 i}{2\pi m}\frac{R_0^{2m}}{a^m} \tag{2-126}$$

再把 B_m 代入式(2-124)，最后可得

$$A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho + \frac{\mu_0 i}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{R_0^{2m}}{a^m}\right)r^{-m}\cos m\theta \tag{2-127}$$

若 b 和 a 互成倒量（图 2-31），$ab=R_0^2$，则 $b<R_0$，即 b 点在圆内. 设 ρ' 为 B 点与 P 点间的距离，在 $r>b$ 时有

$$\begin{aligned}\ln\rho' &= \ln r - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{r}\right)^m\cos m\theta \\ &= \ln r - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{R_0^{2m}}{a^m}\right)r^{-m}\cos m\theta\end{aligned} \tag{2-128}$$

于是，式(2-127)可改写成

$$A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho + \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\ln r - \ln\rho') \tag{2-129}$$

不难看出，上式与镜像法所得的结果一致.

本题若用标量磁位 Ω 求解，亦可得到相同的结果.

2-10 载流导体在电机气隙中产生的磁场[2,14]

前面我们用镜像法导出了载流导体在平行的铁磁平面中所产生的磁场. 现在用直接求解拉普拉斯方程的办法来求载流导体在电机气隙中所形成的磁场.

（一）单根线电流在气隙中所产生的磁场

设定子的内半径和转子外半径分别为 R_1 和 R_0，气隙为均匀，线电流在 $r=a$，$\theta=0$ 处；定、转子铁心的磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$，如图 2-32 所示. 现研究该电流在气隙内所产生的磁场.

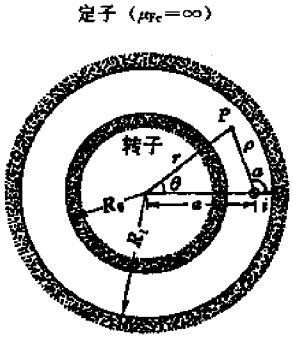


图 2-32 气隙中的单根线电流

由于气隙中有线电流，所以在气隙内 P 点处向量磁位 A_z 的通解为：

$$A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m r^m + B_m r^{-m})\cos m\theta \tag{2-130}$$

由于气隙磁场与 $\theta=0$ 的轴线对称，所以上式中仅包括 $\cos m\theta$ 项.

本题的边界条件为：

1. 在转子表面，磁场的切向分量为零；即

$$r = R_0 \text{ 时}, \quad B_\theta = 0 \tag{2-131}$$

2. 在定子表面，磁场的切向分量为一常值；

$$r = R_1 \text{ 时}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi R_1} \tag{2-132}$$

根据边界条件 1，可知

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi}a^{-m} = mB_m R_0^{-2m} - mA_m \tag{2-133}$$

根据边界条件 2，可知

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi}a^m = mA_m R_1^{2m} - mB_m \tag{2-134}$$

联解上面这两个式子，可得

$$A_m = \frac{\mu_0 i}{2\pi m}\frac{1}{a^m}\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right), \qquad B_m = \frac{\mu_0 i}{2\pi m}\frac{R_0^{2m}}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right) \tag{2-135}$$

把 A_m、B_m 代入式(2-130)，最后可得

$$A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho + \frac{\mu_0 i}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m}{ma^m}\left[\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{r^m}{R_0^m} + \left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{R_0^m}{r^m}\right]\cos m\theta \tag{2-136}$$

气隙磁感强度则为

$$\left.\begin{aligned} B_\theta &= \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_1^m}{a^m}\left(\frac{a^{2m}+R_0^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{R_1^m}{r^m} - \frac{r^m}{R_1^m}\right)\cos m\theta\right], && r > a \text{ 时} \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{a^{2m}+R_1^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_0} - \frac{R_0^m}{r^m}\right)\cos m\theta, && r < a \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{2-137}$$

$$\left.\begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_1^m}{a^m}\left(\frac{a^{2m}+R_0^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_1^m} + \frac{R_1^m}{r^m}\right)\sin m\theta, && r > a \text{ 时} \\ B_r &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{a^{2m}+R_1^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_0^m} + \frac{R_0^m}{r^m}\right)\sin m\theta, && r < a \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{2-138}$$

气隙中的标量磁位 Ω 则为

$$\Omega = \frac{i}{2\pi}\left\{\alpha - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{R_0^m}{a^m}\left[\left(\frac{a^{2m}+R_0^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{r^m}{R_0^m} - \left(\frac{a^{2m}+R_1^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{R_0^m}{r^m}\right]\sin m\theta\right\} \tag{2-139}$$

转子的磁位 $\Omega_R = \frac{i}{2}$，定子的磁位 $\Omega_S = \frac{i}{2\pi}\theta$.

图 2-33 表示定、转子表面标量磁位和磁位差的分布，图 2-34 表示气隙磁场和转子表面的磁感强度分布.

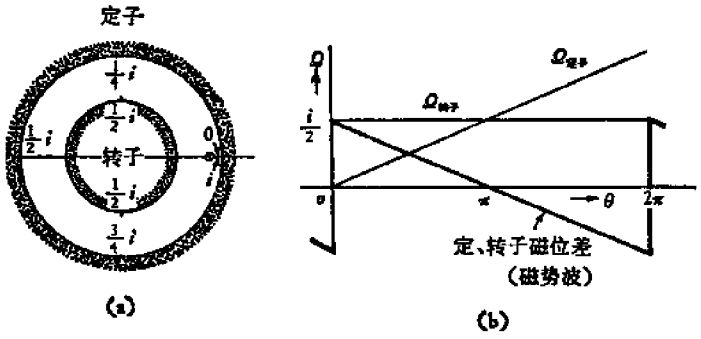


图 2-33　气隙内置有单根线电流时，定、转子标量磁位的分布
(a) 定、转子的标量磁位；(b) 标量磁位和磁位差的分布

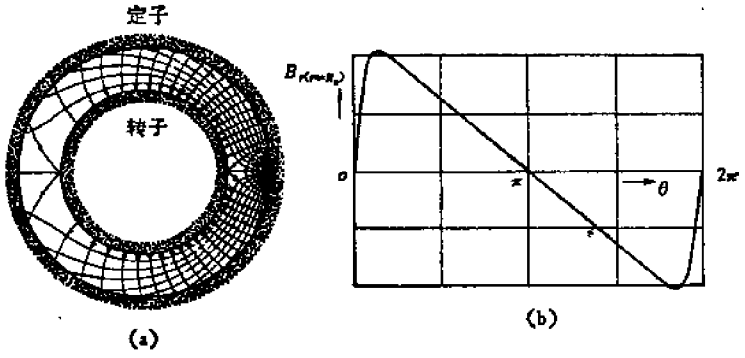


图 2-34　单根线电流所形成的气隙磁场
(a) 气隙磁场分布；(b) 转子表面的磁感强度分布

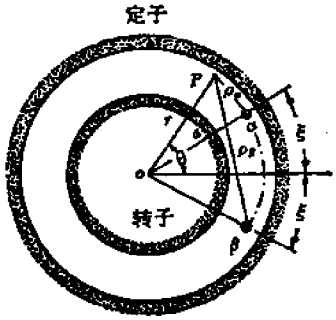


图 2-35　气隙中的载流线圈

（二）载流线圈在气隙中产生的磁场

设线圈的两条有效边为 α 和 β，线圈的节距为 y_1，相应的张角为 2ξ，$\xi=\frac{y_1}{\tau}\cdot 90°$，如图 2-35 所示. 于是整个载流线圈在气隙中形成的向量磁位 A_z，应为 α 和 β 两边所产生的向量磁位 $A_{z\alpha}$ 和 $A_{z\beta}$ 的叠加；即

$$
\begin{aligned}
A_z &= A_{z\alpha}+A_{z\beta}\\
&=-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho_\alpha+\frac{\mu_0 i}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m}{ma^m}\left[\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{r^m}{R_0^m}+\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{R_0^m}{r^m}\right]\cos m(\theta-\xi)\\
&\quad+\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\rho_\beta-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m}{ma^m}\left[\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{r^m}{R_0^m}+\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{R_0^m}{r^m}\right]\cos(\theta+\xi)\\
&=-\frac{\mu_0 i}{2\pi}(\ln\rho_\alpha-\ln\rho_\beta)+\frac{\mu_0 i}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2R_0^m}{ma^m}\left[\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{r^m}{R_0^m}+\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\frac{R_0^m}{r^m}\right]k_{pm}\sin m\theta
\end{aligned}
\tag{2-140}
$$

考虑到

$$
\ln\rho_\alpha-\ln\rho_\beta=\begin{cases}-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{a}{r}\right)^m k_{pm}\sin m\theta, & \text{当 } r>a \text{ 时}\\ -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m k_{pm}\sin m\theta, & \text{当 } r<a \text{ 时}\end{cases}
$$

式（2-140）亦可以改写成

$$
\left.\begin{aligned}
A_z&=\frac{\mu_0 i}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{R_1^m}{a^m}\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_1^m}+\frac{R_1^m}{r^m}\right)k_{pm}\sin m\theta, \quad \text{当 } r>a \text{ 时}\\
A_z&=\frac{\mu_0 i}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{R_1^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_0^m}+\frac{R_0^m}{r^m}\right)k_{pm}\sin m\theta, \quad \text{当 } r<a \text{ 时}
\end{aligned}\right\}
\tag{2-141}
$$

式中 k_{pm} 为 m 次谐波的节距因数，$k_{pm}=\sin m\xi$.

气隙磁感强度则为

$$
\left.\begin{aligned}
B_\theta&=-\frac{\mu_0 i}{\pi r}\sum_{1}^{\infty}\frac{R_1^m}{a^m}\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_1^m}-\frac{R_1^m}{r^m}\right)k_{pm}\sin m\theta,\\
B_r&=\frac{\mu_0 i}{\pi r}\sum_{1}^{\infty}\frac{R_1^m}{a^m}\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_1^m}+\frac{R_1^m}{r^m}\right)k_{pm}\cos m\theta.\\
&\text{当 } r>a \text{ 时}
\end{aligned}\right\}
\tag{2-142}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
B_\theta&=-\frac{\mu_0 i}{\pi r}\sum_{1}^{\infty}\frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_0^m}-\frac{R_0^m}{r^m}\right)k_{pm}\sin m\theta,\\
B_r&=\frac{\mu_0 i}{\pi r}\sum_{1}^{\infty}\frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_0^m}+\frac{R_0^m}{r^m}\right)k_{pm}\cos m\theta.\\
&\text{当 } r<a \text{ 时}
\end{aligned}\right\}
\tag{2-143}
$$

不难看出，在定、转子表面处

$$\left.\begin{aligned} B_{\theta(r=R_0)} &= B_{\theta(r=R_1)} = 0, \\ B_{r(r=R_0)} &= \frac{2\mu_0 i}{\pi R_0}\sum_1^{\infty}\frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)k_{pm}\cos m\theta \\ B_{r(r=R_1)} &= \frac{2\mu_0 i}{\pi R_1}\sum_1^{\infty}\frac{R_1^m}{a^m}\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)k_{pm}\cos m\theta \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}144)$$

故磁场在进入和离开定、转子表面时，与定、转子表面均为正交.

若线圈置放在定子表面，则 $a=R_1$；此时转子表面的磁感强度为

$$B_{r(r=R_0)} = \frac{2\mu_0 i}{\pi R_0}\sum_1^{\infty}\frac{2}{\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^m-\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^m}k_{pm}\cos m\theta \quad (2\text{-}145)$$

若线圈置放在转子表面，$a=R_0$，此时定子表面的磁感强度为

$$B_{r(r=R_1)} = \frac{2\mu_0 i}{\pi R_1}\sum_1^{\infty}\frac{2}{\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^m-\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^m}k_{pm}\cos m\theta \quad (2\text{-}146)$$

图 2-36 表示一个整距定子线圈和一个半距线圈（$y_1=0.5\tau$）在气隙内形成的磁场分布图.

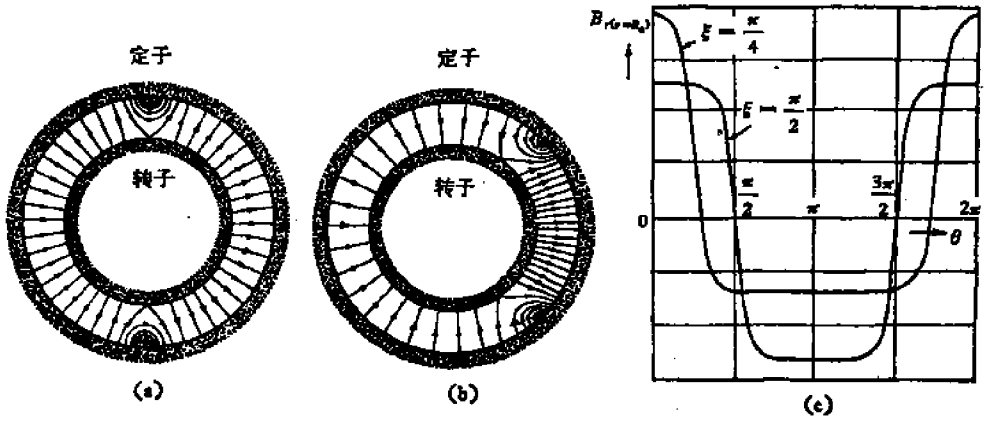


图 2-36 一个载流线圈在气隙内所产生的磁场

(a) $y_1=\tau$ 时；(b) $y_1=0.5\tau$ 时；(c) 转子表面的磁感强度分布.

许多电机的气隙 $\delta \ll R_1$，此时

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^m = \left(1-\frac{\delta}{R_1}\right)^{-m} = 1+m\frac{\delta}{R_1}+\cdots$$

$$\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^m = \left(1-\frac{\delta}{R_1}\right)^m = 1-m\frac{\delta}{R_1}+\cdots$$

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^m-\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^m \approx 2m\frac{\delta}{R_1}$$

在此情况下，式(2-145)和(2-146) 就近似等于

$$B_{r(r=R_0)} \approx B_{r(r=R_1)} \approx \frac{2}{\pi}\frac{\mu_0 i}{\delta}\sum_1^{\infty}\frac{1}{m}k_{pm}\cos m\theta \quad (2\text{-}147)$$

不难看出，这个式子与一般电机学中所导出的短距线圈的磁场公式是一致的.

（三）线圈组在气隙中产生的磁场

将一个极相组中 q 个线圈所产生的磁场叠加，即可得到线圈组所产生的磁场. 以线圈组的轴线作为坐标轴线，经过推导，可知气隙中的径向磁感强度为：

$$\left.\begin{aligned} B_r &= q\frac{\mu_0 i}{\pi r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_1^m}{a^m}\left(\frac{R_0^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_1^m}+\frac{R_1^m}{r^m}\right)k_{pm}k_{dm}\cos m\theta \\ &\qquad r>a \text{ 时} \\ B_r &= q\frac{\mu_0 i}{\pi r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_0^m}+\frac{R_0^m}{r^m}\right)k_{pm}k_{dm}\cos m\theta \\ &\qquad r<a \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{2-148}$$

式中 k_{dm} 为 m 次谐波的分布因数，$k_{dm}=\dfrac{\sin m\dfrac{q\Delta}{2}}{q\sin\dfrac{m\Delta}{2}}$；其中 $m\Delta$ 为相邻两个线圈在 m 次谐波磁场中的相角差.

2-11 具有铁磁边界时泊松方程的解法[3,13]

在 2-1 节里我们说明了无界空间中泊松方程的解法，现在进一步研究具有铁磁边界时二维泊松方程的解法.

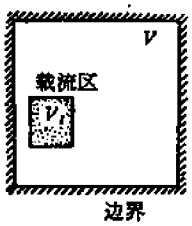


图 2-37 载流区和铁磁边界

当载流导体的周围具有铁磁边界时（图 2-37），磁化的铁磁边界亦将在区域 V 内产生磁场，于是 V 内的总向量磁位 A_z 将由 A_z' 和 A_z'' 两部分组成：

$$A_z = A_z' + A_z'' \tag{2-149}$$

其中 A' 为载流导体所产生的磁位，它是泊松方程的特解，即

$$\nabla^2 A_z' = -\mu_0 J_z \tag{2-150}$$

A_z'' 则是铁磁边界的影响. 由于在区域 V 内，总向量磁位 A_z 满足泊松方程

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \tag{2-151}$$

把式（2-151）减去式（2-150），可得

$$\nabla^2 A_z'' = 0 \tag{2-152}$$

这表明 A_z'' 满足拉普拉斯方程. 于是，具有铁磁边界时泊松方程的解，就转化为一个寻求泊松方程的特解 A_z' 和一个拉普拉斯方程通解 A_z'' 的问题. 关于拉普拉斯方程的通解，我们已在第 2-5 节中导出，所以仅需求出 A_z' 即可.

泊松方程的特解 A_z'，其形式与电流密度的具体分布规律和坐标系有关. 前面所介绍的无界空间中载流导体所生的向量磁位 A_z，就是特解的一种. 对于电机中的二维恒定磁场问题，常见的特解还有以下几种：

1. 在二维直角坐标系中，若某区域内 A_z 仅是 x 或 y 的函数，且电流密度为均匀分布（即 J_z=常值），则不难解出

$$A'_z = -\frac{1}{2}\mu_0 J_z x^2 \quad (\text{或} -\frac{1}{2}\mu_0 J_z y^2) \tag{2-153}$$

2. 在极坐标系中，若载流导体的截面为圆形，且电密为均匀分布，则在导体内部有

$$A'_z = -\frac{1}{4}\mu_0 J_z r^2 \tag{2-154}$$

3. 在区域 V 中，若电密沿 x 轴为正弦分布 $J_z = J_m \cos m\frac{\pi}{\tau}x$，则不难解出

$$A'_z = \frac{\mu_0 J_m}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\cos m\frac{\pi}{\tau}x \tag{2-155}$$

4. 在区域 V 中，若电密沿 x 轴呈周期性变化，其傅氏级数为 $J_z = \sum_{m=1}^{\infty} J_m \cos m\frac{\pi}{\tau}x$，则不难解出，

$$A'_z = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_0 J_m}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\cos m\frac{\pi}{\tau}x \tag{2-156}$$

这样，找到特解 A'_z，再加上拉普拉斯方程的通解 A''_z，可得总向量磁位 A_z；再由边界条件确定 A_z 中的任意常数，即可得到最终的解答. 这个解答在区域 V 内满足泊松方程；在边界上又满足给定的边界条件，所以是唯一正确的解.

下面用两个实例来说明.

2-12 半闭口圆形槽内载流导体所生的磁场[3,8,14,17,18]

小型鼠笼式感应电动机的转子和同步电机的阻尼绕组很多采用半闭口的圆形槽，下面来研究载流导体在这种槽内所产生的磁场和相应的直流槽漏感.

（一）槽内磁场分布

采用极坐标系，槽内分成Ⅰ、Ⅱ两个区域，如图 2-38 所示. 区域Ⅰ（$0 \leqslant r \leqslant R_0$）为载流区，其电密为 J_z，向量磁位为 $A_{z\text{Ⅰ}}$；$A_{z\text{Ⅰ}}$ 满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅰ}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{z\text{Ⅰ}}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅰ}}}{\partial \theta^2} = -\mu_0 J_z \tag{2-157}$$

区域Ⅱ（$R_0 \leqslant r \leqslant R_1$）为环形区，其电密为零，向量磁位为 $A_{z\text{Ⅱ}}$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅱ}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{z\text{Ⅱ}}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅱ}}}{\partial \theta^2} = 0 \tag{2-158}$$

在区域Ⅰ内，$A_{z\text{Ⅰ}}$ 设为

$$A_{z\text{Ⅰ}} = -\mu_0 J_z \frac{r^2}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m r^m \cos m\theta \tag{2-159}$$

其中第一部分 $-\mu_0 J_z \frac{r^2}{4}$ 为泊松方程的特解；第二部分 $\sum_{1}^{\infty} C_m r^m \cos m\theta$ 为边界的影响，即拉

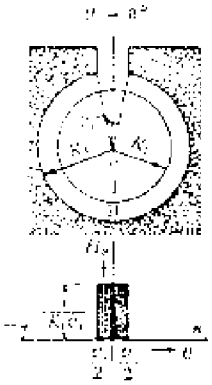


图 2-38 半闭口圆形槽

普拉斯方程的通解. 由于 $r=0$ 时，$A_{z\mathrm{I}}$ 为有限，故式中无 r^{-m} 项；另外根据图形的对称性，$A_{z\mathrm{I}}(r,\theta)=A_{z\mathrm{I}}(r,-\theta)$，即 $A_{z\mathrm{I}}$ 为 θ 的偶函数，故 $A_{z\mathrm{I}}$ 中无正弦项.

在区域 I 内，$A_{z\mathrm{II}}$ 设为

$$A_{z\mathrm{II}}=-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln r+B_0+\sum_{m=1}^{\infty}(D_m r^m+E_m r^{-m})\cos m\theta \tag{2-160}$$

其中 $-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln r$ 为载流导体在区域 I 中的贡献，B_0 为使区域 I 和 II 的磁位在交界面处保持连续所引入的任意常数；$\sum_{1}^{\infty}(D_m r^m+E_m r^{-m})\cos m\theta$ 为铁磁边界的影响. 根据图形的对称性，$A_{z\mathrm{II}}$ 中亦没有正弦项.

本问题的边界条件为：

1. 在区域 I 和 II 的交界面处，向量磁位和磁场强度的切向分量应当连续；即

$$r=R_0\text{ 时},\quad A_{z\mathrm{I}}=A_{z\mathrm{II}},\quad \frac{\partial A_{z\mathrm{I}}}{\partial r}=\frac{\partial A_{z\mathrm{II}}}{\partial r} \tag{2-161}$$

2. 设 $\mu_{\mathrm{Fe}}=\infty$，则在槽的内缘处切向磁场强度为零；再设槽口处切向场强为均匀分布；即

$$\left.\begin{aligned} r=R_1\text{ 时},\quad H_\theta=0,\quad &\text{当}\frac{\theta_1}{2}\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\frac{\theta_1}{2}\\ H_\theta=\frac{i}{R_1\theta_1},\quad &\text{当}-\frac{\theta_1}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\theta_1}{2}\end{aligned}\right\} \tag{2-162}$$

由条件 1 可知

$$C_m=D_m-E_m R_0^{-2m},\quad C_m=D_m+E_m R_0^{-2m}$$

由此可得

$$C_m=D_m,\quad E_m=0 \tag{2-163}$$

另外

$$B_0=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln R_0-\frac{\mu_0 i}{4\pi} \tag{2-164}$$

把 D_m、E_m 和 B_0 代入式(2-160)，可得

$$A_{z\mathrm{II}}=-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln r+\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln R_0-\frac{\mu_0 i}{4\pi}+\sum_{1}^{\infty}C_m r^m\cos m\theta \tag{2-165}$$

条件 2 在 $r=R_1$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的边界线上组成一个完整的边界条件，它可以展成傅氏级数的形式

$$H_{\theta(r=R_1)}=\frac{h_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}h_m\cos m\theta \tag{2-166}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H_{\theta(r=R_1)}d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\theta_1}{2}} \frac{i}{R_1\theta_1}d\theta = \frac{i}{\pi R_1} \\ h_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H_{\theta(r=R_1)}\cos m\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\theta_1}{2}} \frac{i}{R_1\theta_1}\cos m\theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{i}{R_1 m\theta_1}\sin m\frac{\theta_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}167)$$

根据这一边界条件可知

$$-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_{z\text{II}}}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} = \frac{h_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cos m\theta$$

由此即可确定 C_m

$$C_m = -\frac{2}{\pi}\frac{\mu_0 i}{m^2 R_1^m \theta_1}\sin m\frac{\theta_1}{2} \quad (2\text{-}168)$$

把 C_m 代入式(2-159)和(2-165)，最后可得

$$\left.\begin{aligned} A_{z\text{I}} &= -\left[\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2 + \frac{2}{\pi}\frac{\mu_0 i}{\theta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin m\frac{\theta_1}{2}\left(\frac{r}{R_1}\right)^m \cos m\theta\right] \\ A_{z\text{II}} &= -\left[\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{R_0}\right) + \frac{2}{\pi}\frac{\mu_0 i}{\theta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin m\frac{\theta_1}{2}\left(\frac{r}{R_1}\right)^m \cos m\theta\right] \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}169)$$

磁感强度则为

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

（二）半闭口圆形槽的直流槽漏感

B_r 和 B_θ 求出后，槽内的磁场能量 W_m 即可求出，于是可得槽漏感 $L_{s\sigma}$ 为

$$L_{s\sigma} = \frac{W_m}{\frac{1}{2}i^2} = \frac{1}{i^2}\left[\frac{1}{\mu_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R_1}(B_\theta^2 + B_r^2)r dr d\theta\right] l \quad (2\text{-}170)$$

若导条与槽壁间的间隙很小，可以略去不计，则 $R_1 \approx R_0$，此时

$$\left.\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0 i}{\pi R_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\left(\frac{r}{R_1}\right)^{m-1}\sin m\theta \\ B_\theta &= \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{r}{R_1^2} + \frac{\mu_0 i}{\pi R_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\left(\frac{r}{R_1}\right)^{m-1}\cos m\theta \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}171)$$

而

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R_1} B_r^2 r dr d\theta = \frac{\mu_0^2 i^2}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R_1} B_\theta^2 r dr d\theta = \frac{\mu_0^2 i^2}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2\right]$$

所以

$$L_{s\sigma} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left[\frac{1}{8} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2\right] \quad (2\text{-}172)$$

式中 $\varepsilon=\frac{\theta_1}{2}$.

再考虑到 ε 较小时

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2=\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2\varepsilon}+\left[\frac{1}{36}\varepsilon^2+\frac{1}{2700}\varepsilon^4+\frac{1}{79380}\varepsilon^6+\cdots\right]$$

$$\approx\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2\varepsilon} \tag{2-173}$$

于是式（2-172）可改写为

$$L_\mu=\frac{\mu_0 l}{\pi}\left[1.625+\ln\frac{1}{\theta_1}\right]=\mu_0\lambda_s l \tag{2-174}$$

式中 λ 为单位长度的槽比漏磁导

$$\lambda_s=\frac{1}{\pi}\left(1.625+\ln\frac{1}{\theta_1}\right) \tag{2-175}$$

上式在电机设计中常常用到.

2-13 变压器原、副绕组的漏磁场和漏电感[3,15,19,20]

图 2-39 表示一台同心式绕组的变压器. 把原、副绕组间的漏磁场作为恒定磁场考虑，并设：(1)原、副绕组的高度相等，安匝数相等、相反；(2)不计绕组被铁轭所遮部分的影响，不计绕组曲率的影响；(3)铁心的磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$. 此时即可得到图 2-39(b)所示简化的二维图形.

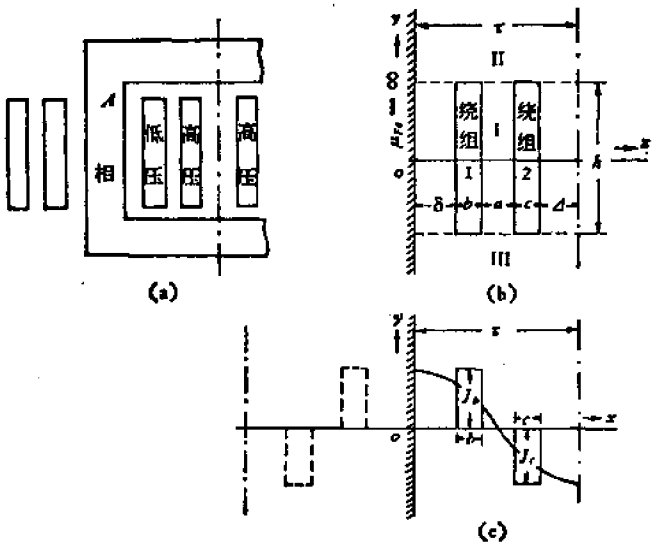


图 2－39 同心式绕组的变压器

(a) 绕组安排；(b) 二维简化图形；(c) 区域 I 内的电密分布

（一）漏磁场分布

把图 2-39（b）所示空间分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个区域．在区域Ⅱ和Ⅲ中，电密等于零，向量磁位满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅱ}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅱ}}}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅲ}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅲ}}}{\partial y^2}=0$$

在区域Ⅰ内，电密不等于零，向量磁位满足泊松方程：

$$\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅰ}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_{z\text{Ⅰ}}}{\partial y^2}=-\mu_0 J_z$$

式中 J_z 为区域Ⅰ的电密．从图 2-39（c）可见，J_z 的分布为

$$J_z(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\delta;\\ J_b, & \delta\leqslant x\leqslant\delta+b;\\ 0, & \delta+b\leqslant x\leqslant\delta+b+a;\\ J_c, & \delta+b+a\leqslant x\leqslant\delta+b+a+c;\\ 0, & \delta+b+a+c\leqslant x\leqslant\delta+b+a+c+\Delta\end{cases}\tag{2-176}$$

式中 $J_c=-J_b\dfrac{b}{c}$.

由于 $\mu_{Fe}=\infty$，故可利用镜像法将电密 $J_z(x)$ 的分布进行延拓[图 2-39(c)]，并展成波长为 2τ 的余弦级数

$$J_z(x)=J_0+\sum_{m=1}^{\infty}J_m\cos m\frac{\pi}{\tau}x\tag{2-177}$$

式中 J_0 和 J_m 分别为傅氏级数的系数；

$$\begin{aligned}J_0&=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}J_z(x)dx=0\qquad(\text{因 }J_c c+J_b b=0)\\ J_m&=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}J_z(x)\cos m\frac{\pi}{\tau}xdx=\frac{2}{\tau}\left[\int_{\delta}^{\delta+b}J_b\cos m\frac{\pi}{\tau}xdx+\int_{\tau-\Delta-c}^{\tau-\Delta}J_c\cos m\frac{\pi}{\tau}xdx\right]\\ &=\frac{4}{m\pi}\left[J_b\sin m\frac{\pi}{\tau}\frac{b}{2}\cdot\cos m\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{b}{2}+\delta\right)\right.\\ &\quad\left.+(-1)^m J_c\sin m\frac{\pi}{\tau}\frac{c}{2}\cdot\cos m\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{c}{2}+\Delta\right)\right]\end{aligned}\tag{2-178}$$

区域Ⅰ和区域Ⅱ、Ⅲ内向量磁位的解答为

$$\begin{aligned}A_{z\text{Ⅰ}}&=\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}+A'_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}y}+\frac{\mu_0 J_m}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\right]\cos m\frac{\pi}{\tau}x\\ &\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A''_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}+A''_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}y}\right)\sin m\frac{\pi}{\tau}x\\ A_{z\text{Ⅱ}}&=B_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}+B'_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}y}\right)\cos m\frac{\pi}{\tau}x\end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left(B'_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}+B''_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}y}\right)\sin m\frac{\pi}{\tau}x\\
A_{x\mathrm{II}}=&C_0+\sum_{m=1}^{\infty}(C_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}+C'_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}y})\cos m\frac{\pi}{\tau}x\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}(C''_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}+C'''_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}y})\sin m\frac{\pi}{\tau}x
\end{aligned}
\right\}
\tag{2-179}
$$

式中 $\dfrac{\mu_0 J_m}{\left(m\dfrac{\pi}{\tau}\right)^2}\cos m\dfrac{\pi}{\tau}x$ 为电密 $J_m\cos m\dfrac{\pi}{\tau}x$ 所产生的向量磁位，它是泊松方程的特解；其余各项则为拉普拉斯方程的通解.

本问题的边界条件和对称条件为

1. 由于 $\mu_{Fe}=\infty$，故在 $x=0$ 的边界上，$B_{y\mathrm{I}}=B_{y\mathrm{II}}=0$；
2. 在 $y=\infty$ 处，磁位 $A_{x\mathrm{II}}=0$；在 $y=-\infty$ 处，$A_{x\mathrm{I}}=0$；
3. 整个磁场对 x 轴对称，即 $A_{x\mathrm{I}}(x,y)=A_{x\mathrm{I}}(x,-y)$，$A_{x\mathrm{II}}(x,y)=A_{x\mathrm{II}}(x,-y)$；
4. 区域 I 和 II 的交界面处，$y=\dfrac{1}{2}h$，$A_{x\mathrm{I}}=A_{x\mathrm{II}}$，$H_{x\mathrm{I}}=H_{x\mathrm{II}}$.

根据第一个条件，可知三个解答中均无正弦项，即 $A''_m=A'''_m=B''_m=B'''_m=C''_m=C'''_m=0$. 根据第二个条件可知，$A_{x\mathrm{I}}$ 中 $e^{m\frac{\pi}{\tau}y}$ 项的系数 $B_m=0$，$A_{x\mathrm{II}}$ 中 $e^{-m\frac{\pi}{\tau}y}$ 项的系数 $C'_m=0$. 于是式 (2-179) 就简化成

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{x\mathrm{I}}&=\sum_{1}^{\infty}\left[A_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}+A'_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}y}+\frac{\mu_0 J_m}{\left(m\dfrac{\pi}{\tau}\right)^2}\right]\cos m\frac{\pi}{\tau}x\\
A_{x\mathrm{II}}&=B_0+\sum_{1}^{\infty}B'_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}y}\cos m\frac{\pi}{\tau}x\\
A_{x\mathrm{II}}&=C_0+\sum_{1}^{\infty}C_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}\cos m\frac{\pi}{\tau}x
\end{aligned}
\right\}
\tag{2-180}
$$

根据第三个条件可知，A_x 应是 y 的偶函数；故 $A_m=A'_m$，$B'_m=C_m$，$B_0=C_0$. 于是式 (2-180) 可进一步简化成

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{x\mathrm{I}}&=\sum_{1}^{\infty}\left[2A_m\mathrm{ch}m\frac{\pi}{\tau}y+\frac{\mu_0 J_m}{\left(m\dfrac{\pi}{\tau}\right)^2}\right]\cos m\frac{\pi}{\tau}x\\
A_{x\mathrm{II}}&=C_0+\sum_{1}^{\infty}C_m e^{-\frac{\pi}{\tau}y}\cos m\frac{\pi}{\tau}x\\
A_{x\mathrm{II}}&=C_0+\sum_{1}^{\infty}C_m e^{m\frac{\pi}{\tau}y}\cos m\frac{\pi}{\tau}x
\end{aligned}
\right\}
\tag{2-181}
$$

最后根据第四个条件，可得

$$
C_0=0 \tag{2-182}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
2A_m\mathrm{ch}m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}+\frac{\mu_0 J_m}{\left(m\dfrac{\pi}{\tau}\right)^2}&=C_m e^{-m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}\\
2A_m m\frac{\pi}{\tau}\mathrm{sh}m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}&=C_m\left(-m\frac{\pi}{\tau}\right)e^{-m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2-183}
$$

由此可解出

$$A_m = -\frac{\mu_0 J_m}{2\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2} e^{-m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}, \quad C_m = \frac{\mu_0 J_m}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \mathrm{sh}m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2} \tag{2-184}$$

把 C_0、A_m 和 C_m 代入式（2－181），最后可得

$$\left.\begin{aligned} A_{z1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_0 J_m}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\left[1 - e^{-m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}\mathrm{ch}m\frac{\pi}{\tau}y\right]\cos m\frac{\pi}{\tau}x \\ A_{z\,\mathrm{I}} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_0 J_m}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\mathrm{sh}m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}\cdot e^{-m\frac{\pi}{\tau}y}\cos m\frac{\pi}{\tau}x \\ A_{z\,\mathrm{II}} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_0 J_m}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\mathrm{sh}m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}\cdot e^{m\frac{\pi}{\tau}y}\cos m\frac{\pi}{\tau}x \end{aligned}\right\} \tag{2-185}$$

磁感强度则为

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

图 2-40 表示由式(2-185)画出的漏磁分布图.

（二）变压器的漏电感

从式(1-53)可知，原、副绕组漏磁场的能量

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}dV - \frac{1}{2}\int_S (\mathbf{H}\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

其中第二项的表面 S 由铁磁表面，$x=\tau$ 处的中性面，$y=\pm\infty$处的两个面，以及 $z=$常值的前、后两个面等一共六个面构成. 由于这六个面上的 $\int(\mathbf{H}\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$ 值均等于零，于是

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}dV \\ &= \frac{1}{2}\int_{V_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}dV \end{aligned} \tag{2-186}$$

对于上式，因区域 II 和 III 内电密为零，故体积分仅需在区域 I 进行.

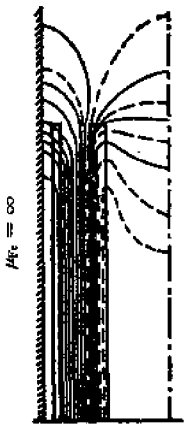


图 2-40　变压器内漏磁场的分布

考虑到区域 I 内的电密已表达成傅氏级数，故式(2-186) 可进一步写成

$$\begin{aligned} W_m &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}\int_{V_1} A_{z1}\cdot J_m\cos m\frac{\pi}{\tau}x dV \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{z=0}^{zD}\int_{x=0}^{\tau}\int_{y=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\mu_0 J_m^2}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\left[1 - e^{-m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}\mathrm{ch}m\frac{\pi}{\tau}y\right]\cos^2 m\frac{\pi}{\tau}x dx dy dz \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_0 J_m^2 \tau}{\left(m\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\pi D\left[\frac{h}{2}-\frac{e^{-m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}\mathrm{sh}m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}{m\frac{\pi}{\tau}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mu_0\tau\frac{h}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\pi D\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_m^2}{m^2}\left[1-\frac{e^{-m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}\mathrm{sh}m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}{m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}\right] \tag{2-187}$$

式中 D 为绕组的平均直径. 当 $\frac{h}{\tau}>3.2$ 时，式（2-187）中的方括弧其值在 0.9—1 之间；m 愈大，其值愈接近于 1. 若近似认为

$$1-\frac{e^{-m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}\mathrm{sh}m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}{m\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}} \approx 1-\frac{e^{-\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}\mathrm{sh}\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}}{\frac{\pi}{\tau}\frac{h}{2}} \tag{2-188}$$

并考虑到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{J_m}{m}\right)^2 \approx 2\left(\frac{n_1 i_1\frac{\pi}{\tau}}{h}\right)^2\left(a+\frac{b+c}{3}\right)\frac{1}{\tau} \tag{2-189}$$

式（2-187）就可以改写成

$$W_m \approx \frac{1}{2}\frac{\mu_0(n_1 i_1)^2\pi D}{h}\left[1-\frac{1-e^{-\frac{\pi}{\tau}h}}{\frac{\pi}{\tau}h}\right]\left(a+\frac{b+c}{3}\right) \tag{2-190}$$

式中 $n_1 i_1$ 为原绕组的安匝数. 整个绕组的漏感 L_σ 则为

$$L_\sigma = \frac{2W_m}{i_1^2} = \frac{\mu_0 n_1^2\pi D}{h}k_\rho\left(a+\frac{b+c}{3}\right) \tag{2-191}$$

式中 k_ρ 称为罗果斯基（Rogowski）因数，

$$k_\rho = 1-\frac{1-e^{-\frac{\pi}{\tau}h}}{\frac{\pi}{\tau}h} \tag{2-192}$$

这种按电流密度是否为零进行分区，再把周期性分布的电密展成傅氏级数，求出载流区中泊松方程的特解和通解，最后利用边界条件确定各个区域内向量磁位解答中的任意常数，这种方法通常称为单重傅氏级数法或罗果斯基法.

2-14 用双重傅氏级数法解泊松方程[2,3,14,21—25]

罗果斯基法是按电密是否为零对场域分区，当电密分布比较复杂时，用该法求解时就要分成许多区域，并用联立方程来确定 A_m 中的任意常数，因此求解比较繁复. 对于边界形状为矩形、边界线与标量等磁位线或磁力线相重合的情况，利用镜像法把区域内部的分布电流对铁磁边界来回反射，就可得到一个对于 x 轴和 y 轴都具有周期性的电密分布，如图 2-41 所示. 把此具有双重周期性的电密 $J_m(x,y)$ 展成 x 和 y 的双重傅氏级数

$$J_m(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}J_{j,k}\cos m_j x\cos n_k y \tag{2-193}$$

则在整个求解区内，可以列出一个统一的泊松方程：

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}=-\mu_0 J_z(x,y)$$

而整个区域内 A_z 的解亦将是一个双重傅氏级数

$$A_z=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(A_j\cos m_j x+A'_j\sin m_j x)(B_k\cos n_k y+B'_k\sin n_k y) \qquad (2\text{-}194)$$

下面来研究两种常见的情况.

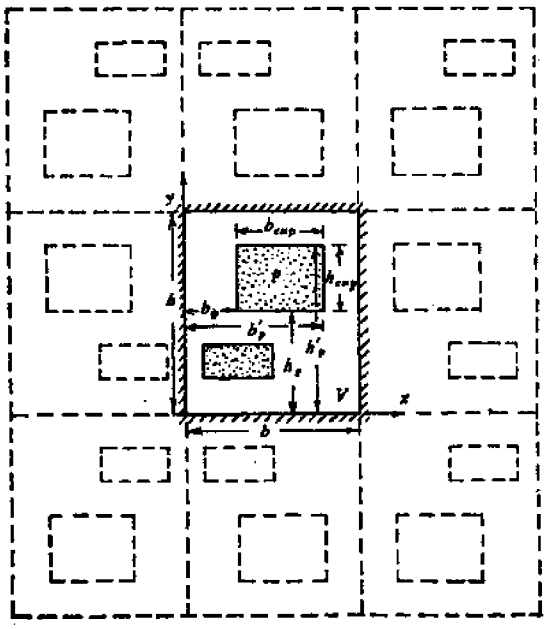


图 2-41　电密分布为 x 和 y 的双重周期性函数

（一）铁磁边界为闭合，区域 V 内的总电流 $\sum i=0$ 时

图 2-41 表示这种情况的示意图. 设 $\mu_{Fe}=\infty$，则边界上的切向场强 $H_t=0$；于是整个铁磁边界上的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A_z}{\partial x}_{x=0}&=0,\quad \frac{\partial A_z}{\partial y}_{y=0}=0,\\ \frac{\partial A_z}{\partial x}_{x=b}&=0,\quad \frac{\partial A_z}{\partial y}_{y=h}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}195)$$

从式(2-195)的上面两个条件，可知

$$A'_j=B'_j=0 \qquad (2\text{-}196)$$

从下面两个条件，可得

$$\left.\begin{aligned} m_j &= (j-1)\frac{\pi}{b}, \quad j=1,2,\cdots,\infty \\ n_k &= (k-1)\frac{\pi}{h}, \quad k=1,2,\cdots,\infty \end{aligned}\right\} \tag{2-197}$$

把式(2-196)和(2-197)代入式(2-194)，可得

$$A_z = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k}\cos(j-1)\frac{\pi}{b}x\cos(k-1)\frac{\pi}{h}y \tag{2-198}$$

再把此 A_z 代回到原泊松方程，可得

$$(m_j^2+n_k^2)A_{j,k} = \mu_0 J_{j,k}$$

或

$$A_{i,j} = \frac{\mu_0 J_{j,k}}{m_j^2+n_k^2} \tag{2-199}$$

这样，一旦求出电密的双重傅氏级数系数 $J_{j,k}$，整个区域内的磁位 A_z 就可确定.

普遍而言，若区域 V 内共有 q 个载流导体（图 2-41），其中第 p 个导体的电密为 J_p ($p=1, 2, \cdots, q$)，则电密 $J_z(x,y)$可以写成：

$$\left.\begin{aligned} J_z(x,y) &= \sum_{p=1}^{q} J_p(x,y) \\ J_p(x,y) &= J_p, \quad \text{当 } b_p' \geqslant x_p \geqslant b_p, \quad h_p' \geqslant y_p \geqslant h_p \\ &= 0, \quad \text{当 } x,y \text{ 为其他值时} \end{aligned}\right\} \tag{2-200}$$

把式(2-200)分别乘以 $\cos m_j x$ 和 $\cos n_k y$，并对 x 和 y 进行双重积分，再考虑到式(2-193)，可得

$$\int_0^b\int_0^h J_z(x,y)\cos m_j x \cdot \cos n_k y\,dx\,dy = \sum_{p=1}^{q} J_p\int_{b_p}^{b_p'}\int_{h_p}^{h_p'}\cos m_j x\cos n_k y\,dx\,dy$$

或

$$\int_0^b\int_0^h J_{j,k}\cos^2 m_j x\cos^2 n_k y\,dx\,dy = \sum_{p=1}^{q} J_p\int_{b_p}^{b_p'}\cos m_j x\,dx\int_{h_p}^{h_p'}\cos n_k y\,dy$$

经过运算，最后可得 $J_{j,k}$为

$$\left.\begin{aligned} J_{j,k} &= \frac{4}{bh}\sum_{p=1}^{q} J_p\left(\frac{\sin m_j b_p' - \sin m_j b_p}{m_j}\cdot\frac{\sin n_k h_p' - \sin n_k h_p}{n_k}\right), \\ &\qquad\qquad \text{当 } j,k \neq 1 \text{ 时;} \\ J_{1,k} &= \frac{2}{bh}\sum_{p=1}^{q} J_p b_{cup}\left(\frac{\sin n_k h_p' - \sin n_k h_p}{n_k}\right), \quad \text{当 } k \neq 1 \text{ 时;} \\ J_{j,1} &= \frac{2}{bh}\sum_{p=1}^{q} J_p h_{cup}\left(\frac{\sin m_j b_p' - \sin m_j b_p}{m_j}\right), \quad \text{当 } j \neq 1 \text{ 时;} \\ J_{1,1} &= \frac{1}{bh}\sum_{p=1}^{q} J_p b_{cup} h_{cup} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2-201}$$

（二）铁磁边界为开口，区域 V 内的总电流 $\sum i \neq 0$ 时

图 2-42 表示两个载流导体放在矩形开口槽内的情况. 设 $\mu_{Fe}=\infty$，则在槽壁和槽底处，磁场的切向分量 $B_t=0$. 此外，设在槽口处磁场为纯水平方向，则 $B_{y(y=h)}=0$. 于是

对本问题可列出如下的边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial A_z}{\partial y}_{y=0}=0,\quad \frac{\partial A_z}{\partial x}_{x=\pm\frac{b}{2}}=0,\\&\frac{\partial A_z}{\partial x}_{y=h}=0.\end{aligned}\right\}\tag{2-202}$$

另外，从图形看，磁场分布应与 y 轴对称，故 $B_{y(x=0)}=0$，即

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}_{x=0}=0\tag{2-203}$$

由条件 2 可知，

$$A_j'=0\tag{2-204}$$

由条件 1 可知，

$$B_k'=0\tag{2-205}$$

$$\sin m_j\frac{b}{2}=0,\quad \cos n_k h=0$$

故

$$\left.\begin{aligned}&m_j=2(j-1)\frac{\pi}{b},\quad j=1,2,\cdots,\infty\\&n_k=(2k-1)\frac{\pi}{2h},\quad k=1,2,\cdots,\infty\end{aligned}\right\}\tag{2-206}$$

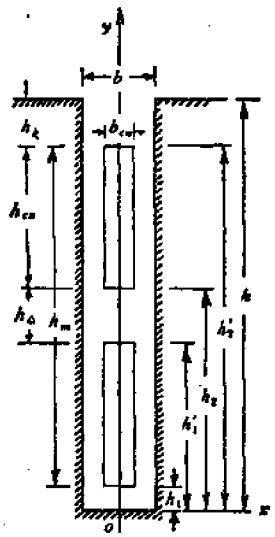


图 2-42　置有双层绕组的矩形开口槽

于是

$$A_z=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{j,k}\cos m_j x\cos n_k y\tag{2-207}$$

其中

$$A_{j,k}=\frac{\mu_0 J_{j,k}}{m_j^2+n_k^2} \tag{2-208}$$

现在来求 $J_{j,k}$. 把电密在求解域内展成双重傅氏级数 $\sum\sum J_{j,k}\cos m_j x\cos n_k y$，可得

$$J_{j,k}\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{h}\cos^2 m_j x\cos^2 n_k y\,dx\,dy=\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{h}J_z(x,y)\cos m_j x\cos n_k y\,dx\,dy$$

若上、下层电流为同样大小，其电密为 J，积分后可得

$$\left.\begin{aligned}J_{j,k}&=\frac{8}{bh'}J\frac{\sin m_j\frac{b_{cu}}{2}}{m_j n_k}(\sin n_k h_1'-\sin n_k h_1+\sin n_k h_2'-\sin n_k h_2),\\&\qquad\text{当 } j\neq 1 \text{ 时;}\\J_{1,k}&=\frac{2}{bh'}Jb_{cu}\frac{\sin n_k h_1'-\sin n_k h_1+\sin n_k h_2'-\sin n_k h_2}{n_k}\end{aligned}\right\} \tag{2-209}$$

图 2-43 表示两种典型的槽内磁场分布图，其中图 (a) 为狭长的导体置放在一个较深的槽内时的情况，此时槽内的磁力线基本是水平的；图 (b) 表示方形导体放在一个宽槽内的情况，此时除槽顶和上、下层之间磁力线接近水平线以外，其他各处的磁力线均为曲线，在下层导体中还形成一个“核点”. 图 2-44 表示上、下层导体中电流不等时槽内的磁场分布图.

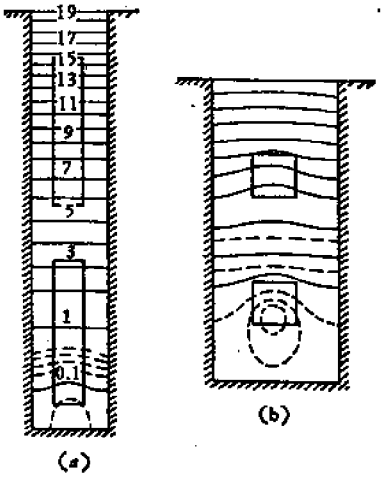


图 2-43 上、下层导体电流相同时槽内磁场分布

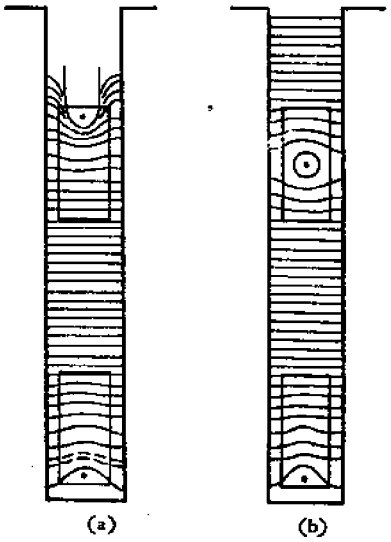


图 2-44 上、下层导体电流不同时槽内磁场分布
(·表示核点)
(a) 上、下层电流相等相反；
(b) 上、下层电流相反，上层电流比下层大一倍时

2-15 小 结

本章研究了二维恒定磁场的解析解法. 首先说明无界空间中恒定磁场的计算方法和几种常见截面的长直载流导体所产生的向量磁位和磁场，接着研究了铁磁边界的影响和

拉普拉斯方程、泊松方程边值问题的直接解法.

当边界面为铁磁平面或圆柱面时，有时可用一个（或一组）等效的镜像电流去代替铁磁边界的影响，使磁场的求解简化，这种方法称为镜像法. 当边界面为 $\mu_{Fe}=\infty$的半无限大铁磁平面时，长直线电流的镜像为一与原像大小相等的电流，镜像电流的符号取决于边界面是标量等磁位面还是磁力线；若是等位面，则镜像与原像同号；若是磁力线，则与原像异号. 若边界面由几个铁磁平面交接组成，由于来回反射，镜像数可能为有限、亦可能是无限，视最后一个镜像能否与原像重合而定. 镜像确定以后，应利用图形的对称性加以判断，看原像与镜像所形成的磁场在边界面上是否符合给定的边界条件. 当边界为铁磁圆柱面时，镜像位置在原像的倒量位置处；对于具有特定截面的长直导体，镜像的形状将与原像不同. 镜像法虽很简单，但解决的问题比较有限，因为它要依靠少量的参数来满足边界面上每一点的边值要求，这并不是经常可能的. 此外，实际的铁磁平面其尺寸都是有限的，这给镜像法的应用将带来一定误差；对于平面中开有气隙的情况，亦要进行特殊处理，使气隙闭合以后再用. 这些都要注意. 在电机中，常用镜像法来计算绕组端部磁场，载流导体在槽内所受的电磁力等问题.

对于具有铁磁边界的恒定磁场问题，另一种常用的解析解法是直接求解磁位的拉普拉斯方程或泊松方程. 对于拉普拉斯方程的边值问题，若边界线与某曲线坐标系的坐标曲线重合时，分离变量法往往是一种有效而简便的方法. 分离变量法的具体步骤为

（1）根据边界形状选定坐标系，然后进行变量分离，把拉普拉斯方程（偏微分方程）分解成几个常微分方程；

（2）求解各常微分方程，得到特解，再把各特解线性叠加，得到通解；

（3）利用边界条件确定解答中的任意常数，最后得到满足特定边界条件的拉普拉斯方程解答.

泊松方程通常有两种解法. 一种解法是，把总的解答分成两部分：一部分是载流导体本身所产生的磁位，即泊松方程的特解；另一部分是铁磁边界的影响，即齐次方程（拉普拉斯方程）的通解；解答中的各个系数由边界条件确定. 当载流区内的电密可以展成傅氏级数时，泊松方程的特解亦可用傅氏级数表出，此时这种方法亦称为单重傅氏级数法（或罗果斯基法）. 另一种解法是双重傅氏级数法. 当边界为矩形且边界线与标量等位线或磁力线重合时，求解区内的电密可表示为坐标 x，y 的双重傅氏级数；相应地，整个区域内向量磁位的解答亦将是一双重傅氏级数. 当求解域分区数较多时，第一种方法十分繁复；双重傅氏级数法的解答形式比较简洁，但双重级数的收敛较慢，一般 j 和 k 要算到 40 以上，计算工作量亦不小. 泊松方程还可以用格林函数法来求解，但在电机问题中应用很少.

总的来讲，恒定磁场问题还没有普遍、通用的解法. 一般来讲，只有边界和载流导体的形状比较规则、简单时，才能用解析法解出；当边界形状比较复杂时，需用数值法求解. 解析法的优点是，解答清楚、通用，从中可以看出各种参数和工况变化时磁场的变化规律，计算工作量亦较小. 电机中的许多经典问题，都是用解析法解出的. 此外，为了验证源程序的正确性，一般都要用具有解析解的问题作为数值计算的模型题.

参 考 文 献

[1] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941.

[2] B. Hague, The Principles of Electromagnetism Applied to Electrical Machines, Dover, 1962.

[3] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems, Pergamon Press, 2nd Edition, 1973.

[4] W. R. Smythe, Static and Dynamic Electricity, McGraw-Hill, 1950.

[5] J. Van Bladel, Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, 1964.

[6] K. Simonyi, Theoretische Elektrotechnik, VEB Deutscher Verlag, 1956.

[7] P. Silvester, Modern Electromagnetic Fields, Prentice-Hall, 1968.

[8] L. V. Bewley, Two Dimensional Field in Electrical Engineering, Dover, 1963.

[9] 北京大学物理系，电动力学，人民教育出版社，1961.

[10] P. Hammond, Electric and Magnetic Images, Proc. IEE, pt. C, 1960.

[11] C. J. Carpenter, The Application of the Method of Images to Machine End Winding Fields, Proc. IEE, pt. A, 1960.

[12] 梁昆淼编，数学物理方法(第二版)，人民教育出版社，1978.

[13] P. Moon and D. E. Spencer, Field Theory for Engineers, Van Nostrand, 1961.

[14] M. Stafl, Electrodynamics of Electrical Machines, Iliff Book Ltd, 1967.

[15] F. Ollendorf, Technische Electrodynamik, Band I, Berechnung Magnetischer Felder, Springer-Verlag, 1952.

[16] R. Richter, Elektrische Maschinen, Band I, Springer-Verlag.

[17] A. R. Stevenson, R. H. Park, Graphical Determination of Magnetic Field, Trans. AIEE, 1927.

[18] R. L. Robertson, L. A. Terry, Analytic Determination of Magnetic Field, Trans. AIEE, 1929.

[19] Г. Н. Петров, Трансформаторы I, ГЭИ, 1934.

[20] L. Robins, Transformer Reactance Calculations with a Digital Computer, Trans. AIEE, 1956.

[21] E. Roth, Etude analytique du champ propre d'une encoche, RGE, 1927.

[22] E. Roth, Etude analytique du champ de fuites des transformateurs et des efforts mechaniques exerces sur les enroulement, RGE, 1928.

[23] E. Roth, Etude analytique des champ thermique et magnetique lor sque la conductibilite thermique ou la permeabilite n'est pas la meme dans toute l'etendue du domaine considere, RGE, 1928.

[24] A. Pramanik, Extension of Roth's Method to 2-dimensional Rectangular Regions Containing Conductors of Any Cross-section, Proc. IEE, 1969.

[25] P. Hammond, Roth's Method for the Solution of Boundry Value Problem in Electrical Engineering, Proc. IEE, 1967.

[26] P. Moon, D. E. Spencer, Field Theory Handbook, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1971.

第三章　二维恒定无旋磁场的特殊解法
——保角变换法

上章介绍了用分离变量法来解无旋磁场中的拉普拉斯方程. 对于二维空间中具有多边形边界和曲线边界的许多无旋场问题（例如电枢开槽后气隙内的磁场分布，转子偏心时的气隙磁场等），亦可以用一种特殊的变换方法——保角变换法来求解. 本章先介绍共轭函数和保角变换的概念，然后着重说明许瓦兹-克利斯多非尔变换及其在求解电机磁场问题中的应用.

3-1　共轭函数和保角变换[1-3]

（一）共轭函数

设 $z=x+jy$ 为一复变量，$w(z)$为一复变函数，其实部为 u，虚部为 v，

$$w(z) = u(x,y) + jv(x,y) \tag{3-1}$$

若 $w(z)$在某一区域内为单值函数，其导数 $\frac{dw}{dz}$ 存在且为唯一，

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z+\Delta z) - w(z)}{\Delta z} \tag{3-2}$$

则称 $w(z)$在该区域内是“解析的”.

若 $w(z)$为解析函数，则无论令 $\Delta z=\Delta x$ 或 $\Delta z=j\Delta y$，求出的导数$\frac{dw}{dz}$应为相同而与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关；即

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}_{(\Delta z=\Delta x\text{时})} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}_{(\Delta z=j\Delta y\text{时})} \tag{3-3}$$

由此可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3-4}$$

式（3-4）称为柯希-黎曼方程. 根据柯希-黎曼方程可以推出，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-5}$$

即 u 和 v 都满足拉普拉斯方程. 这种构成复变函数 $w(z)$的实部和虚部、且同时满足拉普拉斯方程的函数 u 和 v，就称为共轭函数.

共轭函数的一个重要特点是，$u(x,y)$=常值 的这族曲线与 $v(x,y)$=常值 的这族曲线互为正交. 证明如下：在 $u(x,y)$=常值 的曲线上，

$$du_{u=常值}=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0$$

故

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{u=常值}=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}$$

同理，在 $v(x,y)$=常值 的曲线上，

故

$$dv_{v=常值}=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{v=常值}=-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}$$

于是根据柯希-黎曼方程可知，在交点处有

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{u=常值}=-\frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{v=常值}} \tag{3-6}$$

上式表明这两组曲线的斜率互成负倒数，所以它们是正交的．这样，如果把其中一组曲线作为标量等磁位线，则另一组曲线就可作为磁力线．

若以 u 作为标量磁位，则磁场强度 H 应为

$$\begin{aligned}H&=\sqrt{H_x^2+H_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}=\left|\frac{dw}{dz}\right|\end{aligned} \tag{3-7}$$

即磁场强度的幅值就等于表征该无旋磁场的复变函数 $w(z)$的导数的模．

由于给定边界条件后拉普拉斯方程的解答是唯一的，所以如能找到一个解析函数 $w(z)$，在边界处其实部 u 或虚部 v 能与给定的边界条件相符合，则此 $w(z)$就可以表征所研究的无旋场．对于具有多边形边界且边界为标量等位线或磁力线的情况，可用下一节的许-克变换直接找出所需的复变函数 $w(z)$．对于边界线为曲线的情况，给定边界条件后，没有通用的方法可以直接找到 $w(z)$；一般是对各个解析函数分别进行研究，然后确定该函数可以用来解决哪些问题．

例如，对于对数变换

$$w=k\ln z \tag{3-8}$$

由于 $z=x+jy=re^{j\theta}$，所以

$$w=k\ln re^{j\theta}=k(\ln r+j\theta)=u+jv \tag{3-9}$$

于是

$$u=k\ln r,\qquad v=k\theta \tag{3-10}$$

在 z 平面内，u=常值 的曲线为一系列同心圆，v=常值 的线为一系列从圆心处辐射出来的直线，这两组曲线互相正交，如图 3-1(a)所示．显然，这组图形可以表征长直线电流在无界空间中所产生的磁场；设 $k=\dfrac{i}{2\pi}$，则 u 可以代表力线函数 Ψ，v 可以代表磁位函数

Ω，$w(z)$则是代表整个磁场的复磁位函数

$$w=u+jv=\frac{i}{2\pi}\ln r+j\frac{i}{2\pi}\theta \tag{3-11}$$

$$(\Psi)\quad(\Omega)$$

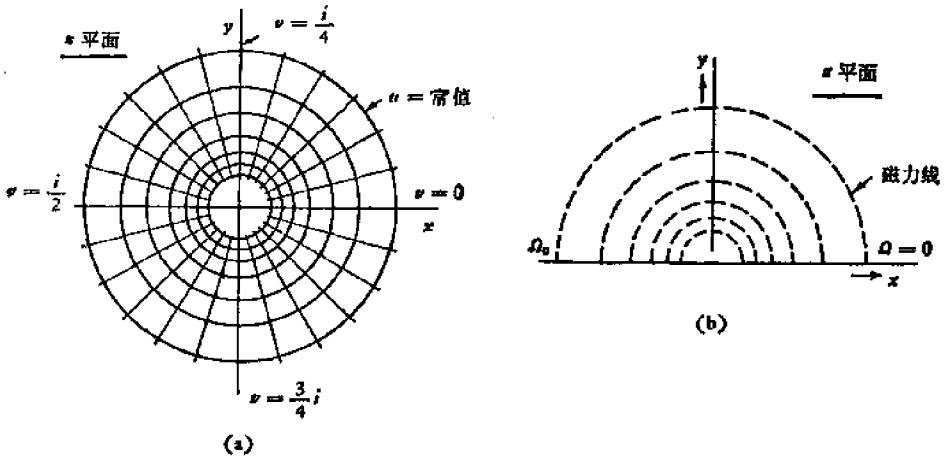


图 3-1　对数变换 $w=k\ln z$

(a)长直线电流的磁场$\left(k=\frac{i}{2\pi}\right)$；　(b)具有不同磁位的两个半无限平面间的磁场

对数变换亦可用以表征具有不同磁位的两个半无限大平面间的磁场，如图 3-1(b)所示. 此时 u 代表 Ψ，v 代表 Ω. 若 $k=\frac{\Omega_0}{\pi}$，则

$$w=u+jv=\frac{\Omega_0}{\pi}(\ln r+j\theta) \tag{3-12}$$

在 z 平面内，$\theta=0$ 的一边 $\Omega=0$，$\theta=\pi$ 的一边磁位等于 Ω_0.

（二）保角变换

复变函数还有一些重要的性质. 设 z 平面内有一点 p，则在 w 平面内一定可以找到一个对应点 P. 当 p 点在 z 平面内移动画出曲线 S_z 时，通过 $w=w(z)$，P 点将在 w 平面内画出相应的曲线 S_w，如图 3-2 所示. 设复变函数 $w(z)$ 在所研究的区域内是解析的，$\frac{dw}{dz}$存在，

$$\frac{dw}{dz}=Re^{j\phi}$$

则线段 dw 与 dz 间的对应关系应为

$$dw=\left(\frac{dw}{dz}\right)dz=Re^{j\phi}dz \tag{3-13}$$

所以把 z 平面内的小线段 pp' 放大 R 倍、转以 ϕ 角，就可以得到 w 平面内的对应线段 PP'. 同理，把 z 平面内的小线段 pp'' 放大 R 倍、转以 ϕ 角，可得 w 平面内的对应线段 PP'' (图 3-2). 不难看出，$\angle P'PP''=\angle p'pp''$，即变换具有“保角”性质. 因此，通过复变函

数 $w=w(z)$ 把 z 平面内的曲线组变换到 w 平面中时，除非 $\frac{dw}{dz}$ 等于 0 或 ∞，否则所有原来曲线间的夹角都将保持不变，所以这种变换亦称为保角变换.

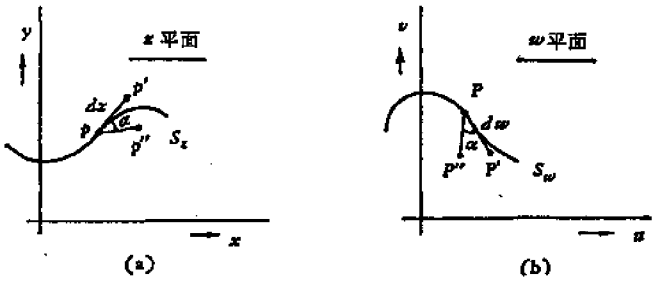


图 3-2　w 平面与 z 平面的对应关系

由于变换具有“保角”性质，所以 z 平面内的两组正交曲线（等位线和磁力线）将变换为 w 平面内对应的两组正交曲线（等位线和磁力线）. 这样，就可以从一种边界形状比较简单的图形内的已知磁场（例如均匀磁场）出发，通过变换 $w(z)$，求出另外一个边界形状比较复杂的图形内的磁场分布.

以对数变换 $w=k\ln z$ 为例，此变换的实部和虚部分别为

$$u = k\ln r, \qquad v = k\theta$$

于是，z 平面内 $r=$常值 的一系列同心圆，变换到 w 平面内，就成为 $u=$常值 的一系列平行于纵轴的铅垂线；z 平面内 $\theta=$常值 的一系列通过原点的辐射形直线，变换到 w 平面内，就成为 $v=$常值 的一系列平行于横轴的水平线. 在 z 平面内，$r=$常值 和 $\theta=$常值 这两组曲线为正交，变换到 w 平面内，对应的两组曲线仍为正交. 图 3-3 表示 z 平面内的一个半环 $abcd$ 变换到 w 平面内的情况. 设系数 $k=1$，a、b、c、d 的坐标分别为 $z=4$，3，-3，-4，变换到 w 平面后，对应点 A、B、C、D 的坐标为 $w=1.386$，1.099，$1.099+j\pi$，$1.386+j\pi$；即 z 平面内的半环 $abcd$ 将变为 w 平面内的矩形 $ABCD$. 环内部的等位线和磁力线相应地变换为矩形内部的等位线和磁力线，如图 3-4 所示. 这样，通过 $w=\ln z$ 这一变换，就可以把 z 平面内较复杂的磁场，变换为 w 平面内的规则磁场（均匀磁场）.

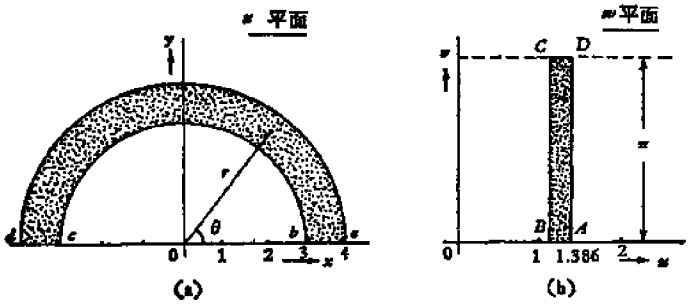


图 3-3　对数变换的对应关系

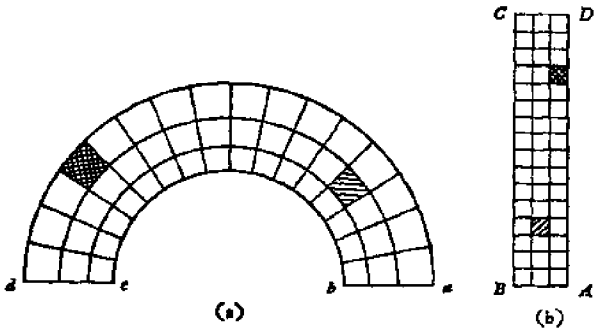


图 3-4　通过 $w=\ln z$ 把 z 平面内的半环变换为 w 平面内的矩形
(a) z 平面内的半环；(b) 变换为 w 平面后的矩形

3-2　许瓦兹-克利斯多非尔变换[1-5]

在保角变换中，对电机工程最有用的变换是许瓦兹-克利斯多非尔（Schwarz-Christoffel）变换，简称许-克变换．许-克变换为一微分方程，其含意为将 w 平面实数轴（从$-\infty$到$+\infty$）上的连续线段变换为 z 平面中一个多边形的边界，把 w 平面的上半平面变换为 z 平面中多边形的内部，如图 3-5 所示．

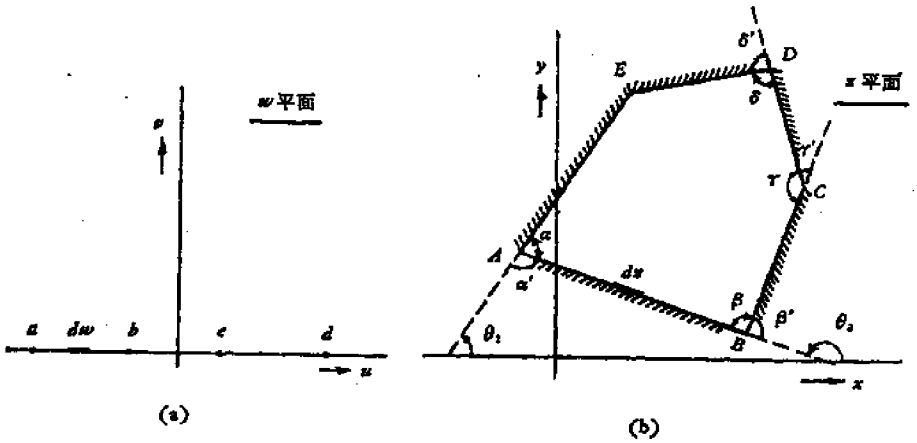


图 3-5　许-克变换

(一) 许-克变换

设 w 平面的实数轴上有一系列的点 a、b、c、d …($a<b<c<d$…)，在 ab、bc、cd …等区段内，$\frac{dz}{dw}$的幅角分别等于不同的常值；变换到 z 平面内时，对应的点为多边界的顶点 A、B、C、D …，线段 AB、BC、CD …为多边形的各条边，它们是一系列具有不同斜率的

直线段．在 a、b、c、d …等转折点处，$\frac{dz}{dw}$ 等于 0 或∞；相应地，在 A、B、C、D …等顶点处，多边形边线的斜率发生突变．若此倾角的突变分别等于多边形的外角 α'、β'、γ' …，则 w 平面的实数轴即可变换为 z 平面内所需多边形的边界．这就是许-克变换的基本思想．

考察下列变换

$$\frac{dz}{dw} = S(w-a)^{-\frac{\alpha'}{\pi}}(w-b)^{-\frac{\beta}{\pi}}(w-c)^{-\frac{\gamma}{\pi}}\cdots \tag{3-14}$$

式中 S 为一常数（复数），a、b、c …和 α'、β'、γ' …的意义如上所述；则 $\frac{dz}{dw}$ 的幅角应为

$$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right) = \arg S - \frac{\alpha'}{\pi}\arg(w-a) - \frac{\beta'}{\pi}\arg(w-b) - \frac{\gamma'}{\pi}\arg(w-c)\cdots \tag{3-15}$$

当 w 在横轴上移动时，dw 恒为实数，故

$$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right) = \arg\frac{dx+jdy}{du} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{dy}{dx} = \theta \tag{3-16}$$

上式表示，除各顶点外，$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right)$ 的值就等于 z 平面内多边形边界各线段与横轴所形成的倾角 θ，如图 3-5 所示．

若 w 在 a 点左边，$w<a$，$w-a$＝负值，

$$\arg(w-a) = \pi,\quad \arg(w-b) = \arg(w-c) = \cdots = \pi,$$

所以

$$\theta_1 = \arg\left(\frac{dz}{dw}\right) = \arg S - (\alpha' + \beta' + \gamma' + \cdots) \quad \text{当 } w < a \text{ 时} \tag{3-17}$$

当 w 在 a、b 两点之间时，$a<w<b$，$w-a$＝正值，

$$\arg(w-a) = 0,\quad \arg(w-b) = \arg(w-c) = \cdots = \pi,$$

所以

$$\theta_2 = \arg\left(\frac{dz}{dw}\right) = \arg S - (\beta' + \gamma' + \cdots) \quad \text{当 } a < w < b \text{ 时} \tag{3-18}$$

于是

$$\theta_2 - \theta_1 = \alpha' \tag{3-19}$$

上式表明，当 w 经过 a 点时，$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right)$ 变化 α' 角，于是在 z 平面内顶点 A 处，组成多边形边界的小线段 dz 的倾角将发生 α' 角的突变；当 w 在 a、b 两点之间移动时，$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right)$ 保持不变，故在 z 平面内，多边形的边界线段 AB 的倾角将一直保持不变．

同理，当 w 经过 b 点时，$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right)$ 变化 β' 角；相应地，在 z 平面内顶点 B 处，dz 的倾角将发生 β' 角的突变；当 w 在 b、c 两点之间移动时，在 z 平面内，多边形的边界线段 BC 的倾角一直保持不变．以此类推，当 w 经过 c、d …各点时，在 z 平面内将对应地经

过C、D…各顶点，此时多边形边界线段的倾角将依次发生γ'、δ'…角的突变，直到最后画出所需要的整个多边形为止.

将式（3-14）积分，并考虑到$\alpha+\alpha'=\pi$，$\beta+\beta'=\pi$，…，则用多边形内角α、β、…等表示时，式（3-14）可改写成

$$z = S\int (w-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(w-b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(w-c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}\cdots dw + K \qquad (3\text{-}20)$$

式中S和K是两个常数（复数）；S确定多边形的大小和方位，K确定多边形的位置. 上式就是许-克变换的常用形式.

（二）应用许-克变换时的几个问题

应用许-克变换时，应注意下面几个问题：

1. 若多边形为闭合，则变换式（3-20）中a、b、c…等常数中有3个可以任意选定. 原因如下：设多边形的边数为n，则a、b、c…等常数共有n个，独立的指数α、β、γ…有$n-1$个（指数有n个，但因内角之和$\alpha+\beta+\gamma+\cdots=(n-1)\pi$，故只有$n-1$个独立的指数），加上复数$S$和$K$，它们各有2个实数组成，故共有$2n+3$个常数（实数）. 另一方面，$n$边形仅需$n$个复数即$2n$个实数即可确定其$n$个顶点的位置；故为得到单一的变换，在$a$、$b$、$c$…等常数中有3个可以任意选定.

2. 三个任选常数选择不同的数值时，可得不同的被积函数，从而引起积分难易程度的不同. 为简单计，这三个常数通常选为0，±1，或0，∞，$+1$（或-1）等.

3. 在实际问题中，常常会遇到开多边形的情况，例如图形中具有两条无限长的平行边时［图3-6（a）］. 此时可以认为该两边在无穷远处闭合，即多边形的顶点在无穷远处，内角为0. 若两平行边中有一边为无限长，另一边为有限长［图3-6(b)］，则在有限边的顶点A处，其内角可认为等于2π.

4. 若z平面内多边形的一个顶点对应于w平面内的$\pm\infty$处，则许-克变换中应去掉对应于这个顶点的因子. 这样做可以简化变换公式. 此时三个任选常数中一个为∞，故尚有两个可以任选.

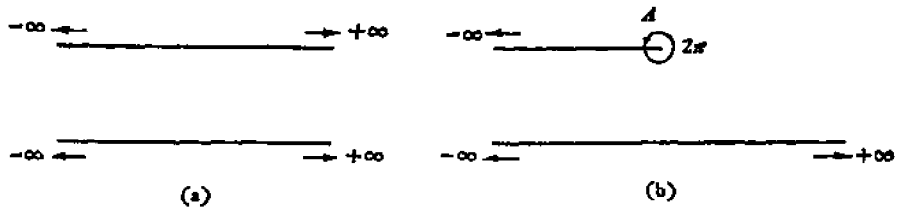


图3-6　多边形中包含有两平行边时
（a）两边均为无限长；（b）一边为无限长，一边为有限长

5. 三个任选常数选定后，变换就唯一地确定. 其他常数可通过w平面和z平面之间的对应关系来确定. 若多边形中具有在无穷远处闭合的平行边时，可以用回路积分法来确定上述待定常数. 若该顶点在w平面内对应于$w=a$这点（$a\neq\infty$），则可以a点为圆

心，作一半径 $\rho\to 0$、θ 从 $\pi\to 0$ 的上半圆，并在 w 平面内进行回路积分. 若该顶点对应于 $w=\pm\infty$ 处，则可以原点为圆心，作一个半径 $\rho\to\infty$、θ 从 $0\to\pi$ 的上半圆，并在 w 平面内进行回路积分. 分别算出在 z 平面内经过该顶点时的 Δz 值和 w 平面内由回路积分所得到的 Δz 值，由此即可确定某个待定常数.

6. 许-克变换所形成的积分，其类型取决于多边形的顶点数和内角的值. 一般来说，顶点数愈多，所包含的直角数愈多，积分时难度就愈大. 当多边形包含两个以上直角时，积分后常出现椭圆函数和其他特殊函数，使求解变得困难.

7. 当多边形边界具有两个不同的磁位时，常需进行两次变换，才能把 z 平面中多边形内部的磁场变换为规则的磁场图形.

（三）许-克变换举例

在用许-克变换解决实际问题之前，先举一个简单的例子. 图 3-7(b)表示一个直角形，边界上的标量磁位等于 0，现求把 z 平面内的磁场变换为 w 平面内均匀磁场的许-克变换.

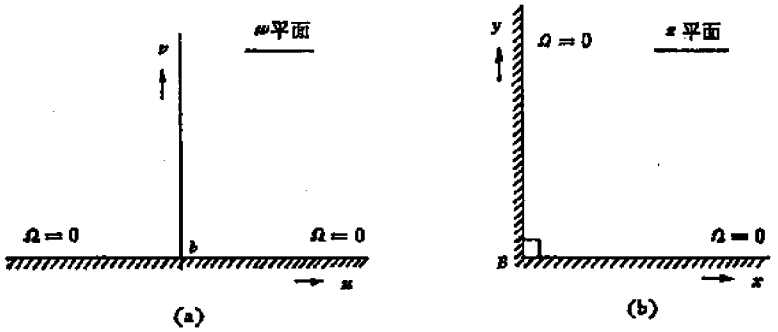


图 3-7　直角形的许-克变换

图 3-7(b)所示直角形可看作为具有二个顶点的多边形，其中一个顶点 A 在无穷远处，在 w 平面内对应的点 a 设为 $\pm\infty$；另一个顶点 B 为直角顶点，$\beta=\dfrac{\pi}{2}$，其 w 平面内的对应点 b 设为 0. 于是许-克变换为

$$\frac{dz}{dw}=S(w-0)^{\frac{1}{2}-1}=Sw^{-\frac{1}{2}}$$

故

$$z=S\int\frac{dw}{w^{\frac{1}{2}}}+K=2Sw^{\frac{1}{2}}+K \tag{3-21}$$

根据 z 平面和 w 平面之间的对应关系（图 3-8），可知 $w=0$ 时，$z=0$，故 $K=0$. 于是

$$z=2Sw^{\frac{1}{2}} \tag{3-22}$$

式中 $2S$ 为图形的尺标系数. 若 $w=4$ 对应于 $z=2$，则 $2S=1$.

图 3-8 表示 w 平面和 z 平面内的磁场分布图. 在 w 平面内磁场为规则磁场（均匀

场），u 代表力线函数 Ψ，v 代表磁位函数 Ω. 在 z 平面内，u=常值的 曲线（磁力线）和 v=常值 的曲线（等位线）为两组互相正交的双曲线.

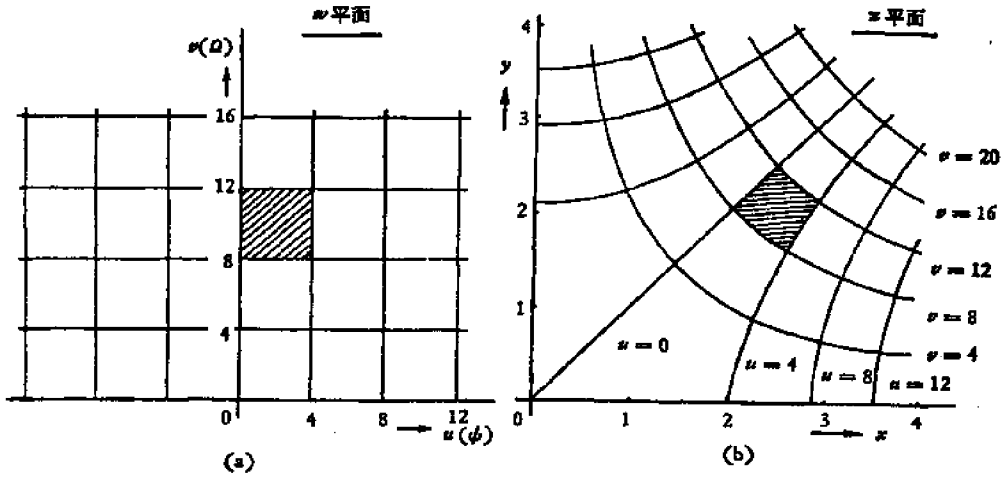


图 3-8　变换为 $z=w^{\frac{1}{\tau}}$ 的磁场图形

3-3　主极磁场的边缘效应[1,2,4,5]

在电机磁路计算中，常常用到主极的有效长度，这是考虑主极磁场边缘效应时的一个计算长度.

设主极磁位为+1，电枢铁心磁位为−1，如图 3-9 所示；则在气隙中心处可作一磁位为 0 的对称线，如图中点线所示. 这样，一个包含两个直角的多边形，就简化成包含一个直角的多边形，如图 3-10(c)z 平面中的图形. 由于这个多边形的边界上有两种磁位，故要进行两次许-克变换，第一次把 z 平面变换到 w 平面，第二次再用对数变换把 w 平面变换到 t 平面，在 t 平面内得到规则的磁场图形.

z 平面和 w 平面的对应关系如图 3-10 和下表所示，其中 a、b、c 三点的坐标分别选为 $a=-1$，$b=0$，$c=\pm\infty$.

w 平面		多边形内角	z 平面	
点	坐标		点	坐标
a	-1	$\frac{3}{2}\pi$	A	$j\frac{\delta}{2}$
b	0	0	B	$-\infty+j\frac{\delta}{2}$ $-\infty$
c	$\pm\infty$		C	$+\infty$ $+j\infty$

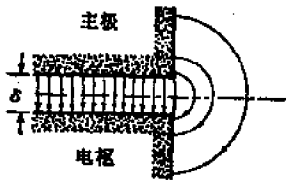


图 3-9　主极磁场的边缘效应

于是图 3-10 的许-克变换为

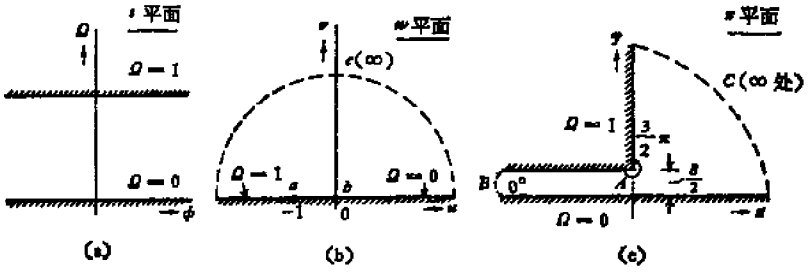


图 3-10　z-w-t 平面的对应关系

$$\frac{dz}{dw} = S(w+1)^{\frac{3}{2}-1}w^{-1} = S\frac{(w+1)^{\frac{1}{2}}}{w} \tag{3-23}$$

故

$$z = S\int \frac{(w+1)^{\frac{1}{2}}}{w}dw + K$$

$$= S\left[2(w+1)^{\frac{1}{2}} + \ln\frac{(w+1)^{\frac{1}{2}}-1}{(w+1)^{\frac{1}{2}}+1}\right] + K \tag{3-24}$$

式（3-24）中的 S 值可由回路积分法确定. 在 z 平面内，当经过 B 点时，跨越了 $\frac{\delta}{2}$，

$$\Delta z = \int_{-\infty+j\frac{\delta}{2}}^{-\infty+j0} dz = -j\frac{\delta}{2}$$

在 w 平面内，当经过 b 点时，作一个半径趋于零的半圆，$w=\rho e^{j\theta}$，$\rho\to 0$，θ 由 $\pi\to 0$，于是

$$\Delta z = \lim_{\rho\to 0} S\int_{\pi}^{0} \frac{(\rho e^{j\theta}+1)^{\frac{1}{2}} j\rho e^{j\theta}}{\rho e^{j\theta}}d\theta = jS\int_{\pi}^{0} d\theta = -jS\pi$$

故

$$-j\frac{\delta}{2} = -jS\pi \qquad \text{或} \quad S = \frac{\delta}{2\pi} \tag{3-25}$$

再求 K 值. 由于 $w=-1$ 对应于 $z=j\frac{\delta}{2}$，于是

$$j\frac{\delta}{2} = S\ln(-1) + K = \frac{\delta}{2\pi}j\pi + K$$

所以

$$K = 0 \tag{3-26}$$

把求出的 S、K 代入式(3-24)，可得

$$z = \frac{\delta}{2\pi}\left[2(w+1)^{\frac{1}{2}} + \ln\frac{(w+1)^{\frac{1}{2}}-1}{(w+1)^{\frac{1}{2}}+1}\right] \tag{3-27}$$

再用对数变换把 w 平面变换到 t 平面

$$t = \frac{1}{\pi}\ln w \quad \text{或} \quad w = e^{\pi t} \tag{3-28}$$

最后可得 z 平面与 t 平面之间的变换关系：

$$z=\frac{\delta}{2\pi}\left[2(e^{w}+1)^{\frac{1}{2}}+\ln\frac{(e^{w}+1)^{\frac{1}{2}}-1}{(e^{w}+1)^{\frac{1}{2}}+1}\right] \tag{3-29}$$

在 t 平面内，磁场是规则的.

z 平面内任一点的磁感强度应为

$$\begin{aligned}B&=\mu_0 H=\mu_0\left|\frac{dt}{dz}\right|=\mu_0\left|\frac{dt}{dw}\frac{dw}{dz}\right|\\&=\mu_0\left|\frac{1}{\pi w}\frac{2\pi}{\delta}\frac{w}{(w+1)^{\frac{1}{2}}}\right|=\mu_0\frac{2}{\delta}\left|\frac{1}{(w+1)^{\frac{1}{2}}}\right|\end{aligned} \tag{3-30}$$

在铁心中部（z 平面内的 B 点），$z\to-\infty$，$w\to 0$，磁感强度为最大并趋于均匀，$B_{max}=\mu_0\frac{2}{\delta}$. 把此磁感强度作为基值，则任一点磁感强度的相对值为

$$\frac{B}{B_{max}}=\left|\frac{1}{(w+1)^{\frac{1}{2}}}\right| \tag{3-31}$$

在 z 平面的横轴（即气隙中心线）上，对应的 w 值均为正值. 把 w=0.1，0.2，0.5，1，3，5，8，15，80 等值依次代入式(3-31)和(3-29)，算出各$\frac{B}{B_{max}}$和 x 值如表 3-1，由此即可画出气隙中心线处的磁感强度分布，如图 3-11 所示.

表 3-1　气隙中心线处磁感强度的分布$\frac{B}{B_{max}}=f(x)$

w	0.1	0.2	0.5	1	3	8	15	80	
$a=(w+1)^{\frac{1}{2}}$	1.049	1.095	1.225	1.414	2	3	4	9	
$\frac{B}{B_{max}}=\frac{1}{a}$	0.953	0.913	0.817	0.707	0.500	0.333	0.250	0.111	
$\frac{x}{\frac{\delta}{2}}=\frac{1}{\pi}\left[2a+\ln\frac{a-1}{a+1}\right]$	−0.522	−0.286	0.050	0.339	0.923	1.689	2.384	5.658	

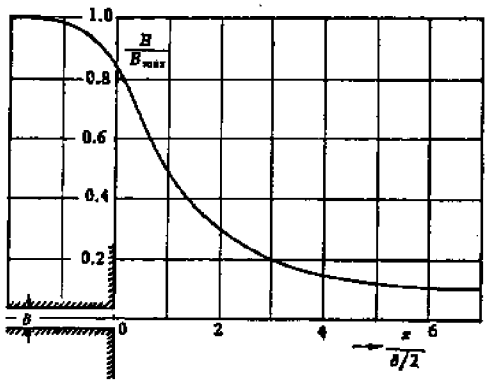


图 3-11　主极边缘的$\frac{B}{B_{max}}=f(x)$

3-4　凸极电机主极的极间漏磁[1,2,4,6]

在计算凸极电机主极的极间漏磁，槽内具有载流导体时齿顶的漏磁时，都会用到图3-12所示的简化图形．图中的多边形含有两个直角，其中一边的标量磁位为$+\Omega_0$，另一边为$-\Omega_0$，对面磁位为0．由于对称关系，只需研究图形的一半；于是可得图3-13中z平面内的图形，图中右边磁位为Ω_0，左边磁位为0．

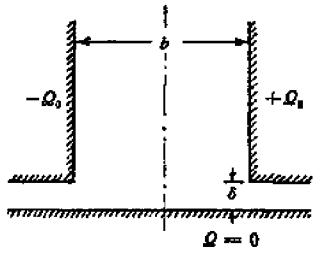
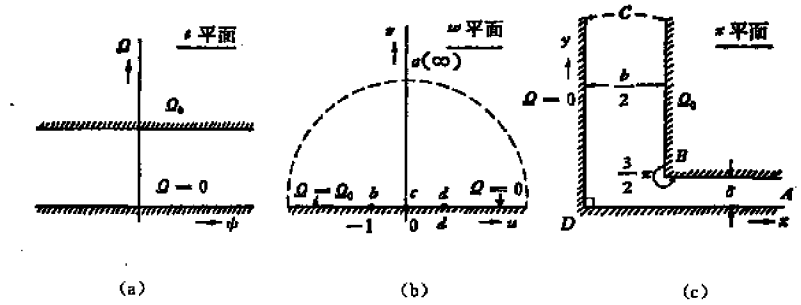


图3-12　凸极电机主极的极间空间

z平面和w平面的对应关系为：

w平面		多边形内角	z平面	
点	坐标		点	坐标
a	$\pm\infty$		A	$+\infty+j\delta$ $+\infty$
b	-1	$\frac{3}{2}\pi$	B	$\frac{b}{2}+j\delta$
c	0	0	C	$\frac{b}{2}+j\infty$ $j\infty$
d	d(待定)	$\frac{\pi}{2}$	D	0



(a)　(b)　(c)

图3-13　z-w-t平面的对应关系

此时许-克变换为

$$\frac{dz}{dw}=S(w+1)^{\frac{1}{2}}w^{-1}(w-d)^{-\frac{1}{2}}$$

故

$$z=S\int\frac{1}{w}\sqrt{\frac{w+1}{w-d}}\,dw+K \tag{3-32}$$

令$p=\sqrt{\frac{w-d}{w-1}}$，将式(3-32)改用p来表示并进行积分，可得

$$z=2S\left[\frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{p}{\sqrt{d}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\right]+K \tag{3-33}$$

由于$z=0$时，$w=d$，故$K=0$．常数S和d可用回路积分法来确定．

在 z 平面内通过 A 点时，

$$\Delta z = \int_{-\infty+j0}^{+\infty+j\delta} dz = j\delta$$

在 w 平面相当于通过一个以原点为圆心、半径为无限大的半圆，即 $w=\rho e^{j\theta}$，$\rho\to\infty$，θ 从 $0\to\pi$. 此时

$$\Delta z = \lim_{\rho\to\infty} S\int_0^{\pi} \frac{(\rho e^{j\theta}+1)^{\frac{1}{2}} j\rho e^{j\theta} d\theta}{\rho e^{j\theta}(\rho e^{j\theta}-d)^{\frac{1}{2}}} = jS\pi$$

故

$$S = \frac{\delta}{\pi} \tag{3-34}$$

在 z 平面内经过顶点 C 时，

$$\Delta z = \int_{\frac{b}{2}+j\infty}^{j\infty} dz = -\frac{b}{2}$$

在 w 平面内相当于经过围绕原点的一个半径为无穷小的半圆，即 $w=\rho e^{j\theta}$，$\rho\to 0$，θ 从 $\pi\to 0$；此时

$$\Delta z = \lim_{\rho\to 0} \frac{\delta}{\pi}\int_{\pi}^{0} \frac{(\rho e^{j\theta}+1)^{\frac{1}{2}} j\rho e^{j\theta}}{\rho e^{j\theta}(\rho e^{j\theta}-d)^{\frac{1}{2}}} d\theta = -\frac{\delta}{\sqrt{d}}$$

故

$$d = \left(\frac{2\delta}{b}\right)^2 \tag{3-35}$$

把求出的 S、K 和 d 代入式(3-33)，最后可得

$$z = \frac{2\delta}{\pi}\left[\frac{b}{2\delta}\operatorname{tg}^{-1}\frac{bp}{2\delta} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\right] \tag{3-36}$$

再利用对数变换，把 w 平面变换到 t 平面，

$$t = \Psi + j\Omega = \frac{\Omega_0}{\pi}\ln w \tag{3-37}$$

即可把 z 平面内的磁场变换为 t 平面内的规则磁场.

磁感强度为

$$\begin{aligned} B &= \mu_0\left|\frac{dt}{dz}\right| = \mu_0\left|\frac{dt}{dw}\frac{dw}{dz}\right| \\ &= \mu_0\left|\frac{\Omega_0}{\pi}\frac{1}{w}\frac{\pi}{\delta}w\sqrt{\frac{w-d}{w+1}}\right| = \mu_0\frac{\Omega_0}{\delta}\left|\sqrt{\frac{w-d}{w+1}}\right| \end{aligned} \tag{3-38}$$

由于 $\mu_0\dfrac{\Omega_0}{\delta}$ 为气隙中的最大磁感强度 B_{max}（均匀磁场处的磁感强度），故式（3-38）可改写为

$$\frac{B}{B_{max}} = \left|\sqrt{\frac{w-d}{w+1}}\right| \tag{3-39}$$

在电枢表面 DA 上，w 为正数且大于 d. 给定不同的 w 值，例如 $w=d$，$2d$，$3d$，…，分别求出对应的 $\dfrac{B}{B_{max}}$ 和 x 值，即可画出电枢表面的磁场分布 $B=f(x)$，如图 3-14 所示. 图 3-15 表示 $\dfrac{b}{2\delta}=5$ 时的磁场图形，图中的虚线表示主磁场和主极漏磁场的分界线. 极间漏

磁场确定后，即可求出极间的漏磁系数.

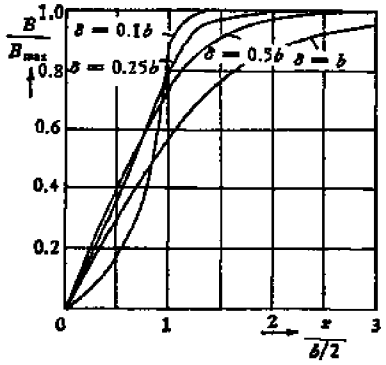


图 3-14　电枢表面磁场的分布

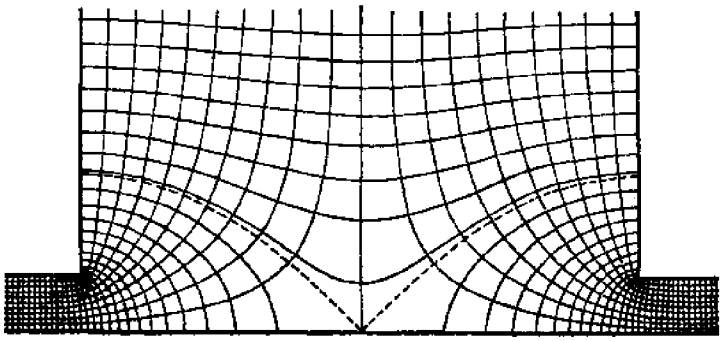


图 3-15　极间漏磁场的分布

3-5　电枢开槽时的气隙磁场和卡氏因数[1,7]

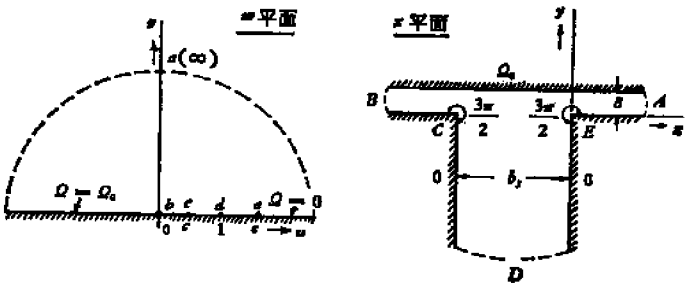
现代交、直流电机的电枢绕组都置放在开槽的电枢铁心里. 电枢开槽一方面改变了气隙磁场的分布，另一方面使气隙磁阻增大. 为计及这一效应，在磁路计算时引入了有效气隙 δ'，$\delta'=k_c\delta$，k_c 称为卡氏因数，$k_c\geqslant 1$. 下面先研究电枢开槽时的气隙磁场，然后导出卡氏因数.

(一) 电枢开槽时的气隙磁场

卡特在分析这一问题时假定：

1. 定、转子表面只有一面开槽，另一面为光滑；
2. 槽深为无限深；
3. $\mu_{Fe}=\infty$，即两面均为等磁位面，一面磁位为 0，另一面为 Ω_0，如图 3-16 所示.

由于两边的磁位不同，所以要进行两次变换. 先用许-克变换把 z 平面变换到 w 平



(a) (b)

图 3-16 z-w 平面的对应关系

面，使 w 平面内正实轴的磁位为 0，负实轴的磁位为 Ω_0；再用对数变换把 w 平面变换到 t 平面，在 t 平面内磁场是规则的.

z 平面和 w 平面的对应关系为：

w 平面		多边形内角	z 平面	
点	坐标		点	坐标
a	$\pm\infty$		A	$+\infty+j0$ $+\infty+j\delta$
b	0	0	B	$-\infty+j0$ $-\infty+j\delta$
c	c（待定）	$\frac{3}{2}\pi$	C	$-b_2$
d	1	0	D	$-b_2-j\infty$ $-j\infty$
e	e（待定）	$\frac{3}{2}\pi$	E	0

上表中 δ 为气隙，b_2 为槽宽. 由此可得本问题的许-克变换为

$$\frac{dz}{dw}=Sw^{-1}(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-1)^{-1}(w-e)^{\frac{1}{2}}$$

$$=S\frac{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}{w(w-1)} \tag{3-40}$$

故

$$z=S\int\frac{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}{w(w-1)}dw+K \tag{3-41}$$

下面来求变换中的各个常数.

对于 A 点，在 z 平面内

$$\Delta z=\int_{\infty+j0}^{\infty+j\delta}dz=j\delta$$

在 w 平面内

$$\Delta z = \lim_{\rho\to\infty} S\int_0^{\pi} \frac{(\rho e^{j\theta}-c)^{\frac{1}{2}}(\rho e^{j\theta}-e)^{\frac{1}{2}} j\rho e^{j\theta}}{\rho e^{j\theta}(\rho e^{j\theta}-1)} d\theta = jS\pi$$

故

$$S = \frac{\delta}{\pi} \tag{3-42}$$

把 S 代入式(3-41)，可得

$$z = \frac{\delta}{\pi}\int \frac{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}{w(w-1)} dw + K \tag{3-43}$$

对 B 点，在 z 平面内

$$\Delta z = \int_{-\infty+j\delta}^{-\infty+j0} dz = -j\delta$$

在 w 平面中

$$\Delta z = \lim_{\rho\to 0} \frac{\delta}{\pi}\int_{\pi}^{0} \frac{(\rho e^{j\theta}-c)^{\frac{1}{2}}(\rho e^{j\theta}-e)^{\frac{1}{2}}}{\rho e^{j\theta}(\rho e^{j\theta}-1)} j\rho e^{j\theta}\, d\theta = -j\delta\sqrt{ce}$$

故

$$\sqrt{ce} = 1 \qquad 或 \quad c = \frac{1}{e} \tag{3-44}$$

再设 $p=\sqrt{\dfrac{w-e}{w-c}}$，即 $w=\dfrac{cp^2-e}{p^2-1}$，$dw=\dfrac{2p\ (e-c)}{(p^2-1)^2}dp$，在式(3-43)中用 p 代替 w，然后积分，可得

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\delta}{\pi}\int \frac{(e+1)^2(e-1)p^2}{(1-p^2)(e^2-p^2)(e+p^2)} dp + K \\ &= \frac{2\delta}{\pi}\int\left(\frac{1}{1-p^2} - \frac{e}{e^2-p^2} - \frac{e-1}{e+p^2}\right) dp + K \\ &= \frac{\delta}{\pi}\left[\ln\frac{1+p}{1-p} - \ln\frac{e+p}{e-p} - \frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{p}{\sqrt{e}}\right] + K \end{aligned} \tag{3-45}$$

对 E 点，$w=e$（即 $p=0$），$z=0$，故

$$K = 0 \tag{3-46}$$

对 C 点，$w=c$（即 $p=\infty$），$z=-b_t$；即

$$-b_t = \lim_{p\to 0}\frac{\delta}{\pi}\left[\ln\frac{1+p}{1-p} - \ln\frac{e+p}{e-p} - \frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{p}{\sqrt{e}}\right] = -\frac{\delta}{\pi}\frac{e-1}{\sqrt{e}}\pi$$

故

$$\frac{b_t}{\delta} = \frac{e-1}{\sqrt{e}} \qquad 或 \quad e = \left[\frac{b_t}{2\delta} + \sqrt{\left(\frac{b_t}{2\delta}\right)^2+1}\right]^2 \tag{3-47}$$

这样，全部常数都被确定.

把求出的各个常数代入式(3-45)，可得

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{\delta}{\pi}\left[\ln\frac{1+p}{1-p} - \ln\frac{e+p}{e-p} - \frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{p}{\sqrt{e}}\right] \\ p &= \sqrt{\frac{w-e}{w-c}}, \quad e = \left[\frac{b_t}{2\delta} + \sqrt{\left(\frac{b_t}{2\delta}\right)^2+1}\right]^2, \quad c = \frac{1}{e} \end{aligned}\right\} \tag{3-48}$$

再用对数变换把 w 平面变换到 t 平面

$$t=\frac{\Omega_0}{\pi}\ln w \tag{3-49}$$

最后可得 t 平面与 z 平面之间的关系 $t=t(z)$.

气隙和槽内的磁感强度为

$$B=\mu_0\left|\frac{dt}{dw}\right|=\mu_0\left|\frac{dt}{dw}\frac{dw}{dz}\right|=\mu_0\left|\frac{\Omega_0}{\pi}\frac{1}{w}\frac{\pi}{\delta}\frac{w(w-1)}{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}\right|$$

$$=\mu_0\frac{\Omega_0}{\delta}\left|\frac{w-1}{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}\right| \tag{3-50}$$

式中 $\mu_0\frac{\Omega_0}{\delta}=B_{max}$ 为距槽口无限远处的磁感强度（即均匀气隙时的磁感强度）；于是

$$\frac{B}{B_{max}}=\left|\frac{w-1}{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}\right| \tag{3-51}$$

令 $\frac{dB}{dw}=0$，可知最小磁感强度 B_{min} 发生在 $w=-1$（对应于 $z=-\frac{b_s}{2}+j\delta$）处. 把 $w=-1$ 代入上式，可得

$$\frac{B_{min}}{B_{max}}=\frac{2}{(c+e+2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3-52}$$

如要得到光滑表面 AB 上的磁感强度，只要把 w 用不同的负实数代入式(3-51)和(3-48)，分别求出 $\frac{B}{B_{max}}$ 和对应的 x 值，即可得到 AB 面上的 $B=f(x)$. 例如，对 $\frac{b_t}{\delta}=1.5$ 的情况，$e=(0.75+\sqrt{0.75^2+1})^2=4, c=0.25, p=\sqrt{\frac{w-4}{w-0.25}}$，

$$\frac{B}{B_{max}}=\left|\frac{w-1}{(w-0.25)^{\frac{1}{2}}(w-4)^{\frac{1}{2}}}\right|$$

$$\frac{x}{\delta}=\frac{1}{\pi}\left[\ln\left|\frac{1+p}{1-p}\right|-\ln\left|\frac{4+p}{4-p}\right|-3\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{p}{2}\right]$$

由此可算出 $\frac{B}{B_{max}}=f(x)$，如表 3-2.

表 3-2　电枢开槽时的气隙磁场分布 $B=F(X)$

w	−0.01	−0.05	−0.1	−0.2	−0.4	−0.6	−1.0
$\frac{B}{B_{max}}$	0.989	0.953	0.918	0.873	0.824	0.809	0.800
$\frac{x}{\delta}$	−2.377	−1.852	−1.616	−1.370	−1.068	−0.953	−0.750

图 3-17(a)表示 $\frac{b_s}{\delta}=1.5$ 时，按上表画出的光滑面上的磁场分布. 从图可见，当 $\frac{x}{\delta}=1.22$ 时，$\frac{B}{B_{max}}\approx 1$. 这表明，当齿宽 $b_s>2.44\delta$ 时，即可不考虑相邻槽的影响. 图 3-17(a)是 $\frac{b_s}{\delta}=2.45$，$\frac{b_t}{b_s}=\frac{b_s}{\delta}\frac{\delta}{b_s}=\frac{1.5}{2.45}=0.612$ 时的情况；图 3-17(b)是 $\frac{b_s}{\delta}=12$，$\frac{b_t}{b_s}=1$ 时的情况.

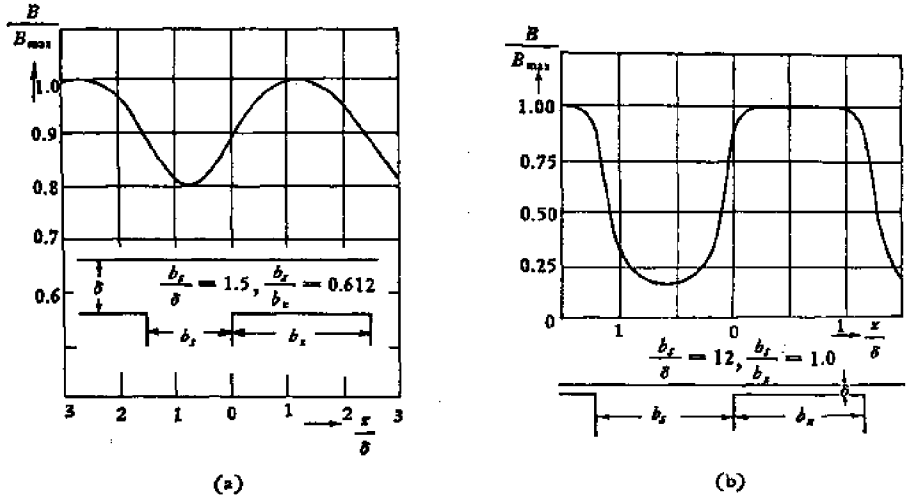


图 3-17　光滑面 AB 上的磁场分布

(a) $\frac{b_t}{\delta}=1.5$，$\frac{b_t}{b_z}=0.612$ 时；(b) $\frac{b_t}{\delta}=12$，$\frac{b_t}{b_z}=1$ 时

（二）卡氏因数

下面计算由于开槽所减少的磁通量，并导出卡氏因数.

不开槽时，$\frac{B}{B_{max}}=1$；开槽时，$\frac{B}{B_{max}}<1$. 由于开槽使单位轴向长度内所减少的磁通量 $\Delta\Phi$ 为

$$\Delta\Phi=\mu_0\frac{\Omega_0}{\delta}\int_{-\infty+j\delta}^{+\infty+j\delta}\left(1-\frac{B}{B_{max}}\right)dx \tag{3-53}$$

由于

$$\frac{B}{B_{max}}=\frac{w-1}{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}},\quad dx=\frac{\delta}{\pi}\frac{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}{w(w-1)}dw$$

故

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\mu_0\frac{\Omega_0}{\pi}\frac{\delta}{\pi}\int_0^{-\infty}\left[1-\frac{w-1}{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}{w(w-1)}dw\\&=B_{max}\frac{\delta}{\pi}\int_0^{-\infty}\left[\frac{(w-c)^{\frac{1}{2}}(w-e)^{\frac{1}{2}}}{w(w-1)}-\frac{1}{w}\right]dw\\&=B_{max}\frac{2\delta}{\pi}\left[\frac{e-1}{\sqrt{e}}\left(\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{e}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{e}}\right)-\ln\frac{(e+1)^2}{4e}\right]\end{aligned} \tag{3-54}$$

考虑到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e-1}{\sqrt{e}}=\frac{b_t}{\delta},\quad\frac{(e+1)^2}{4e}=1+\left(\frac{b_z}{\delta}\right)^2,\\&\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{e}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{e}}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_z}{2\delta}.\end{aligned}\right\}$$

所以

$$\Delta\Phi = B_{max}\frac{2\delta}{\pi}\left\{\frac{b_s}{\delta}\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_t}{2\delta} - \ln\left[1+\left(\frac{b_s}{2\delta}\right)^2\right]\right\} = B_{max}b_s\sigma \tag{3-55}$$

式中

$$\sigma = \frac{2}{\pi}\left\{\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_s}{2\delta} - \frac{\delta}{b_s}\ln\left[1+\left(\frac{b_s}{2\delta}\right)^2\right]\right\} \tag{3-56}$$

于是，卡氏因数 k_c 就等于

$$k_c = \frac{\Phi_{不开槽}}{\Phi_{不开槽}-\Delta\Phi} = \frac{B_{max}t_z}{B_{max}(t_z-b_s\sigma)} = \frac{t_z}{t_z-b_s\sigma} \tag{3-57}$$

式中 t_z 为齿距，$t_z=b_t+b_z$. 图 3-18 表示 $k_c=f\left(\frac{b_t}{\delta},\ \frac{b_s}{b_z}\right)$.

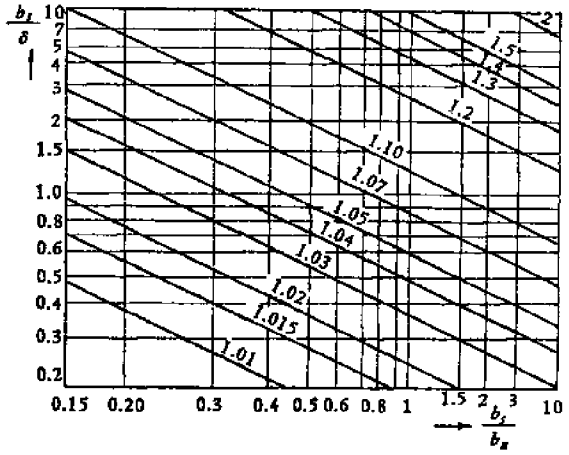


图 3-18 卡氏因数 $k_c=f\left(\frac{b_t}{b_z},\frac{b_s}{\delta}\right)$

当定、转子都开槽时，气隙磁场和卡氏因数的计算更为复杂. 详细的计算表明，此时合成的卡氏因数可近似用下式来计算：

$$k_c \approx k_{c1}\cdot k_{c2} \tag{3-58}$$

式中 k_{c1}和 k_{c2}分别为定子和转子单面开槽时的卡氏因数.

3-6 电枢开有一系列齿、槽时的气隙磁场[1,8—10]

上节研究了单槽时的卡氏因数. 实际电枢开有一系列大小相同的齿、槽，下面进一步研究这种情况下的气隙磁场和卡氏因数.

分析此问题时，假定：

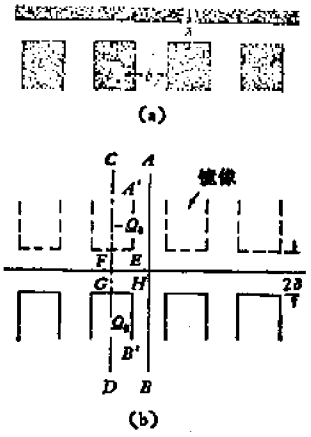
1. 电枢对面为不开槽的铁磁平面；
2. 电枢槽形为无限深的开口槽；
3. $\mu_{Fe}=\infty$，开槽面的磁位为 Ω_0，光滑面的磁位为 0.

图 3-19 (a) 表示本问题的图形和尺寸. 以光滑面为镜面，利用镜像法，可以得到一组镜像，如图 3-19(b)中虚线所示. 考虑到图 3-19(b)中 AB、CD 为磁场的对称线，所以

事实上只要分析 AB 和 $A'EFGHB'$ 这两条线之间所包含的区域即可.

（一）第一次变换

若 GHB' 的标量磁位为 $+\Omega_0$，则 $A'EF$ 的磁位为 $-\Omega_0$. 将此图形放到 z 平面内，如图 3-20 所示，则 y 轴的磁位为 0，AB、FG 与磁力线重合. 此时 z 平面与 w 平面的对应关系为：



w 平面		多边形内角	z 平面	
点	坐标		点	坐标
a	$-\frac{1}{k_1}$（待定）	0	A	$-\infty+j\frac{1}{2}(b_1+b_2)$ $-\infty+j\frac{1}{2}b_1$
e	$-\frac{1}{k}$（待定）	$\frac{3}{2}\pi$	E	$-\delta+j\frac{b_2}{2}$
f	-1	$\frac{\pi}{2}$	F	$-\delta$
g	$+1$	$\frac{\pi}{2}$	G	$+\delta$
h	$\frac{1}{k}$	$\frac{3}{2}\pi$	H	$\delta+j\frac{b_2}{2}$
b	$\frac{1}{k_1}$	0	B	$\infty+j\frac{b_2}{2}$ $\infty+j\frac{1}{2}(b_1+b_2)$

图 3-19　电枢上开有一系列开口槽的情况

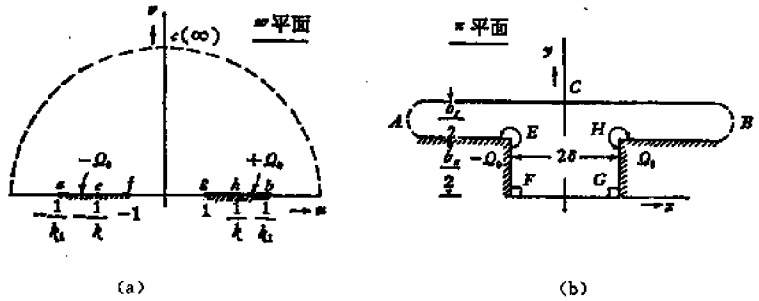


图 3-20　z-w 平面的对应关系

本题原来有 a、e、h、b 四点的坐标待定，但因图形对称关系，h、b 的坐标与 e、a 的坐标相差一个负号，故实际上只有两个常数 $\frac{1}{k}$ 和 $\frac{1}{k_1}$ 待定. 由于 h 点和 b 点在 g 点的左侧，故 $\frac{1}{k}$ 和 $\frac{1}{k_1}$ 均大于 1，k 和 k_1 均小于 1，于是 k 和 k_1 可作为椭圆函数的模.

z-w 平面间的许-克变换为

$$\frac{dz}{dw}=S_1\left(w+\frac{1}{k_1}\right)^{-1}\left(w+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}(w+1)^{-\frac{1}{2}}(w-1)^{-\frac{1}{2}}\left(w-\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(w-\frac{1}{k_1}\right)^{-1}$$

$$=S_1\frac{\left(w^2-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{(w^2-1)^{\frac{1}{2}}\left(w^2-\frac{1}{k_1^2}\right)}=S'_1\frac{(1-k^2w^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}(1-k_1^2w^2)} \tag{3-59}$$

式中 $S_1'=-S_1\frac{k_1^2}{k}$. 于是

$$z=S_1'\int_0^w\frac{(1-k^2w^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}(1-k_1^2w^2)}dw \tag{3-60}$$

引入变量 p，使 $w=\mathrm{sn}p$，$dw=\mathrm{cn}p\mathrm{dn}p\cdot dp=\mathrm{cn}p\ (1-k^2\mathrm{sn}^2p)^{\frac{1}{2}}dp$，则用 p 表示时，式(3-60)可改写成

$$\begin{aligned}z&=S_1'\int_0^p\frac{(1-k^2\mathrm{sn}^2p)^{\frac{1}{2}}(1-k^2\mathrm{sn}^2p)^{\frac{1}{2}}\mathrm{cn}p}{(1-k_1^2\mathrm{sn}^2p)\mathrm{cn}p}dp\\&=S_1'\int_0^p\frac{1-k^2\mathrm{sn}^2p}{1-k_1^2\mathrm{sn}^2p}dp\\&=S_1'\int_0^p\left[1+(k_1^2-k^2)\frac{\mathrm{sn}^2p}{1-k_1^2\mathrm{sn}^2p}\right]dp\\&=S_1'\left[p+(k_1^2-k^2)\int_0^p\frac{\mathrm{sn}^2p}{1-k_1^2\mathrm{sn}^2p}dp\right]\end{aligned} \tag{3-61}$$

再引入参数 α，使 $k_1=k\mathrm{sn}\alpha$，则 $k_1^2-k^2=-k^2\mathrm{cn}^2\alpha$，于是式(3-61)就变成

$$\begin{aligned}z&=S_1'\left[p-k^2\mathrm{cn}^2\alpha\int_0^p\frac{\mathrm{sn}^2pdp}{1-k_1^2\mathrm{sn}^2p}\right]\\&=S_1'\left[p-\frac{\mathrm{cn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha\mathrm{dn}\alpha}\Pi_J(p,\alpha)\right]\end{aligned} \tag{3-62}$$

式中 Π_J 为第三类椭圆积分.

常数 S_1' 可从 B 点的 Δz 值来确定. 对于 B 点，在 z 平面内

$$\Delta z=\int_{\infty+j\frac{b_x}{2}}^{\infty+j\frac{1}{2}(b_x+bx)}dz=j\frac{b_x}{2}$$

在 w 平面中，$w=\frac{1}{k_1}+\rho e^{j\theta}$，$\rho\to0$，$\theta$ 从 $\pi\to0$，

$$\begin{aligned}\Delta z&=S_1'\lim_{\rho\to0}\int_\pi^0\frac{\left(1-\frac{k^2}{k_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}j\rho e^{j\theta}d\theta}{\left(1-\frac{1}{k_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-k_1^2\left(\frac{1}{k_1^2}+2\frac{1}{k_1}\rho e^{j\theta}+\rho^2e^{j2\theta}\right)\right]}\\&=S_1'\lim_{\rho\to0}\frac{\left(1-\frac{k^2}{k_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{1}{k_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}}j\int_\pi^0\frac{d\theta}{-2k_1-k_1^2\rho e^{j\theta}}\\&=jS_1'\frac{\pi}{2k_1}\frac{(k^2-k_1^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-k_1^2)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

故

$$S_1'=\frac{b_x}{\pi}\frac{k_1(1-k_1^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2-k_1^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3-63}$$

考虑到 $k_1=k\mathrm{sn}\alpha$，故

$$S_1'=\frac{b_x}{\pi}\frac{k\mathrm{sn}\alpha(1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{k\ \mathrm{cn}\alpha}=\frac{b_x}{\pi}\frac{\mathrm{sn}\alpha\ \mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha} \tag{3-64}$$

因为 k 和 k_1 是实数，且 $k>k_1$，故 α 亦是实数，S_1' 亦是实数.

把 S_1' 代入式（3-62），可得

$$z=\frac{b_s}{\pi}\left[p\frac{\mathrm{sn}\alpha\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha}-\Pi_J(p,\alpha)\right] \tag{3-65}$$

下面进一步来求 k、α 与槽形和气隙尺寸之间的关系.

在 H 点，$w=\frac{1}{k}$，$z=\delta+j\frac{b_z}{2}$. 由于

$$p=\mathrm{sn}^{-1}w=\int_0^w\frac{dw}{(1-w)^{\frac{1}{2}}\ (1-k^2w^2)^{\frac{1}{2}}}$$

故

$$p_{\left(w=\frac{1}{k}\right)}=\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{dw}{(1-w)^{\frac{1}{2}}\ (1-k^2w^2)^{\frac{1}{2}}}=K+jK' \tag{3-66}$$

式中 K 为完全椭圆积分，K' 为补模的完全椭圆积分. 将此 p 值代入式（3-65），可得

$$\delta+j\frac{b_z}{2}=\frac{b_s}{\pi}\left[(K+jK')\frac{\mathrm{sn}\alpha\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha}-\Pi_J(K+jK',\alpha)\right] \tag{3-67}$$

由于

$$\Pi_J(K+jK',\alpha)=j\pi\frac{\alpha}{2K}+(K+jK')Z(\alpha)$$

式（3-67）可分解为两个式子

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta}{b_s}&=\frac{K}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sn}\alpha\ \mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha}-Z(\alpha)\right]\\ \frac{b_z}{b_s}&=\frac{2K'}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sn}\alpha\ \mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha}-Z(\alpha)\right]-\frac{\alpha}{K}\end{aligned}\right\} \tag{3-68}$$

式中 $Z(\alpha)$ 为雅可比 Zeta 函数.

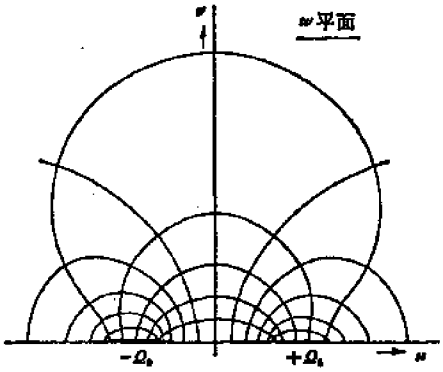


图 3-21　w 平面内的磁场分布

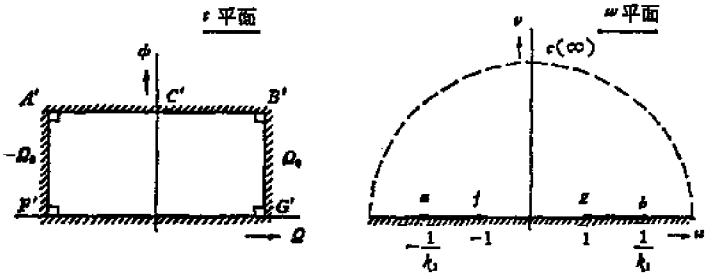
式(3-68)给出了$\frac{\delta}{b_s}$、$\frac{b_z}{b_s}$与 α、k 的关系. 实际计算时，先给出不同的 α 和 k，由式（3-68）算出一系列的$\frac{\delta}{b_s}$和$\frac{b_z}{b_s}$，然后画成曲线；再由问题中给定的$\frac{\delta}{b_s}$和$\frac{b_z}{b_s}$，从曲线上查出 k 和 α 值.

图 3-21 表示 w 平面内的磁场分布. 从图可见，此时的磁场分布仍很复杂，故需再进行一次许-克变换，使 t 平面内的磁场成为规则磁场(均匀磁场).

（二）第二次变换

把 w 平面进一步变换到 t 平面，使 t 平面内的多边形成为矩形；与纵坐标平行的两条边界上标量磁位分别为 $+\Omega_0$ 和 $-\Omega_0$，与横坐标平行的两条边界则与磁力线重合，如图 3-22 所示，则在 t 平面的矩形内部可得均匀磁场.

t 平面和 w 平面的对应关系为



(a) (b)

图 3-22 t-w 平面的对应关系

t 平面	多边形内角	w 平面	
A'	$\frac{\pi}{2}$	a	$-\frac{1}{k_1}$
F'	$\frac{\pi}{2}$	f	-1
G'	$\frac{\pi}{2}$	g	1
B'	$\frac{\pi}{2}$	b	$\frac{1}{k_1}$

t 平面与 w 平面间的变换为

$$\frac{dt}{dw}=S_2\left(w+\frac{1}{k_1}\right)^{-\frac{1}{2}}(w+1)^{-\frac{1}{2}}(w-1)^{-\frac{1}{2}}\left(w-\frac{1}{k_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3-69}$$

故

$$\begin{aligned}t&=S_2\int_0^w\frac{dw}{\left(w^2-\frac{1}{k_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}(w^2-1)^{\frac{1}{2}}}\\&=S_2'\int_0^w\frac{dw}{(1-k_1^2w^2)^{\frac{1}{2}}(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}\\&=S_2'\mathrm{sn}^{-1}(w,k_1)\end{aligned} \tag{3-70}$$

式中 $S_2'=-k_1S_2$.

常数 S_2' 可用 g 点的对应关系来确定. 当 $w=1$ 时，$t=\Omega_0$，于是

$$\Omega_0=S_2'\mathrm{sn}^{-1}(1)=S_2'K(k_1)$$

故

$$S_2'=\frac{\Omega_0}{K(k_1)} \tag{3-71}$$

把 S_2' 代入式(3-70)，可得

$$t=\frac{\Omega_0}{K(k_1)}\mathrm{sn}^{-1}(w,k_1) \tag{3-72}$$

（三）磁感强度和卡氏因数

在 z 平面的多边形内部，磁感强度为

$$B=\mu_0\left|\frac{dt}{dz}\right|=\mu_0\left|\frac{dt}{dw}\frac{dw}{dz}\right|$$

$$=\mu_0\left|\frac{\Omega_0}{K(k_1)}\frac{1}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}(1-k_1^2w^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{(1-k_1^2w^2)(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{b_s}{\pi}\frac{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha}(1-k^2w^2)^{\frac{1}{2}}}\right|$$

$$=\mu_0\frac{\Omega_0}{K(k_1)}\frac{\pi}{b_s}\frac{\mathrm{cn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}\left|\frac{(1-k_1^2w^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-k^2w^2)^{\frac{1}{2}}}\right| \tag{3-73}$$

在齿中心处，$w=0$，磁感强度为最大值 B_{max}，故

$$B_{max}=\mu_0\frac{\Omega_0}{K(k_1)}\frac{\pi}{b_s}\frac{\mathrm{cn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}$$

$$=B_0\pi\frac{\delta}{b_s}\frac{1}{K(k_1)}\frac{\mathrm{cn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha} \tag{3-74}$$

式中 B_0 为均匀气隙时的磁感强度，$B_0=\mu_0\frac{\Omega_0}{\delta}$．用 B_{max}表示时，式（3-73）可改写为

$$\frac{B}{B_{max}}=\left|\sqrt{\frac{1-k_1^2w^2}{1-k^2w^2}}\right| \tag{3-75}$$

最小磁感强度 B_{min}应在槽中心处，此处 $w=\pm\infty$，故

$$\frac{B_{min}}{B_{max}}=\frac{k_1}{k}=\mathrm{sn}\alpha \tag{3-76}$$

平均磁感强度 B_{av}可算出为

$$\frac{B_{av}}{B_0}=\frac{2K'(k_1)\frac{\delta}{b_s}}{K(k_1)\left(1+\frac{b_z}{b_s}\right)} \tag{3-77}$$

于是卡氏因数为

$$k_c=\frac{B_0}{B_{av}}=\frac{K(k_1)}{2K'(k_1)}\left(1+\frac{b_z}{b_s}\right)\frac{b_s}{\delta} \tag{3-78}$$

为与前面所举的单槽例子比较，取 $k=0.675$，$\alpha=1.071$．由椭圆函数表可知，

$\mathrm{sn}\alpha=0.8396$，　$\mathrm{cn}\alpha=0.5426$，　$\mathrm{dn}\alpha=0.8234$，

$K(k)=1.819$，　$K'(k)=1.893$，　$KZ(\alpha)=0.2265$.

于是

$Z(\alpha)=0.1245$，　$k_1=k\mathrm{sn}\alpha=0.566$，　$K(k_1)=1.726$，　$K'(k_1)=2.047$

$$\frac{\delta}{b_s}=\frac{1.819}{\pi}\left(\frac{0.8396\times0.8234}{0.5426}-0.1245\right)=0.667,$$

$$\frac{b_z}{b_s}=\frac{2\times1.893}{\pi}\left(\frac{0.8396\times0.8234}{0.5426}-0.1245\right)-\frac{1.071}{1.819}=0.8,$$

$\frac{b_s}{\delta}=\frac{1}{0.667}=1.5$（与前例相同），

$\frac{b_t}{b_z}=\frac{1}{0.8}=1.25$（比前例约大一倍）.

由式(3-77)、(3-78)、(3-74)和(3-76) 可知，

$$\frac{B_{av}}{B_0}=\frac{2\times 2.047\times 0.667}{1.726\times 1.8}=0.878,\qquad k_c=\frac{1}{0.878}=1.14$$

$$\frac{B_{max}}{B_0}=\frac{0.667\pi}{1.726}\,\frac{0.5426}{0.8393\times 0.8234}=0.952$$

$$\frac{B_{min}}{B_0}=0.952\times 0.8396=0.8$$

图 3-23 表示用单槽(虚线)和一系列槽(实线)算出的结果. 从图可见，当$\frac{b_z}{b_t}$较大时，用单槽算出的 B_{max}值偏大，但卡氏因数基本相同.

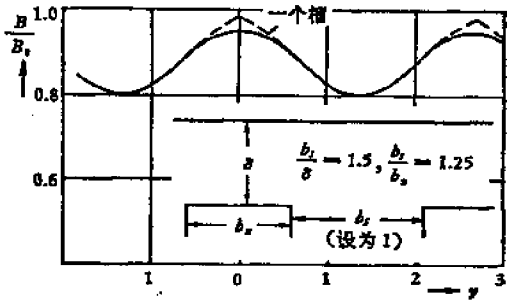


图 3-23 单槽和一系列槽算出的磁场分布

3-7 电枢槽深为有限时气隙磁场的分布[1,8,11—13]

上面研究的都是槽深为无限深的情况. 下面进一步研究槽深为有限值时的情况. 为简单起见，分析单槽的情况.

本问题的场域和边界上的磁位值如图 3-24 中 z 平面的图形所示. 不难看出，此图形与图 3-20 中 z 平面内的图形相同，差别是二者的磁位分布不同，所以本问题的 z-w 平面间的变换与上节相同，只要把图 3-20 中的$\frac{b_t}{2}$改为 δ，$\frac{b_z}{2}$改为 h，2δ 改为 b_z 即可；但 w-t 平面间的变换则与上节不同.

根据式(3-65)可知，z-w 平面间的变换为

$$z=\frac{2\delta}{\pi}\left[p\,\frac{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha}-\Pi_J(p,\alpha)\right] \tag{3-79}$$

式中

$$p=\mathrm{sn}^{-1}w,\qquad k_1=k\,\mathrm{sn}\alpha \tag{3-80}$$

而

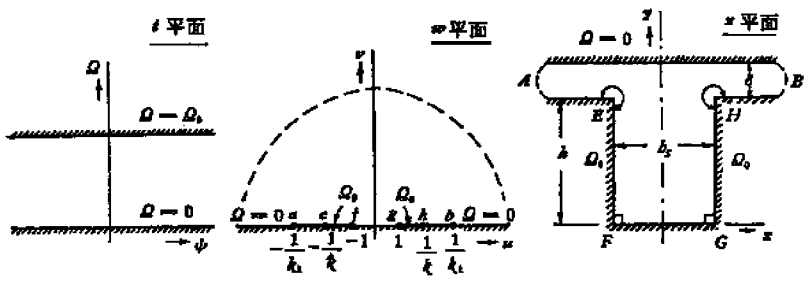


图 3-24 t-w-z 平面间的对应关系

$$\left.\begin{aligned}\frac{b_z}{\delta}&=\frac{4K}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha}-Z(\alpha)\right]\\ \frac{h}{\delta}&=\frac{2K'}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha}-Z(\alpha)\right]-\frac{a}{K}\end{aligned}\right\}\tag{3-81}$$

至于 t-w 平面间的变换，由于在 w 平面的实数轴上，在 $w=\frac{1}{k_1}$ 和 $-\frac{1}{k_1}$ 之间标量磁位为 Ω_0，在 $w>\frac{1}{k_1}$ 和 $w<-\frac{1}{k_1}$ 的二条线上磁位为 0，因此 w 平面内的磁场图形恰好与一个位于 $w=\frac{1}{k_1}$ 和另一个位于 $-\frac{1}{k_1}$ 处的两根反向线电流所形成场图一致．于是 t-w 平面间的变换为

$$t=\frac{\Omega_0}{\pi}\left[\ln\left(w-\frac{1}{k_1}\right)-\ln\left(w+\frac{1}{k_1}\right)\right]=\frac{\Omega_0}{\pi}\ln\frac{k_1w-1}{k_1w+1}\tag{3-82}$$

气隙和槽内的磁感强度为

$$B=\mu_0\left|\frac{dt}{dz}\right|=\mu_0\left|\frac{dt}{dw}\frac{dw}{dz}\right|=B_0\left|k_1\frac{\mathrm{cn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}\sqrt{\frac{1-w^2}{1-k^2w^2}}\right|\tag{3-83}$$

式中 $B_0=\mu_0\frac{\Omega}{\delta}$．在槽中心对面处，$w=\pm\infty$，磁感强度为最小，

$$\frac{B_{\min}}{B_0}=\frac{\mathrm{cn}\alpha}{\mathrm{dn}\alpha}\tag{3-84}$$

故开槽以后，磁场的变动幅度为

$$\frac{B_0-B_{\min}}{B_0}=1-\frac{\mathrm{cn}\alpha}{\mathrm{dn}\alpha}\tag{3-85}$$

3-8 转子偏心时的气隙磁场[14]

实际电机运行时，转子往往会有一定的偏心．本节将研究转子偏心、定子具有正弦分布的磁动势时气隙内的磁场．

设定子内圆半径为 R_1，转子外圆半径为 R_0，偏心距为 ε，如图 3-25 所示．再设定、转子铁心的磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$，转子的标量磁位为 0，定子磁动势为正弦分布．现求气隙内的磁场分布．

由于定、转子边界上的磁位已经给定，气隙中的电密又等于零，所以本问题是拉普拉斯方程的第一边值问题. 如前章所述，拉普拉斯方程可以用分离变量法来求解. 对于本题，首先应当设法找到一个正交曲线坐标系，使其中的两条坐标曲线与定、转子这两个偏心圆重合；然后找出在新坐标系中拉普拉斯方程的表达形式，并用分离变量法求解；最后把边界条件用新坐标系表出，并用以确定通解中的任意常数.

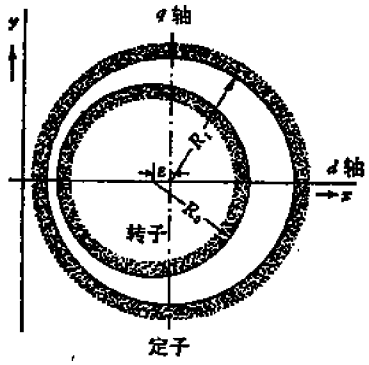


图 3-25　转子偏心的电机

(一) 坐标变换

先寻找坐标曲线为一系列偏心圆的坐标系. 考察下列变换

$$w = u + jv = \ln \frac{z + \lambda}{z - \lambda} \tag{3-86}$$

或

$$z = \lambda \frac{e^w + 1}{e^w - 1} \tag{3-87}$$

式中 λ 为与定、转子半径和偏心距有关的一个大于零的常数. 把 z 分成实部和虚部，可得

$$x = \frac{\lambda \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos v}, \qquad y = -\frac{\lambda \sin v}{\operatorname{ch} u - \cos v} \tag{3-88}$$

把 u 作为参数，消去上式中的 v，可得

$$(x - \lambda \operatorname{cth} u)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{\operatorname{sh}^2 u} \tag{3-89}$$

不难看出，式(3-89)为圆的方程式，圆心坐标 (x_u, y_u) 和半径 r_u 分别为：

$$x_u = \lambda \operatorname{cth} u, \quad y_u = 0, \quad r_u = \frac{\lambda}{|\operatorname{sh} u|} \tag{3-90}$$

即随着 u 的变化，圆心和半径将随之而变化.

从式(3-90)可见：当 $u=\infty$ 时，$x_u=\lambda$，$r_u=0$，圆缩小成一点. 当 u 从 ∞ 逐步减小时，圆心位置 x_u 将从 λ 逐步右移，半径 r_u 则逐步增大，从而形成一系列偏心圆，如图 3-26 所示. 当 $u=0$ 时，$x_u=\infty$，$r_u=\infty$，圆退化成直线（变成 y 轴）. 在右半平面中，$u \geqslant 0$. 根据问题要求，这一系列偏心圆中有两个圆应与定子内圆和转子外圆重合.

再把 v 作为参数，消去式（3-88）中的 u，可得

$$x^2 + (y + \lambda \operatorname{ctg} v)^2 = \frac{\lambda^2}{\sin^2 v} \tag{3-91}$$

上式亦是圆的方程式，圆心坐标(x_v, y_v)和半径 r_v 为

$$x_v = 0, \quad y_v = -\lambda \operatorname{ctg} v, \quad r_v = \frac{\lambda}{|\sin v|} \tag{3-92}$$

从式（3-92）可见：当 $v=-\pi$ 时，$y_v=-\infty$，$r_v=\infty$，圆退化为直线（x 轴）；当 $v=0$ 时，$y_v=\infty$，$r_v=\infty$，圆又退化为直线（x 轴）. 这些都在 z 平面的上半平面. 从 v 由

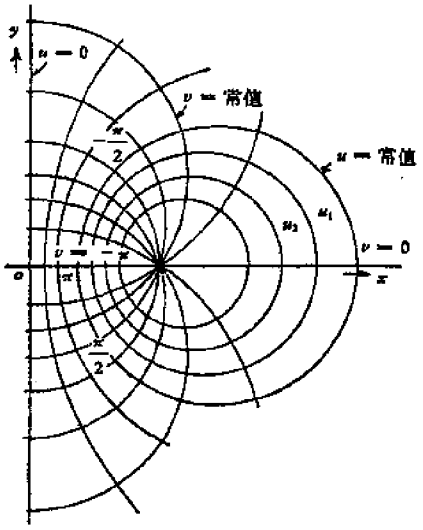


图 3-26　z 平面中的曲线坐标 u 和 v

0 变到 π 时，都在 z 平面的下半平面，如图 3-26 所示.

这样，在定、转子之间的气隙中，u 和 v 就形成了一组互相正交的曲线坐标系. 下面从给定的 R_1、R_0 和 ε 来确定对应的 u、v 和 λ 值.

设坐标曲线 $u=u_1$ 与定子内圆重合，$u=u_2$ 与转子外圆重合，则根据式 (3-90) 可知，

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\lambda}{\mathrm{sh}u_1}, \qquad R_0 = \frac{\lambda}{\mathrm{sh}u_2} \\ \varepsilon &= x_{u_1} - x_{u_2} = \lambda(\mathrm{cth}u_1 - \mathrm{cth}u_2) \\ &= \lambda\left[\sqrt{1+\frac{R_1^2}{\lambda^2}} - \sqrt{1+\frac{R_0^2}{\lambda^2}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{3-93}$$

求解上式，可得

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{R_1^2 + R_0^2 - \varepsilon^2}{2}\right)^2 - R_1^2 R_0^2} \tag{3-94}$$

于是

$$u_1 = \mathrm{sh}^{-1}\frac{\lambda}{R_1}, \qquad u_2 = \mathrm{sh}\frac{\lambda}{R_0} \tag{3-95}$$

(二) 在新的曲线坐标系中拉普拉斯方程的解答

进一步来研究在新的曲线坐标系 u 和 v 中，拉普拉斯方程的形式和解答.

设 Ω 为磁位函数，Ψ 为力线函数，则 Ω 可以表示为某个解析函数 t 的实部，

$$t = f(z) = \Omega(x,y) + j\Psi(x,y) \tag{3-96}$$

式中 $\Omega(x,y)$ 和 $\Psi(x,y)$ 为一对共轭函数. 当我们用解析函数 $z=z(w)=\lambda\frac{e^w+1}{e^w-1}$ 把 x,y 变换为新的变量 u 和 v 时，t 就成为 u 和 v 的函数

$$t = f[z(w)] = \Omega(u,v) + j\Psi(u,v) \tag{3-97}$$

由于复合函数 $f[z(w)]$ 是解析函数，所以在新的坐标系中，$\Omega(u,v)$ 和 $\Psi(u,v)$ 亦是共轭函数，于是

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2} = 0 \tag{3-98}$$

式 (3-98) 说明，在由解析函数变换所得的坐标系中，拉普拉斯方程的形式不变. 因此，式 (3-98) 的解答为

$$\begin{aligned} \Omega = \sum_{k=1}^{\infty} &(A_k \mathrm{sh}m_k u \sin m_k v + B_k \mathrm{sh}m_k u \cos m_k v \\ &+ C_k \mathrm{ch}m_k u \sin m_k v + D_k \mathrm{ch}m_k u \cos m_k v) \end{aligned} \tag{3-99}$$

（三）边界条件和任意常数的确定

设电机为二极，定子直轴与 x 轴重合，交轴与 y 轴平行；$\mu_{Fe}=\infty$. 本问题的边界条件为

1. 转子磁位 $\Omega_2=0$，即

$$\Omega_{u=u_2时}=0 \tag{3-100}$$

2. 定子磁位的直轴和交轴分量 Ω_{1d}、Ω_{1q} 为

$$\left.\begin{aligned}\Omega_{1d}&=\Omega_0+\Omega_d\cos\theta\\ \Omega_{1q}&=\Omega_q\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{3-101}$$

式中 θ 以定子圆心作为原点.

式(3-101)是用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 来表达的，下面设法用 u 和 v 把此边界条件表出.

对于定子内圆，$u=u_1$，故

$$z_{u=u_1}=(x_u+r_ue^{j\theta})_{u=u_1}=\lambda\mathrm{cth}u_1+\frac{\lambda}{\mathrm{sh}u_1}e^{j\theta}$$

$$=\lambda\left(\frac{e^w+1}{e^w-1}\right)_{u=u_1}$$

由此可得

$$e^{j\theta}=\left[\left(\frac{e^w+1}{e^w-1}\right)_{u=u_1}-\mathrm{cth}u_1\right]\mathrm{sh}u_1 \tag{3-102}$$

由于

$$\frac{e^w+1}{e^w-1}=1+2(e^{-w}+e^{-2w}+e^{-3w}+\cdots)$$

所以式(3-102)可改写成

$$e^{j\theta}=-e^{-u_1}+2\,\mathrm{sh}u_1(e^{-w}+e^{-2w}+e^{-3w}+\cdots)_{u=u_1} \tag{3-103}$$

把上式分成实部和虚部，可得

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=-e^{-u_1}+2\,\mathrm{sh}u_1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ku_1}\cos kv\\ \sin\theta&=-2\,\mathrm{sh}u_1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ku_1}\sin kv\end{aligned}\right\} \tag{3-104}$$

于是在新的坐标系中，边界条件 2 可写成

$$\Omega_{u=u_1}=\Omega_0+\Omega_d\left(-e^{-u_1}+2\,\mathrm{sh}u_1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ku_1}\cos kv\right)$$

$$+\Omega_q\left(-2\,\mathrm{sh}u_1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ku_1}\sin kv\right) \tag{3-105}$$

由此即可确定式(3-99)中的任意常数.

根据边界条件 1 可知，

$$m_k=k,\qquad C_k=-A_k\frac{\mathrm{sh}ku_2}{\mathrm{ch}ku_2},\qquad D_k=-B_k\frac{\mathrm{sh}ku_2}{\mathrm{ch}ku_2} \tag{3-106}$$

把求出的 m_k、C_k、D_k 代入式 (3-99)，整理后可得

$$\Omega=\sum_{k=1}^{\infty}A_k'\mathrm{sh}k(u-u_2)\sin kv+\sum_{k=1}^{\infty}B_k'\mathrm{sh}k(u-u_2)\cos kv \tag{3-107}$$

根据边界条件 2（式 3-105）可知，

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}A_k'\mathrm{sh}k(u-u_2)\sin kv+\sum_{k=1}^{\infty}B_k'\mathrm{sh}k(u-u_2)\cos kv\right]_{u=u_1}$$

$$=\Omega_0-\Omega_d e^{-u_1}+2\Omega_d\mathrm{sh}u_1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ku_1}\cos kv-2\Omega_q\mathrm{sh}u_1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ku_1}\sin kv$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_0=\Omega_d e^{-u_1}\\&A_k'=-\frac{2\Omega_q\mathrm{sh}u_1}{\mathrm{sh}k(u_1-u_2)}e^{-ku_1},\qquad B_k'=\frac{2\Omega_d\mathrm{sh}u_1}{\mathrm{sh}k(u_1-u_2)}e^{-ku_1}\end{aligned}\right\}\tag{3-108}$$

把求出的 A_k'、B_k' 代入式（3-107），最后可得气隙中的磁位 Ω 为

$$\Omega=2\mathrm{sh}u_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}k(u-u_2)}{\mathrm{sh}k(u_1-u_2)}e^{-ku_1}(\Omega_d\cos kv-\Omega_q\sin kv)\tag{3-109}$$

径向和切向磁感强度 B_u 和 B_v 分别为：

$$B_u=\mu_0\frac{1}{h}\frac{\partial\Omega}{\partial u},\qquad B_v=-\mu_0\frac{1}{h}\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

式中 $h=\dfrac{\lambda}{\mathrm{ch}u-\cos v}$．把式(3-109)对 u 和 v 分别求导并代入上式，可得

$$\left.\begin{aligned}B_u&=-2\mu_0\frac{\mathrm{sh}u_1(\mathrm{ch}u-\cos v)}{\lambda}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}k(u-u_2)}{\mathrm{sh}k(u_1-u_2)}ke^{-ku_1}(\Omega_d\cos kv-\Omega_q\sin kv)\right]\\B_v&=2\mu_0\frac{\mathrm{sh}u_1(\mathrm{ch}u-\cos v)}{\lambda}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}k(u-u_2)}{\mathrm{sh}k(u_1-u_2)}ke^{-ku_1}(\Omega_d\sin kv-\Omega_q\cos kv)\right]\end{aligned}\right\}\tag{3-110}$$

3-9 小 结

本章用保角变换法求解了电机中几个经典的二维无旋磁场问题．简单地讲，求解二维空间的无旋场问题，关键就是要寻找一个符合特定边界条件的共轭函数．

在电机工程中，最常用到的保角变换是许-克变换．通过许-克变换，可以把 z 平面中多边界内部的磁场变换到 w 平面的上半平面内．若多边形边界为同一磁位，只要进行一次变换；若多边形边界具有两个不同的磁位值，则要进行两次变换．变换的复杂程度取决于多边形的顶点数和内角的角度．对电机中的磁场问题，内角通常为直角或零角；若多边形包含两个以上直角，积分后将出现椭圆函数．

在许-克变换的 a、b、c，…等常数中，有三个可以任选，选择得当可使积分和求解简化．其余常数可根据 w 平面和 z 平面中特定点的对应关系来确定，或者用回路积分法来确定．

保角变换法是求解二维无旋磁场问题的一种很有用的方法．应用此法时，边界线必须与等位线或磁力线重合．对于边界形状较为复杂的拉普拉斯方程第一类边值问题，如能找到一个解析函数，把 z 平面内的边界曲线变换为新坐标系内的坐标曲线，则联合应用保角变换和分离变量法，即可求得问题的解答．

参 考 文 献

[1] W. J. Gibbs, Comformal Transformation in Electrical Engineering, Chapman & Hall, 1958.

[2] L. V. Bewley, Two Dimensional Field in Electrical Engineering, Dover, 1963.

[3] L. A. Pipes, Applied Mathematics for Engineers and Physicists, McGraw-Hill, 2nd Edition, 1958.

[4] K. J. Binns, P. L. Lawrenson, Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problem, Pergamon Press, 2nd Edition, 1973.

[5] F. Ollendorf, Technische Electrodynamik, Band I, Berechnung Magnetischer Felder, Springer-Verlag, 1952.

[6] F. W. Carter, Air Gap and Interpolar Induction. Jour. IEE, 1900.

[7] F. W. Carter, The Magnetic Field of the Dynamo-electric Machine. Jour. IEE, 1926.

[8] R. T. Coc, H. W. Taylor, Some Problems in Electrical Machine Design Involving Elliptic Function, Phil. Mag, 1928.

[9] P. F. Byrd, M. D. Friedman, Handbook of Elliptic Integrals for Engineer and Physicist, Springer-Verlag, 1954.

[10] E. M. Freeman, The Calculation of Harmonics Due to Slotting in the Flux Density Waveform of Dynamo-electric Machine, Proc. IEE, pt. C, 1962.

[11] K. J. Binns, Calculation of Some Basic Flux Quantities in Induction and Other Double-slotted Electrical Machine, Proc. IEE, No. 11, 1964.

[12] K. C. Mukherji, S. Neville, Magnetic Permeance of Identical Double-slotting—Deduction From Analysis by F. W. Carter, Proc. IEE, No. 9, 1971.

[13] K. J. Binns, Some Accurate Flux Quantities for the Single Slotted Airgap, Proc. IEE, No. 3, 1975.

[14] S. A. Swann, Effect of Rotor Eccentricity on the Magnetic Field in the Air Gap of a Nonsalient Pole Machine, Proc. IEE, 1963.

第四章　恒定磁场的数值解法

在边界形状较为复杂的情况下，恒定磁场问题就要用数值法来求解．近年来，由于电子计算机和计算技术的迅速发展，数值法在工程上得到广泛的应用．对于椭圆型偏微分方程，常用的数值解法有两种，一是有限差分法，一是有限单元法．本章先说明有限差分法，然后说明有限单元法．研究时先介绍二维拉普拉斯方程和泊松方程边值问题的数值解法，然后进一步说明考虑铁磁介质饱和时非线性准泊松方程和三维泊松方程的数值解法．

4-1　有限差分法[1,2]

有限差分法就是用差分来近似地代替微分，把求解区域内的偏微分方程和有关的边界条件，化成适用于区域内部和边界上各个节点处的差分方程组（此步骤通常称为离散化），然后用古典方法或用电子计算机来求解联立的差分方程组．下面先介绍导数的差分逼近．

（一）导数的有限差分逼近

网格和节点　在求解区域 G 所在的 x-y 平面内，作与坐标轴相平行的两族直线

$$x=x_0,x=x_1,\cdots,x=x_n;\quad \text{其中 } x_0<x_1<\cdots<x_n.$$

$$y=y_0,y=y_1,\cdots,y=y_n;\quad \text{其中 } y_0<y_1<\cdots<y_n.$$

使区域 G 及其边界 Γ 都被这些格线及其所形成的矩形网格所覆盖，如图 4-1 (a) 所示．格线的交点称为节点，格线之间的距离称为步长．在 x 和 y 方向，网格的步长分别为 $h_i=x_i-x_{i-1}$，$k_j=y_j-y_{j-1}$，如图 4-1(b)所示．若步长互不相等，则形成不等距网格；若步长均相等 $h_i=h_j=h$，则得到等距网格（亦称为均匀网格）．

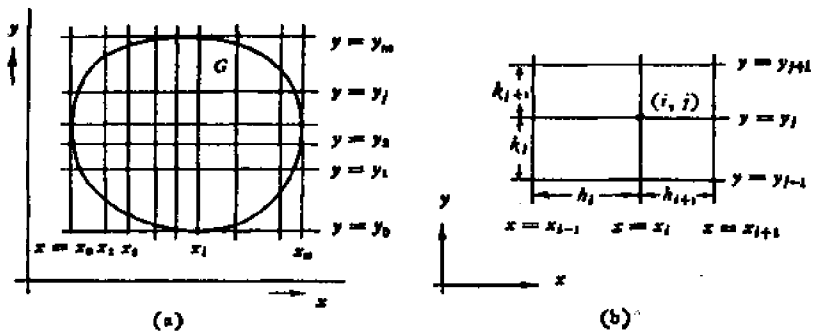


图 4-1　网格的形成

(a) 网格的节点；(b) 网格的步长

一阶导数的逼近 先看如何用差商去逼近一阶导数.

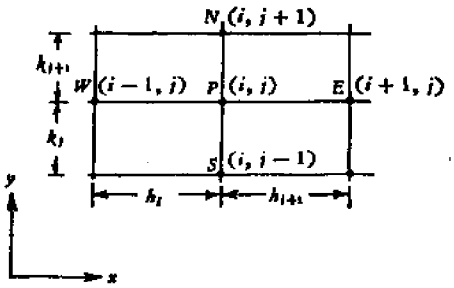


图 4-2 P 点的差商

对图 4-2 中 P 点处函数 u 对 x 的一阶偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，既可用 E 点和 P 点这两点的函数值对步长 h_{i+1}的差商去逼近，亦可以用 P 点和 W 点这两点的函数值对步长 h_i 的差商去逼近；前者称为向前差商，用$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j(F)}$表示；后者称为向后差商，用$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j(B)}$表示；即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j(F)} \doteq \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} \tag{4-1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j(B)} \doteq \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i} \tag{4-2}$$

把向前差商和向后差商分别按$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$和$\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$加权，然后相加，可得中心差商$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j(F)}\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j(B)}\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} \\ &\doteq \frac{h_i}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}u_{i+1,j} + \frac{h_{i+1}-h_i}{h_ih_{i+1}}u_{i,j} - \frac{h_{i+1}}{h_i(h_i+h_{i+1})}u_{i-1,j}\end{aligned} \tag{4-3}$$

同理，对于 u 对 y 的一阶偏导数$\frac{\partial u}{\partial y}$，亦可写出其向前、向后和中心差商：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j(F)} \doteq \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k_{j+1}} \tag{4-4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j(B)} \doteq \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k_j} \tag{4-5}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \doteq \frac{k_j}{k_{j+1}(k_j+k_{j+1})}u_{i,j+1} + \frac{k_{j+1}-k_j}{k_jk_{j+1}}u_{i,j} - \frac{k_{j+1}}{k_j(k_j+k_{j+1})}u_{i,j-1} \tag{4-6}$$

不难看出，对不等距网格，中心差商的算式比向前或向后差商的算式要稍为复杂一些，但是它的精度较高. 对于等距网格，中心差商将简化为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &\doteq \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} &\doteq \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2h}\end{aligned}\right\} \tag{4-7}$$

二阶导数的逼近 二阶导数可以用二阶差商去逼近，所谓二阶差商就是指一阶差商的差商. 一般用向前差商的向后差商去逼近二阶导数，即

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \doteq \frac{\dfrac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} - \dfrac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i}}{\dfrac{1}{2}(h_i+h_{i+1})}$$

$$\doteq 2\left[\frac{1}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}u_{i+1,j} - \frac{1}{h_i h_{i+1}}u_{i,j} + \frac{1}{h_i(h_i+h_{i+1})}u_{i-1,j}\right] \tag{4-8}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} \doteq \frac{\dfrac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k_{j+1}} - \dfrac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k_j}}{\dfrac{1}{2}(k_j+k_{j+1})}$$

$$\doteq 2\left[\frac{1}{k_{j+1}(k_j+k_{j+1})}u_{i,j+1} - \frac{1}{k_j k_{j+1}}u_{i,j} + \frac{1}{k_j(k_j+k_{j+1})}u_{i,j-1}\right] \tag{4-9}$$

对于等距网格，式（4-8）和（4-9）就简化为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\doteq \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})\\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} &\doteq \frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})\end{aligned}\right\} \tag{4-10}$$

（二）截断误差

用差商代替微商，必然会带来误差，下面对此误差进行估计.

一阶导数的误差 假定在区域 G 内，函数 $u(x,y)$ 为有界且足够光滑（即具有所需要的各阶导数），根据泰勒级数可知，G 内任一点 (x_i, y_j) 的函数值 $u_{i,j}$ 与水平线上相邻两个节点 (x_{i+1}, y_j) 和 (x_{i-1}, y_j) 的函数值 $u_{i+1,j}$ 和 $u_{i-1,j}$ 之间有下列关系：

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h_{i+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} + \frac{1}{2!}h_{i+1}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \frac{1}{3!}h_{i+1}^3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} + \cdots \tag{4-11}$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h_i\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} + \frac{1}{2!}h_i^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} - \frac{1}{3!}h_i^3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} + \cdots \tag{4-12}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} + R'_{x1}\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i} + R'_{x2}\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{h_i}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}u_{i+1,j} + \frac{h_{i+1}-h_i}{h_i h_{i+1}}u_{i,j} - \frac{h_{i+1}}{h_i(h_i+h_{i+1})}u_{i-1,j} + R'_{x3}\end{aligned}\right\} \tag{4-13}$$

式中 R'_{x1}、R'_{x2}、R'_{x3} 表示截去泰勒级数中高阶项所引起的误差，称为截断误差：

$$\left.\begin{aligned}R'_{x1} &= -\frac{1}{2!}h_{i+1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} - \frac{1}{3!}h_{i+1}^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} - \cdots = O(h_{i+1})\\ R'_{x2} &= \frac{1}{2!}h_i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} - \frac{1}{3!}h_i^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} + \cdots = O(h_i)\\ R'_{x3} &= -\frac{1}{3!}h_i h_{i+1}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} - \cdots = O(h_M^2)\end{aligned}\right\} \tag{4-14}$$

其中 $h_M = \max(h_{i+1}, h_i)$.

式(4-13)和(4-14)说明，所取的差商形式不同，截断误差亦不同. 当 h_i 和 h_{i+1} 很小时，用向前差商或向后差商去逼近 $\frac{\partial u}{\partial x}$，截断误差 R'_{x1} 和 R'_{x2} 分别为与 h_{i+1} 或 h_i 同阶的小量；用中心差商去逼近 $\frac{\partial u}{\partial x}$，其截断误差 R'_{x3} 则为与 h_M^2 同阶的小量. 对于 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的差商逼近，亦可得到类似的结论.

二阶导数的误差 从式(4-11)和(4-12)可知，

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}=\frac{2(u_{i+1,j}-u_{i,j})}{h_{i+1}^2}-\frac{2}{h_{i+1}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}-\frac{1}{3}h_{i+1}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}-\frac{1}{12}h_{i+1}^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j}-\cdots \tag{4-15}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}=\frac{2(u_{i-1,j}-u_{i,j})}{h_i^2}+\frac{2}{h_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{1}{3}h_i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}-\frac{1}{12}h_i^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j}+\cdots \tag{4-16}$$

把式(4-15)乘以 $\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$，式(4-16)乘以 $\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$，然后相加，可得

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}=2\left[\frac{1}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}u_{i+1,j}-\frac{1}{(h_ih_{i+1})}u_{i,j}+\frac{1}{h_i(h_i+h_{i+1})}u_{i-1,j}\right]+R_x'' \tag{4-17}$$

其中 R_x'' 为二阶差商的截断误差，

$$R_x''=-\frac{1}{3}(h_{i+1}-h_i)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}-\frac{1}{12}(h_{i+1}^2-h_{i+1}h_i+h_i^2)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j}-\cdots \tag{4-18}$$

式(4-18)表明，若网格为不等距，当步长很小时，截断误差 R_x'' 与 h_M 同阶；若网格为等距，则 R_x'' 将与 h^2 同阶. 因此，就减小截断误差而言，采用等距网格是有利的. 对 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的逼近，亦可得到类似的结论.

4-2 二维拉普拉斯方程和泊松方程的差分离散[1,2]

如前所述，求解无旋恒定磁场问题可归结为求解标量磁位或向量磁位的拉普拉斯方程边值问题. 下面来说明拉普拉斯方程的差分离散.

(一) 拉普拉斯方程的差分离散

直角坐标系 在二维直角坐标系内，拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{4-19}$$

式中 u 既可以是标量磁位 Ω，亦可以是向量磁位 A_z，视解题需要而定.

在区域 G 内，分别用式(4-8)和(4-9)去逼近 u 对 x 和 y 的二阶偏导数，则式(4-19)可改写为

$$\frac{1}{h_{i+1}(h_{i+1}+h_i)}u_{i+1,j}+\frac{1}{h_i(h_{i+1}+h_i)}u_{i-1,j}+\frac{1}{k_{j+1}(k_{j+1}+k_j)}u_{i,j+1}+\frac{1}{k_j(k_{j+1}+k_j)}u_{i,j-1}-\left(\frac{1}{h_{i+1}h_i}+\frac{1}{k_{j+1}+k_j}\right)u_{i,j}=0 \tag{4-20}$$

式(4-20)列出了节点 (x_i,y_j) 的磁位 $u_{i,j}$ 与上、下、左、右四点磁位的关系，称为拉普拉斯方程的五点差分格式. 对于 G 内所有节点，依次列出其五点差分方程式，即可得到一个

联立方程组.

对于等距网格，式(4-20)简化为

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=0 \tag{4-21}$$

与上式相应的系数格式可表示为

	$1_{(i,j+1)}$	
$1_{(i-1,j)}$	$-4_{(i,j)}$	$1_{(i+1,j)}$
	$1_{(i,j-1)}$	

式(4-21)亦可以改写成

$$u_{i,j}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}) \tag{4-22}$$

式(4-22)说明，对等距网格，任一节点的磁位值就等于周围四个相邻节点磁位的平均值，这就是调和函数平均值公式的差分表述.

边界条件的处理 为求解差分方程组，还要对边界条件进行离散化处理.

对于第一类边界条件，由于边界上的磁位值已经给定，若网格剖分时所引进的节点恰好落在边界线上，则可直接引用 u 在这些边界节点上的值. 若边界 Γ_1 不与格线重合，则可利用线性插值的办法算出距边界线最近节点的 u 值. 例如在图 4-3 中，Γ_1 与格线交于 N'，若 N' 处的磁位值给定为 $u_{N'}$，则距 N' 最近的节点 P 处，u_P 可用下式近似算出

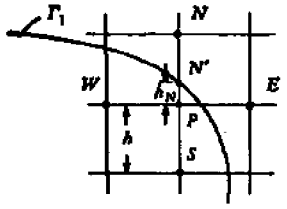


图 4-3 用线性插值法求出 P 点的磁位

$$u_P\doteq\frac{hu_{N'}+h_Nu_S}{h+h_N} \tag{4-23}$$

式中 u_S 为内部最近节点 S 的磁位值.

对第二类边界条件，若区域 G 的某条边界线 Γ_2 与 y 轴重合，且 Γ_2 上磁位的法向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma_2}=0$，如图 4-4 所示. 此时可将定解区域向外延拓，在 $x=-h$ 处引进一条虚设格线和相应的节点，并用中心差商来逼近 $\frac{\partial u}{\partial x}$；由此

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma_2}\doteq\frac{u(h,y)-u(-h,y)}{2h}=0$$

即

$$u(-h,y)=u(h,y) \tag{4-24}$$

此时，对边界线 Γ_2 上所有节点，式(4-20)的五点差分格式仍然成立，其中 $(-h,y)$ 处各点的 u 值只要用 (h,y) 处相应点的 u 值代入即可.

若 Γ_2 与格线不重合，可用离散边界 Γ_{2h}（折线）去逼近 Γ_2，如图 4-5 所示. 若给定 Γ_2 上磁位的法向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=\frac{q}{\nu}$，其中 ν 为介质系数；从 Γ_{2h} 上的节点 A 向 Γ_2 作垂线 AE，并与 Γ_2 交于 F，由导数的差商逼近可知，F 点的法向导数将近似等于

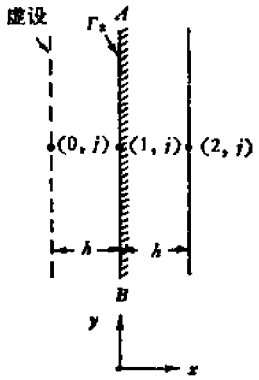


图 4-4 Γ_2 与格线重合时第二类边界条件$\frac{\partial u}{\partial n}=0$的处理

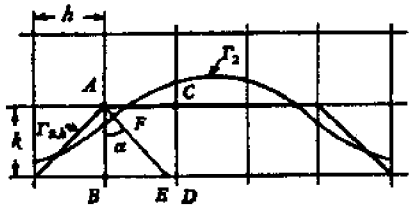


图 4-5 Γ_2 与格线不重合时第二类边界条件的处理

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_F=\text{grad}u\cdot\mathbf{n}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha$$

$$\doteq\frac{u_B-u_D}{h}\sin\alpha+\frac{u_A-u_B}{k}\cos\alpha=\frac{q}{\nu}\tag{4-25}$$

这样，根据 F 点处给定的边值，即可得到离散边界上节点 A 处的磁位方程.

总之，对于区域 G 的内部和边界 Γ 上的每一个节点，都可以列出相应的差分方程. 可以证明，只要边界条件给对，具有五点差分格式的差分方程组有唯一解.

简单示例 现用图 4-6 所示矩形区域为例，说明差分方程的建立.

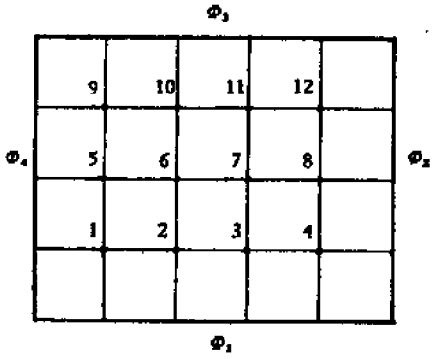


图 4-6 把矩形求解域剖分成均匀网格

设矩形区域 G 内各点的磁位 u 满足拉普拉斯方程，四周边界上的磁位值分别给定为 Φ_1、Φ_2、Φ_3 和 Φ_4. 把整个矩形区域分成等距网格，得到 12 个内部节点. 根据式 (4-22)，并把未知的节点磁位列在方程左端，给定的边界磁位值（已知）列在方程右端，经过整理，可得 12 个节点上的五点差分方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}
-4u_1+u_2+u_5&=-(\Phi_1+\Phi_4)\\
u_1-4u_2+u_3+u_6&=-\Phi_1\\
u_2-4u_3+u_4+u_7&=-\Phi_1\\
u_3-4u_4+u_8&=-(\Phi_1+\Phi_2)\\
u_1-4u_5+u_6+u_9&=-\Phi_4\\
u_2+u_5-4u_6+u_7+u_{10}&=0\\
u_3+u_6-4u_7+u_8+u_{11}&=0\\
u_4+u_7-4u_8+u_{12}&=-\Phi_2\\
u_5-4u_9+u_{10}&=-(\Phi_3+\Phi_4)
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} u_6+u_9-4u_{10}+u_{11}&=-\Phi_3\\ u_7+u_{10}-4u_{11}+u_{12}&=-\Phi_3\\ u_8+u_{11}-4u_{12}&=-(\Phi_2+\Phi_3)\end{aligned}\right\} \tag{4-26}$$

用矩阵表示时有

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc}
-4&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&-4&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&-4&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&-4&0&0&0&1&0&0&0&0\\ \hdashline
1&0&0&0&-4&1&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&1&-4&1&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&1&-4&1&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&1&-4&0&0&0&1\\ \hdashline
0&0&0&0&1&0&0&0&-4&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&-4&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&-4&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&-4
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\ \hdashline u_5\\u_6\\u_7\\u_8\\ \hdashline u_9\\u_{10}\\u_{11}\\u_{12}\end{array}\right]=
\left[\begin{array}{c}-(\Phi_1+\Phi_4)\\-\Phi_1\\-\Phi_1\\-(\Phi_1+\Phi_2)\\ \hdashline -\Phi_4\\0\\0\\-\Phi_2\\ \hdashline -(\Phi_3+\Phi_4)\\-\Phi_3\\-\Phi_3\\-(\Phi_2+\Phi_3)\end{array}\right] \tag{4-27}$$

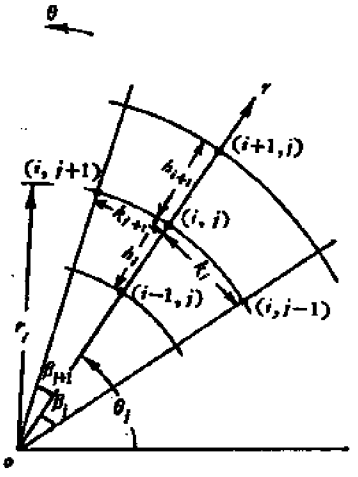


图 4-7　极坐标系中的网格

不难看出，方程组（4-27）的系数矩阵 **K** 是一个块三对角阵，其中虚线的划分对应于 G 内三条水平网格线. 此外，**K** 是一个实对称的对角占优阵，**K** 中每一行非零元素均不多于五个，所以 **K** 又是稀疏矩阵. 对于具有稀疏、正定、对称系数矩阵的高阶线性代数方程组，用迭代法来求解是适宜的.

极坐标系　对于边界为圆形的边值问题，采用极坐标系来离散比直角坐标更合适. 在极坐标系中，拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \tag{4-28}$$

在 r-θ 平面内用一系列同心圆和从原点出发的辐射直线作为网格格线，可得图 4-7 所示网格剖分. 当网格很小时，近似地把这些曲边矩形网格看作为一般的矩形网格，利用式（4-8）、（4-9）和（4-6），可知对于 P 点（编号为 i，j）有

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_{i,j}\doteq 2\left[\frac{1}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}u_{i+1,j}-\frac{1}{h_ih_{i+1}}u_{i,j}+\frac{1}{h_i(h_i+h_{i+1})}u_{i-1,j}\right] \tag{4-29}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)_{i,j}&\doteq 2\left[\frac{1}{k_{j+1}(k_j+k_{j+1})}u_{i,j+1}-\frac{1}{k_jk_{j+1}}u_{i,j}+\frac{1}{k_j(k_j+k_{j+1})}u_{i,j-1}\right]\\ &\doteq 2\left[\frac{1}{r_i^2\beta_{j+1}(\beta_j+\beta_{j+1})}u_{i,j+1}-\frac{1}{r_i^2\beta_j\beta_{j+1}}u_{i,j}+\frac{1}{r_i^2\beta_j(\beta_j+\beta_{j+1})}u_{i,j-1}\right]\end{aligned} \tag{4-30}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i,j}\doteq\frac{1}{r_i}\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{h_i+h_{i+1}} \tag{4-31}$$

式中 $h_i=r_i-r_{i-1}$，$k_j=r_i\beta_j$。于是可得极坐标系中拉普拉斯方程的五点差分格式为：

$$\left[\frac{1}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}+\frac{1}{2r_i(h_i+h_{i+1})}\right]u_{i+1,j}+\left[\frac{1}{h_i(h_i+h_{i+1})}-\frac{1}{2r_i(h_i+h_{i+1})}\right]u_{i-1,j}$$

$$+\frac{1}{r_i^2\beta_{j+1}(\beta_i+\beta_{j+1})}u_{i,j+1}+\frac{1}{r_i^2\beta_j(\beta_i+\beta_{j+1})}u_{i,j-1}-\left[\frac{1}{h_ih_{i+1}}+\frac{1}{r_i^2\beta_j\beta_{j+1}}\right]u_{i,j}=0 \tag{4-32}$$

对于 r 方向和 θ 方向取等步长的情况，$h_i=h_{i+1}=h$，$r_i=ih$，$\beta_j=\beta_{j+1}=\beta$，此时式（4-32）将简化为

$$\left[1+\frac{1}{2i}\right]u_{i+1,j}+\left[1-\frac{1}{2i}\right]u_{i-1,j}+\frac{1}{(i\beta)^2}u_{i,j+1}+\frac{1}{(i\beta)^2}u_{i,j-1}-\left[2+\frac{2}{(i\beta)^2}\right]u_{i,j}=0 \tag{4-33}$$

以上直角坐标系和极坐标系中差分方程的导出，准确地说是以泰勒级数的展开式作为基础，因此亦称为泰勒级数法. 在差分离散化方法中，泰勒级数法是最基本的方法. 这种方法的优点是简单、明了，并可给出离散逼近时的误差估计；缺点是对于边界比较复杂的情况，要一一单独处理；另外，如果不加特殊考虑，差分方程组的系数矩阵可能成为不对称，从而使求解比较困难.

（二）泊松方程的差分离散

若在求解域 G 内，磁位 u 满足二维泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\mu J_z \tag{4-34}$$

式中 μ 为 G 内的磁导率，μ=常值；J_z 为给定的源电流密度，J_z=常值 或 0. 对于不等距网格，在 P 点处把式（4-34）的左端用式（4-8）和（4-9）去逼近；右端 P 点处的电流密度设为 $J_{i,j}$，可得式（4-34）的离散格式为：

$$\frac{2}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}u_{i+1,j}+\frac{2}{h_i(h_i+h_{i+1})}u_{i-1,j}+\frac{2}{k_{j+1}(k_j+k_{j+1})}u_{i,j+1}$$

$$+\frac{2}{k_j(k_j+k_{j+1})}u_{i,j-1}-2\left(\frac{1}{h_ih_{i+1}}+\frac{1}{k_jk_{j+1}}\right)u_{i,j}=-\mu J_{i,j} \tag{4-35}$$

或

$$\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_{i+1}}u_{i+1,j}+\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_i}u_{i-1,j}+\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_{j+1}}u_{i,j+1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_j}u_{i,j-1}$$

$$-\left(\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_{i+1}}+\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_i}+\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_{j+1}}+\frac{h_i+k_{i+1}}{2k_j}\right)u_{i,j}=-\frac{1}{4}\mu J_{i,j}(h_i+h_{i+1})(k_j+k_{j+1}) \tag{4-36}$$

式（4-36）就是泊松方程的五点差分格式. 与式（4-36）相应的系数计算格式为：

	$\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_{j+1}}$	
$\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_i}$	$-\sum$	$\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_{i+1}}$
	$\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_j}$	

式（4-36）的右端项亦可写成 $-\mu I_{i,j}$，其中 $I_{i,j}$ 表示以 P 点为中心的 4 个相邻网格

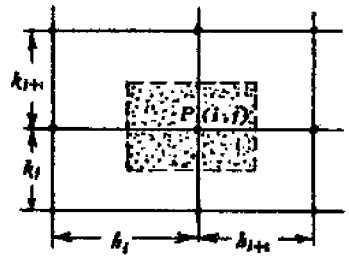


图 4-8　网眼内的总电流 $I_{i,j}$

的中心线所组成的矩形网眼（图 4-8 中虚线所示）内的电流值；对载流区的内部节点，$I_{i,j}=\frac{1}{4}J_{i,j}(h_i+h_{i+1})(k_j+k_{j+1})$；对载流区和非载流区交界线上的边界点和角点，用 $I_{i,j}$ 来代替 $\frac{1}{4}J_{i,j}(h_i+h_{i+1})(k_j+k_{j+1})$ 可以得到更加准确的结果.

对于等距网格，$h_i=k_j=h$，式（4-36）简化为

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=-\mu J_{i,j}h^2 \tag{4-37}$$

下面举两个实例来说明有限差分法的应用.

4-3　电枢开槽时气隙磁场的数值计算

电枢开槽时气隙磁场的分布，第三章中已用保角变换法研究过. 现在用有限差分解法来进一步说明.

若槽内无载流导体，则气隙和槽内磁场为无旋场，可用标量磁位来研究，即 $u=\Omega$. 在气隙和槽内，标量磁位满足拉普拉斯方程. 设开槽边 $B_1C_1D_1EDCB$ 的磁位为 0，光滑边 A_1A 的磁位为 100，如图 4-9 所示. 根据物理情况判断，齿中心线 A_1B_1 和 AB 应与磁力线重合，即 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{A_1B_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AB}=0$. 此外，从图 4-9 可见，整个磁场分布应与槽中心线对称，因此只要求解区域 $ABCDEF$ 内的磁场即可；即求解域可缩小一半，变为 G_1. 从对称性可知，EF 与磁力线重合，故 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{EF}=0$.

这样，可得如下二维拉普拉斯方程的混合边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad (x,y)\in G_1\\&u_{BC}=u_{CD}=u_{DE}=0,\quad u_{AF}=100,\\&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AB}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{EF}=0\end{aligned}\right\} \tag{4-38}$$

实际计算时，取 x 轴与 A_1A 重合，y 轴与 FE 重合，把图 4-9 中的区域 G_1 剖分为一系列正方形网格，并在满足第二类边界条件的边线 AB、EF 外虚设一条格线，再对格线从下到上、从左到右进行编号，如图 4-10 所示. 在图 4-10 中，每隔 1 毫米作一条格线，x 方向包括虚设格线后共 14 条格线，y 方向共 75 条格线. 这样，对 G_1 内部各点有：

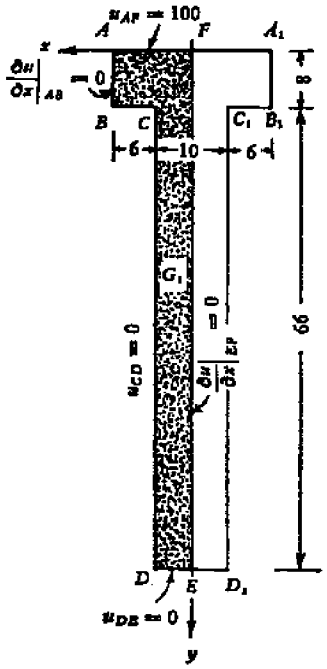


图 4-9　开槽的电枢

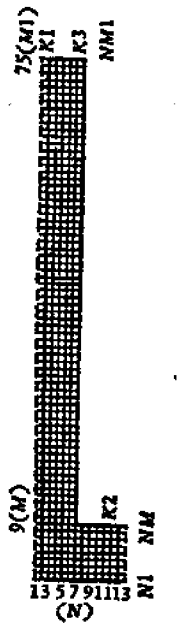


图 4-10　气隙和槽内的网格剖分

$$\left.\begin{aligned}&u_{i,j-1}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i+1,j}-4u_{i,j}=0\\&\begin{pmatrix}i=3,4,\cdots,N-1,j=2,3,\cdots,M1-1;\\ i=N,N+1,\cdots N1-2,j=2,3,\cdots,M-1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{4-39}$$

其中 $M=9$，$M1=75$，$N=7$，$N1=14$. 对于边界 AF，BC，DE 和 CD 上的第一类边界条件有：

$$\left.\begin{aligned}&u_{i,1}=100,\quad i=2,3,\cdots,N1-1\\&u_{i,M}=0,\quad i=N,N+1,\cdots,N1-1\\&u_{i,M1}=0,\quad i=2,3\cdots,N.\\&u_{N,j}=0,\quad j=M,M+1,\cdots,M1\end{aligned}\right\}\tag{4-40}$$

对于 AB，FF 上的第二类边界条件，可离散为

$$\left.\begin{aligned}&u_{1,j}+u_{3,j}+u_{2,j+1}+u_{2,j-1}-4u_{2,j}=0,\\&\quad\text{其中}\quad u_{1,j}=u_{3,j}\quad(j=2,3,\cdots,M1-1)\\&u_{N1-2,j}+u_{N1,j}+u_{N1-1,j+1}+u_{N1-1,j-1}-4u_{N1-1,j}=0\\&\quad\text{其中}\quad u_{N1-2,j}=u_{N1,j}\quad(j=2,3,\cdots,M-1)\end{aligned}\right\}\tag{4-41}$$

这样，经过离散化，总共可得 $5\times73+7\times7=414$ 个线性代数方程式；求解这一方程组，即可得到 G_1 内部和边界上的全部节点磁位值. 图 4-11 表示用计算机计算时的程序总框图. 图 4-12 表示用计算机算出的标量等磁位线.

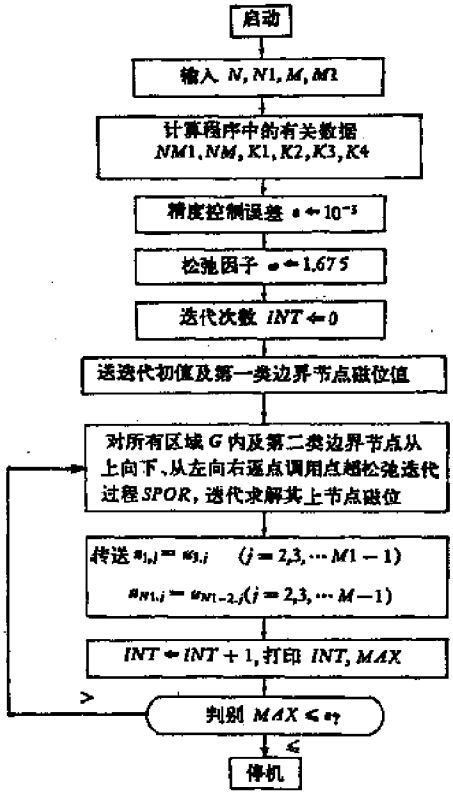


图 4-11　计算开槽电枢磁场分布的总框图

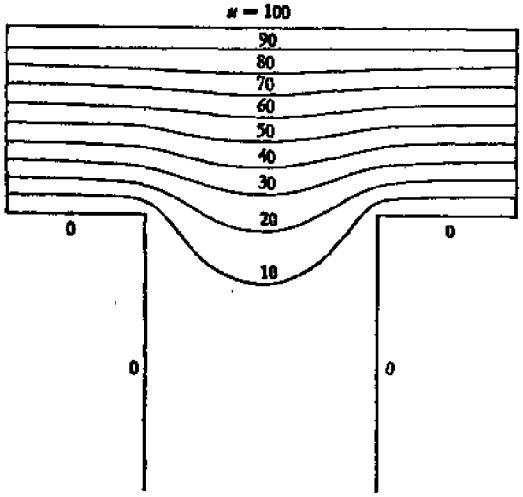


图 4-12　气隙内的标量等磁位线

4-4 槽内载流导体所生磁场的数值计算[3,4]

此问题已在第二章中研究过，现在再用有限差分法来求解.

槽内置在载流导体时，槽内磁场为旋度场，故应当用向量磁位来研究，即 $u=A_z$. 把图 4-13 所示单槽求解域分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个区域，则在载流区内 u 满足泊松方程；在非载流区内，u 满足拉普拉斯方程. 若导体为非磁性，$\mu\approx\mu_0$，则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\mu_0 J(x,y)\\&J(x,y)=J,\quad (x,y)\in G_{\text{Ⅰ}},G_{\text{Ⅱ}}\\&\qquad=0,\quad (x,y)\in G_{\text{Ⅰ}}\end{aligned}\right\}\tag{4-42}$$

从图 4-13 可见，整个磁场分布对槽中心线对称，故仅需求解整个区域的一半即可（取左半部分）. 在槽中心线上，由于对称关系，磁感强度的 y 向分量为零，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AB}=0\tag{4-43}$$

齿中心线是一条磁力线，故 EF 线上 u 为常值，若把该值取为 0，就有

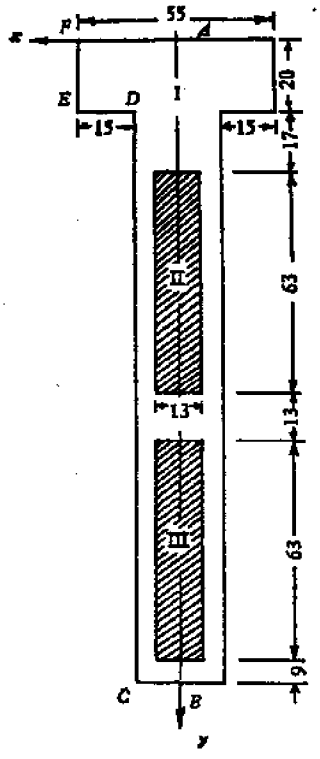


图 4-13 槽形和载流导体的尺寸

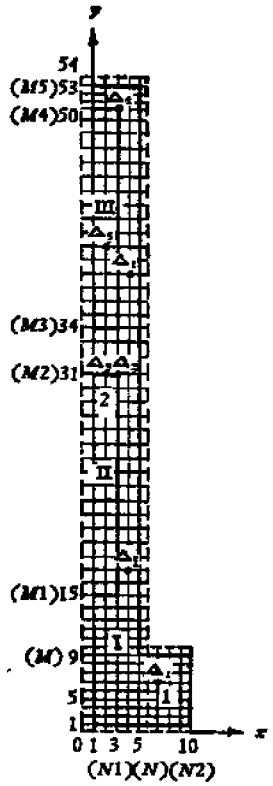


图 4-14 网格剖分和编号

$$u|_{EF}=0 \tag{4-44}$$

再设铁心的磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$，则在光滑面 AF、槽壁 BC、CD 和齿顶 DE 处，磁感强度只有法向分量；即

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{BC}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{DE}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{AF}=0\\&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{CD}=0\end{aligned}\right\} \tag{4-45}$$

对整个求解域作不等距网格剖分，如图 4-14 所示．区域内部各点磁位应满足下列五点差分方程：

$$\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_i}u_{i-1,j}+\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_j}u_{i,j-1}+\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_{i+1}}u_{i+1,j}+\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_{j+1}}u_{i,j+1}$$
$$-\left(\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_i}+\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_j}+\frac{k_j+k_{j+1}}{2h_{i+1}}+\frac{h_i+h_{i+1}}{2k_{j+1}}\right)u_{i,j}=-\frac{1}{4}\mu_0 J_{i,j}(h_i+h_{i+1})(k_j+k_{j+1}) \tag{4-46}$$

右端项中的 $J_{i,j}$可分成两类，标以 Δ_1 的这类节点，$J_{i,j}=0$；对其他节点，$J_{i,j}=J$．

根据 $u|_{EF}=0$，EF 线上各点的磁位可直接离散为

$$u_{N2,j}=0,\qquad (j=1,2,\cdots,M) \tag{4-47}$$

为处理第二类边界条件，在边界线 AB、BC、CD、DE 和 AF 外推一个步长处虚设一条格线，线上虚设一排节点．以边界线 AB 为例，虚设编号为 $i=0$ 的格线，如图 4-14 中所示；AB 线上所有节点磁位同样满足式(4-46)，但因 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AB}=0$，故

$$u_{2,j}=u_{0,j}\qquad (j=1,2,\cdots,M5) \tag{4-48}$$

即虚设节点处的磁位值按式（4-48）取值．对于边界 BC、CD、DE 和 AF，亦有类似的关系．

具体计算时，按自然顺序自左往右、由下往上排列节点编号．如果进一步将每条水平格线上的节点作为一组，则列出的差分方程组其系数矩阵将是块三对角阵．对于这类方程组，利用线超松驰迭代法来求解是适宜的．

图 4-15 表示用计算机计算时的程序框图．图 4-16 表示用计算机算出的等 A_z（磁力线）．

4-5 准泊松方程的差分离散[2—4]

上面研究的是介质为线性时的情况．若求解域内包含铁磁价质，考虑到铁磁介质的非线性性质时，二维恒定磁场的基本方程将为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-J_z \tag{4-49}$$

式中 $u=A_z$．式(4-49)是一个非线性偏微分方程，通常称为准泊松方程．

电机内部既有空气，又有铁心，既有载流区，又有非载流区；对不同区域内的点，ν 和 J_z应取不同的值．在气隙和载流区内，$\nu=\frac{1}{\mu_0}=$常值；在铁心内部，电密一般为 0，ν 则是磁感强度的函数，$\nu=\nu(B)=f(u)$．对于包括多种不同介质的区域，采用积分法来离散

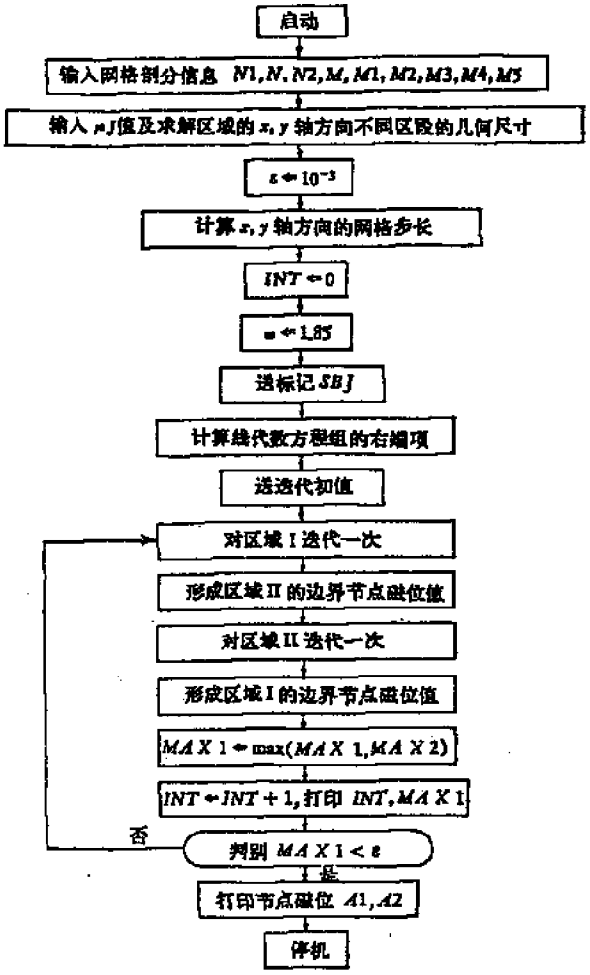


图 4-15　分区求解泊松方程时的框图

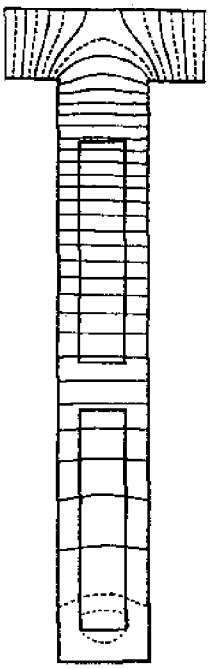


图 4-16　槽内载流导体所生的磁场

准泊松方程比较适宜．由此所得的差分格式是一个通用格式．

（一）积分法的实质

考虑下列准泊松方程的混合边值问题：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-J_s(x,y),\quad (x,y)\in G\\ &u=\Phi,\quad (x,y)\in \Gamma_1;\\ &\nu\frac{\partial u}{\partial n}=q,\quad (x,y)\in \Gamma_2;\end{aligned}\right\}\quad \Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2 \tag{4-50}$$

在求解域 G 所在的平面上作不等距网格剖分，用直线段连接连界上的节点所构成的离散边界 Γ_h 去逼近实际边界 Γ，如图 4-17 所示；相应地，实际的边界条件亦用离散边界 Γ_h 上的边界条件去逼近．

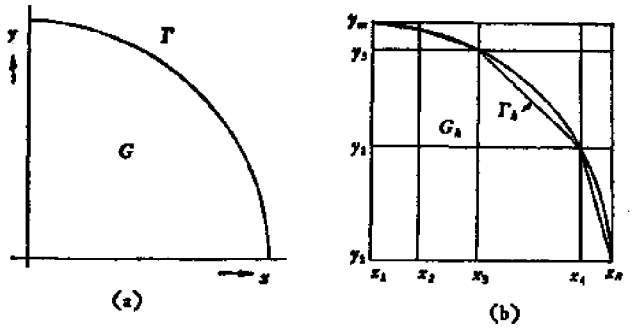


图 4-17　区域 G 的实际边界 Γ 和离散边界 Γ_h

在 $G_h+\Gamma_h$ 中，每一个节点 (x_i, y_j) 均对应有一个网眼 $G_{i,j}$，$G_{i,j}$ 的边界为 $\Gamma_{i,j}$. 按 $\Gamma_{i,j}$ 是否包含边界 Γ_h 上的节点，网眼大致可分为两类：第一类网眼与 G_h 内部的节点相对应，它由 $x=x_i-\frac{h_i}{2}$、$x=x_i+\frac{h_{i+1}}{2}$、$y=y_j-\frac{k_j}{2}$ 和 $y=y_j+\frac{k_{j+1}}{2}$ 四条线围成一个小矩形，周边上不包含离散边界 Γ_h 上的节点，如图 4-18 (a) 所示；第二类网眼与 Γ_h 上的节点相对应，它往往是一个多边形，其周边 $\Gamma_{i,j}$ 上至少有一条边包含 Γ_h 上的节点，如图 4-18 (b) 所示.

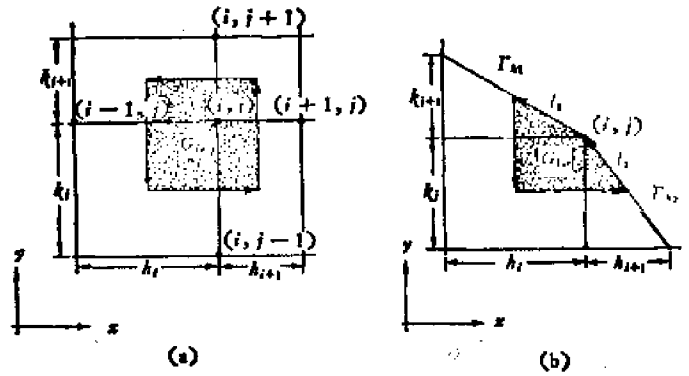


图 4-18　第一类和第二类网眼

(a) 第一类网眼；(b) 第二类网眼

在区域 $G_{i,j}$ 中对准泊松方程进行二重积分，可得

$$\iint_{G_{i,j}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy=-\iint_{G_{i,j}}J_z dxdy \tag{4-51}$$

根据格林公式，对区域 G 内的任意连续可微函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 有

$$\iint_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_\Gamma(Qdx+Pdy)$$

其中 Γ 是 G 的边界，线积分的正方向取为逆时针方向. 令 $P=\nu\frac{\partial u}{\partial x}$，$Q=-\nu\frac{\partial u}{\partial y}$，就有

$$\iint_{G_{i,j}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy=\int_{\Gamma_{i,j}}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}dy-\nu\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)$$

于是式(4-51)可改写成如下形式：

$$\int_{\Gamma_{i,j}}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}dy-\nu\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)=-\iint_{G_{i,j}}J_z dxdy \tag{4-52}$$

或

$$\int_{\Gamma_{i,j}}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl=-\iint_{G_{i,j}}J_z dxdy \tag{4-53}$$

式（4-52）就是建立差分方程的出发点．因为$\nu\frac{\partial u}{\partial x}=-H_y$，$\nu\frac{\partial u}{\partial y}=H_x$，所以式（4-52）就是平面内的安培环路定律．因此，从电磁场观点看，用积分法来离散就是把场的微分方程还原为积分形式，用安培环路定律来离散．

（二）用积分法对准泊松方程边值问题进行离散

第一类网眼　设$G_{i,j}$是第一类网眼

将式（4-52）中的ν和J按网格离散化，在每个网格内分别取为不同的常值，ν和J的下标采用该格右上角节点的编号，如图 4-19 所示．对式(4-52)的左端，用中心差商来逼近偏导数，即认为在右边这条积分路径上，$\frac{\partial u}{\partial x}\doteq\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}}$，在左边这条路径上，$\frac{\partial u}{\partial x}\doteq\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i}$，则

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{i,j}}\nu\frac{\partial u}{\partial x}dy&\doteq\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}}\left(\nu_{i+1,j}\frac{k_j}{2}+\nu_{i+1,j+1}\frac{k_{j+1}}{2}\right)-\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i}\left(\nu_{i,j+1}\frac{k_{j+1}}{2}+\nu_{i,j}\frac{k_j}{2}\right)\\&\doteq\frac{\nu_{i,j}k_j+\nu_{i,j+1}k_{j+1}}{2h_i}u_{i-1,j}+\frac{\nu_{i+1,j}k_j+\nu_{i+1,j+1}k_{j+1}}{2h_{i+1}}u_{i+1,j}\\&\quad-\left(\frac{\nu_{i,j}k_j+\nu_{i,j+1}k_{j+1}}{2h_i}+\frac{\nu_{i+1,j}k_j+\nu_{i+1,j+1}k_{j+1}}{2h_{i+1}}\right)u_{i,j}\end{aligned} \tag{4-54}$$

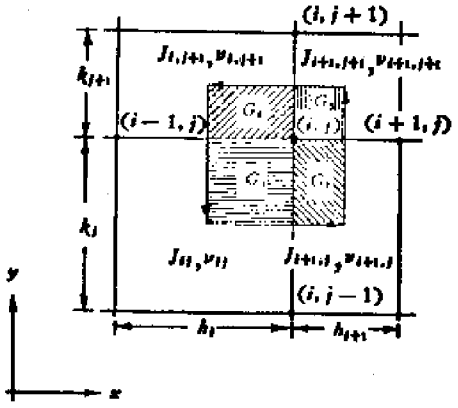


图 4-19　ν和J的编号

同理，对上、下两条路径，有

$$\int_{\Gamma_{i,j}}\nu\frac{\partial u}{\partial y}dx\doteq-\frac{\nu_{i,j}h_i+\nu_{i+1,j}h_{i+1}}{2k_j}u_{i,j-1}-\frac{\nu_{i,j+1}h_i+\nu_{i+1,j+1}h_{i+1}}{2k_{j+1}}u_{i,j+1}$$

$$+\left(\frac{\nu_{i,j}h_i+\nu_{i+1,j}h_{i+1}}{2k_j}+\frac{\nu_{i,j+1}h_i+\nu_{i+1,j+1}h_{i+1}}{2k_{j+1}}\right)u_{i,j} \tag{4-55}$$

再对式（4-52）右端的二重积分作如下逼近

$$\iint_{G_{i,j}} J_z dxdy \doteq \frac{1}{4}(J_{i,j}h_ik_j+J_{i,j+1}h_ik_{j+1}+J_{i+1,j}h_{i+1}k_j+J_{i+1,j+1}h_{i+1}k_{j+1}) \tag{4-56}$$

可得 P 点的五点差分方程为：

$$L_{i,j}u_{i-1,j}+R_{i,j}u_{i+1,j}+B_{i,j}u_{i,j-1}+T_{i,j}u_{i,j+1}-D_{i,j}u_{i,j}=F \tag{4-57}$$

式中 $L_{i,j}$、$R_{i,j}$、$B_{i,j}$、$T_{i,j}$分别为左、右、下、上四个相邻节点磁位的系数，$D_{i,j}$为节点本身磁位的系数，$F_{i,j}$为右端项；

$$\left.\begin{aligned}
&L_{i,j}=\frac{\nu_{i,j}k_j+\nu_{i,j+1}k_{j+1}}{2h_i}, \qquad R_{i,j}=\frac{\nu_{i+1,j}k_j+\nu_{i+1,j+1}k_{j+1}}{2h_{i+1}},\\
&B_{i,j}=\frac{\nu_{i,j}h_i+\nu_{i+1,j}h_{i+1}}{2k_j}, \qquad T_{i,j}=\frac{\nu_{i,j+1}h_i+\nu_{i+1,j+1}h_{i+1}}{2k_{j+1}},\\
&D_{i,j}=L_{i,j}+R_{i,j}+B_{i,j}+T_{i,j},\\
&F_{i,j}=-\frac{1}{4}J_{i,j}h_ik_j+J_{i,j+1}h_ik_{j+1}+J_{i+1,j}h_{i+1}k_j+J_{i+1,j+1}h_{i+1}k_{j+1})
\end{aligned}\right\} \tag{4-58}$$

与式（4-57）相应的系数计算格式为

	$T_{i,j}$	
$L_{i,j}$	$-D_{i,j}$	$R_{i,j}$
	$B_{i,j}$	

第二类网眼 若 $G_{i,j}$属于如图 4-18（b）所示的第二类网眼，其相应的节点（x_i，y_j）位于边界 Γ_h 上，则式（4-53）的左端线积分项可计算如下：

$$\int_{\Gamma_{i,j}}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl=\int_{x_i-\frac{h_i}{2},y_j+\frac{k_{j+1}}{2}}^{x_i-\frac{h_i}{2},y_j-\frac{k_j}{2}}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl+\int_{x_i-\frac{h_i}{2},y_j-\frac{k_j}{2}}^{x_i+\frac{h_{i+1}}{2},y_j-\frac{k_j}{2}}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl+\int_{l_1}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl+\int_{l_2}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl \tag{4-59}$$

上式中前二项积分，可采用与前面同样的逼近；即

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{x_i-\frac{h_i}{2},y_j+\frac{k_{j+1}}{2}}^{x_i-\frac{h_i}{2},y_j-\frac{k_j}{2}}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl\doteq\frac{u_{i-1,j}-u_{i,j}}{h_i}\left(\nu_{i,j}\frac{k_j}{2}+\nu_2\frac{k_{j+1}}{2}\right)\\
&\int_{x_i-\frac{h_i}{2},y_j-\frac{k_j}{2}}^{x_i+\frac{h_{i+1}}{2},y_j+\frac{k_j}{2}}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl\doteq\frac{u_{i,j-1}-u_{i,j}}{k_j}\left(\nu_{i,j}\frac{h_i}{2}+\nu_1\frac{h_{i+1}}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4-60}$$

其中 ν_1 和 ν_2 分别为两个三角形中的磁阻率. 对于边界 Γ_{h1}和 Γ_{h2}上的线积分，则要根据边界条件来计算. 若 Γ_{h1}和 Γ_{h2}上给定第二类边界条件 $\nu\frac{\partial u}{\partial n}=q$，且 q 在 Γ_{h1}和 Γ_{h2}上分段取为常值 q_1 和 q_2，则

$$\int_{l_1}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl\doteq q_1l_1, \qquad \int_{l_2}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl\doteq q_2l_2 \tag{4-61}$$

式中 l_1 和 l_2 分别为网眼边线在 Γ_{h1}和 Γ_{h2}的长度，$l_1=\frac{1}{2}\sqrt{h_{i+1}^2+k_j^2}$，$l_2=\frac{1}{2}\sqrt{h_i^2+k_{j+1}^2}$. 对于式（4-53）右端的二重积分，则有

$$\iint_{G_{i,j}} J_z dxdy \doteq \frac{1}{4}\left(J_{i,j}h_i k_j + \frac{1}{2}J_1 h_{i+1}k_j + \frac{1}{2}J_2 h_i k_{j+1}\right) \tag{4-62}$$

式中 J_1 和 J_2 分别为两个三角形中的电流密度. 于是对第二类网眼有

$$\frac{\nu_{i,j}k_j + \nu_2 k_{j+1}}{2h_i}u_{i-1,j} + \frac{\nu_{i,j}h_i + \nu_1 h_{i+1}}{2k_j}u_{i,j-1} - \left(\frac{\nu_{i,j}k_j + \nu_2 k_{j+1}}{2h_i} + \frac{\nu_{i,j}h_i + \nu_1 h_{i+1}}{2k_j}\right)u_{i,j}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(J_{i,j}h_i k_j + \frac{1}{2}J_1 h_{i+1}k_j + \frac{1}{2}J_2 h_i k_{j+1}\right) - (q_1 l_1 + q_2 l_2) \tag{4-63}$$

从上式可知，边界 Γ_h 上 P 点的磁位值仅与相邻两个节点的磁位值有关，故与上式相应的系数计算格式中有两个是 0，

	0	
$\frac{\nu_{i,j}k_j+\nu_2 k_{j+1}}{2h_i}$	$-\sum(\cdots)$	0
	$\frac{\nu_{i,j}h_i+\nu_1 h_{i+1}}{2k_j}$	

这样，将节点按自然顺序编号排列，即可得到一组非线性代数方程组 $\mathbf{Ku}=\mathbf{F}$. 再用逐次线性化法求解，即先设磁阻率 ν 为某一常值，使方程组转化为线性代数方程组，并求出其解答，然后进一步调整 ν 和方程式的系数，重复求解方程组，进行逐次逼近，最后即可求出各个节点的磁位值.

4-6 负载时直流电机内的非线性磁场[3—8]

本节说明考虑铁心饱和时，直流电机内非线性磁场（特别是换向区内的磁场）的计算.

（一）基本方程和边界条件

图 4-20 表示一台直流电机在一个极距内的剖面图. 为简化计，假定：(1)实际磁场可以作为二维场来研究；(2)不计曲率的影响，采用直角坐标系来分析；(3)换向极的顶部采用阶梯形去逼近.

饱和时，铁心的磁阻率 $\nu=f(B)$，所以整体而言，求解域 $ABCD$ 内的向量磁位（用 u 表示）满足非线性的准泊松方程. 负载时，边界条件为：

1. 电枢的内边界线 BC 和定子磁轭的外边界线 AD 是一条磁力线，若将该线的磁位值取为零，可得 $u|_{BC}=u|_{AD}=0$.

2. N 极和 S 极的极中心线上，磁位应满足半周期边界条件，即 $u|_{AB}=-u|_{CD}$. 半周期边界条件是一种特殊形式的强加边界条件，在离散时应注意对 AB 边和 CD 边作相同的网格剖分，以保证此条件的实现.

这样，负载时直流电机内的非线性磁场可归结为如下的二维非线性准泊松方程边值问题：

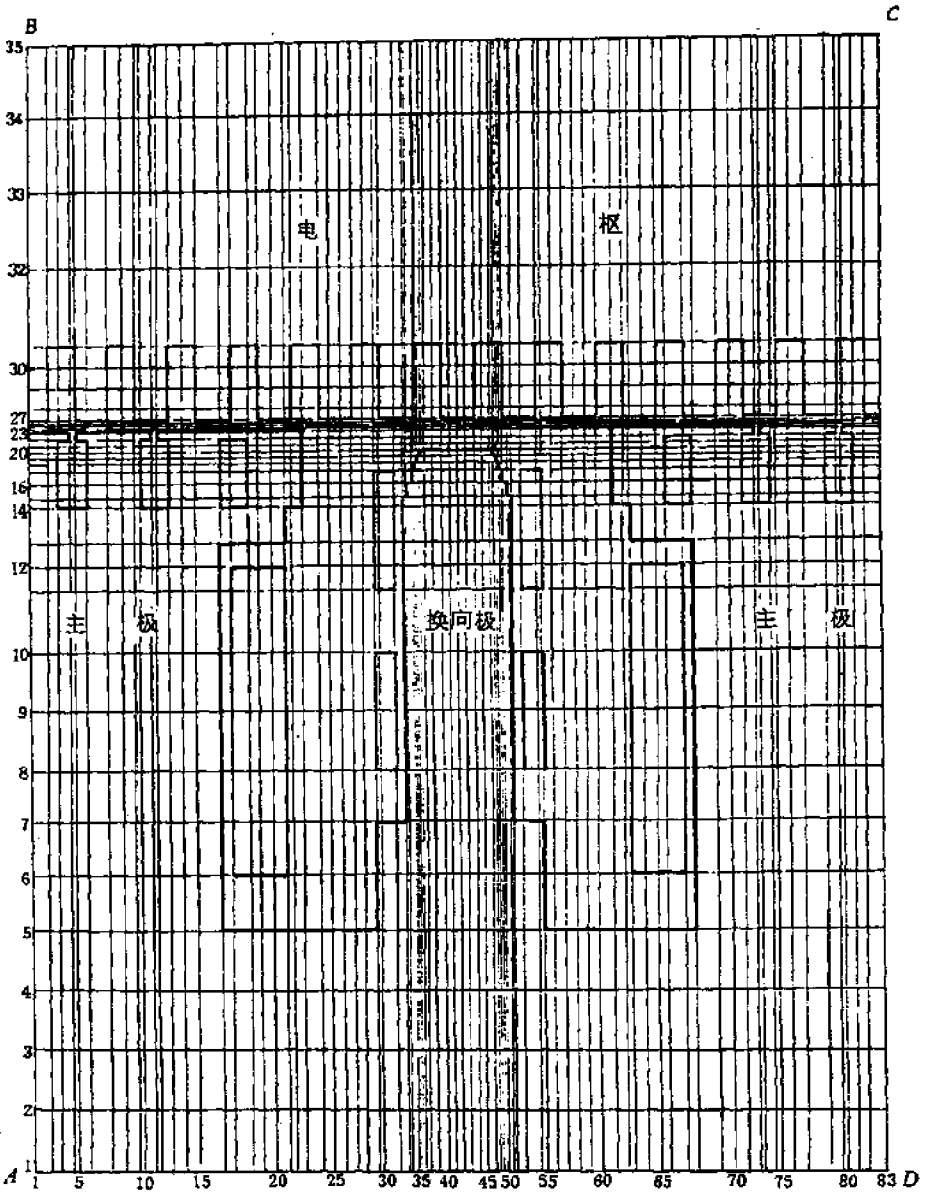


图 4-20　直流电机的剖面图和网格剖分

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-J,\quad (x,y)\in\square ABCD\\&u|_{BC}=u|_{AD}=0,\qquad u|_{AB}=-u|_{CD}\end{aligned}\right\}\tag{4-64}$$

在电机的磁场计算中，磁阻率 $\nu=f(B)$是以表格或曲线形式给出的. 图 4-21 表示电枢和磁极用电工钢片的 $\nu=f(B)$.

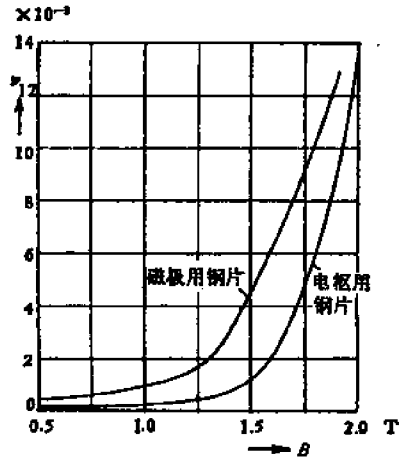


图 4-21　电枢和磁极用电工钢片的 $\nu=f(B)$

（二）差分离散化

网格剖分　对求解域 $ABCD$ 作不等距的网格剖分，如图 4-20 所示. 采用不等距网格可以减少节点数目，并使布局合理，避免边界条件的插值处理. 剖分时，将区域内部不同介质的交界面（例如电枢铁心与气隙的交界面，线圈与主极之间气隙的交界面等）均取作网格格线. 此外，将换向极顶部边界用一系列阶梯去逼近，组成阶梯的各个直线段分别与网格格线重合.

剖分后，对所有的格线编号，x 方向依次编为 $i=1,2,\cdots,N$；y 方向编为 $j=1,2,\cdots,M$；总共形成 $M\times N$ 个节点. 再对所有节点按自然顺序编号排列. 为了方便，有时在实际边界线 AB 外一个步长 h_1 处，再虚设一条格线 $A'B'$（编号为 $i=0$）.

差分离散　对于各个内部节点，根据式(4-57)，可列出如下差分方程：

$$L_{i,j}u_{i-1,j}+R_{i,j}u_{i+1,j}+B_{i,j}u_{i,j-1}+T_{i,j}u_{i,j+1}-D_{i,j}u_{i,j}=F_{i,j}\tag{4-65}$$

其中 $L_{i,j}$、$R_{i,j}$、$B_{i,j}$、$T_{i,j}$、$D_{i,j}$和 $L_{i,j}$如式（4-58）所示. 对于边界节点，节点磁位值可由边界条件相应给出. 例如对 AD 线和 BC 线上的第一类边界条件，可直接取格线 1 和 M 上的节点磁位值为 0；即

$$u_{i,1}=u_{i,M}=0,\quad i=1,2,\cdots,N\tag{4-66}$$

对 AB 线和 CD 线上的半周期边界条件，可使格线 $i=N$ 上的磁位值为格线 $i=1$ 上磁位值的负值；即

$$u_{N,j}=-u_{1,j},\quad j=1,2,\cdots,M\tag{4-67}$$

这样，需要求解的节点磁位值共$(M-2)(N-1)$个.

总之，经过离散，对于求解域 G 内的各个节点，可以列出一组以节点磁位 u 为未知数的非线性方程组：

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \tag{4-68}$$

其中 $\mathbf{K}$ 为系数矩阵，$\mathbf{K}=\mathbf{K}(\nu)$；$\mathbf{u}$ 为节点磁位所组成的列向量；$\mathbf{F}$ 为右端项列向量. 这个方程组可用逐次线性化法来求解.

（三）计算步骤，主框图和计算实例

计算步骤和主框图 为使整个计算程序化，现将逐次线性化解法的主要步骤概述如下：

1. 对非线性方程组（4-68）构造下列迭代格式

$$\mathbf{K}(\nu^{(k)})\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{F}, \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{4-69}$$

上标 k 表示迭代次数.

2. 首先给出各点磁阻率的初始值 $\nu_{ij}^{(0)}$（对非铁磁部分 $\nu=\nu_0=$常值），并得到一个关于 $\mathbf{u}^{(1)}$ 的线性代数方程组

$$\mathbf{K}(\nu^{(0)})\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{F} \tag{4-70}$$

3. 用线超松驰迭代法解式(4-70)，得到节点磁位列向量的第一次近似值 $\mathbf{u}^{(1)}$.

4. 根据 $\mathbf{u}^{(1)}$，利用中心差商确定 G 中所有属于铁磁部分的各个网格中心处的磁感强度 B

$$\left.\begin{aligned} B_x &\doteq \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k_j}+\frac{u_{i-1,j}+u_{i-1,j-1}}{k_j}\right) \\ B_y &\doteq -\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i}+\frac{u_{i,j-1}-u_{i-1,j-1}}{h_i}\right) \\ B &= \sqrt{B_x^2+B_y^2} \qquad i>1,\quad j>1 \end{aligned}\right\} \tag{4-71}$$

5. 根据该区所用铁磁材料的 $\nu=f(B)$ 曲线，由算出的 B 值确定各点磁阻率的修正值 $\nu^{(1)}$.

6. 用修正的 $\nu^{(1)}$ 重新算出方程组（4-69）的各个系数，再重新用线超松驰迭代法求解修正后的线性代数方程组，并求得各节点磁位的第二次近似值 $\mathbf{u}^{(2)}$.

7. 重复上述步骤，直到相邻两次迭代所得的 $\mathbf{u}^{(k)}$ 和 $\mathbf{u}^{(k+1)}$ 的分量之差（为简单计，可选定某个具有代表性的节点磁位）小于预先给定的控制误差，则可认为迭代过程收敛；并取最后一次迭代所得的 $\mathbf{u}$ 值作为方程的近似解.

从以上说明可见，整个迭代过程包括外迭代和内迭代两个过程：其中由第 k 次迭代解 $\mathbf{u}^{(k)}$ 算出 B 和 $\nu^{(k)}$，重新算出方程组的各个系数，再求解线性代数方程组以得到第 $k+1$ 次迭代解 $\mathbf{u}^{(k+1)}$，这个过程称为外迭代过程. 在外迭代过程中，用迭代法解线性代数方程组（4-69）以得到 $\mathbf{u}^{(k+1)}$，这个过程称为内迭代过程. 由于式(4-69)的系数矩阵 $\mathbf{K}$ 为正定、对称、稀疏、带状的五对角型矩阵，故常用线超松驰迭代法来求解方程组（4-69），以加速计算速度.

另外，在每次调整磁阻率 ν 时，为加速收敛，可采用欠松驰迭代；即先由 $\mathbf{u}^{(k)}$ 确定各点的磁感强度，并由 $\nu=f(B)$ 曲线确定各点磁阻率的新值 $\tilde{\nu}^{(k)}$，再用下列欠松驰公式算出磁阻率的修正值 $\nu^{(k)}$：

$$\nu^{(k)} = \nu^{(k-1)} + \omega_r(\tilde{\nu}^{(k)} - \nu^{(k-1)}) \tag{4-72}$$

式中 ω_r 为欠松弛因子，$0<\omega_r<1$.

图 4-22 表示整个计算的主框图.

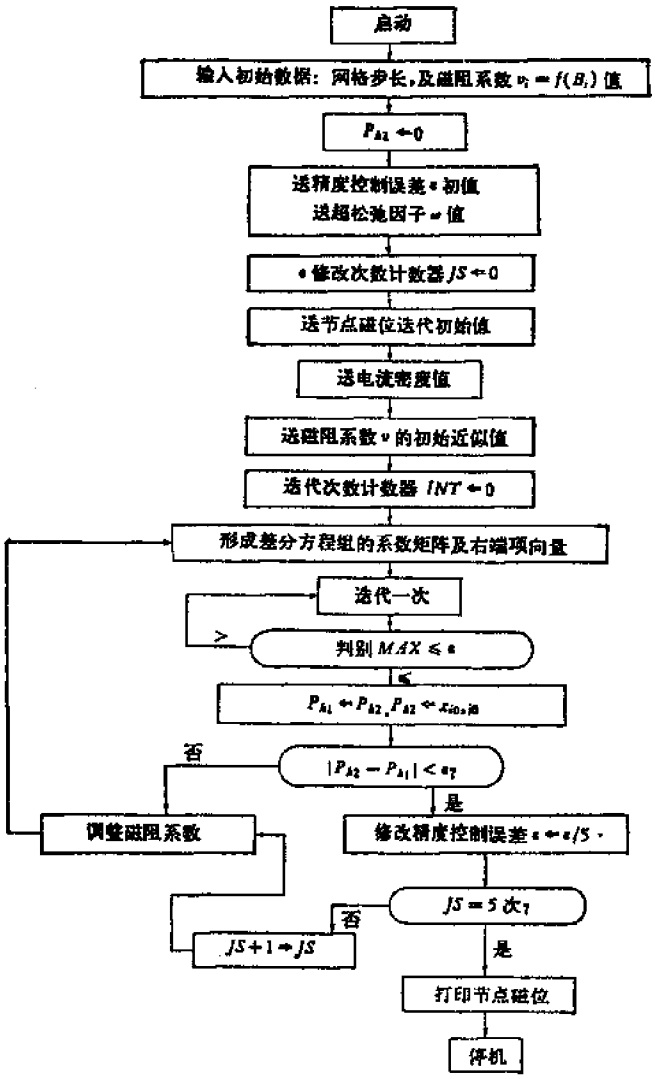


图 4-22　主框图

$x_{i0,j0}$——某节点(i_0, j_0)的磁位迭代值；

P_{A1}，P_{A2}——节点 (i_0, j_0) 处前、后两次外迭代的磁位近似值；

MAX——相邻两次内迭代的相应节点磁位值之差的绝对值最大者；即

$$\mathrm{MAX} = \max_{i,j} |x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)}|$$

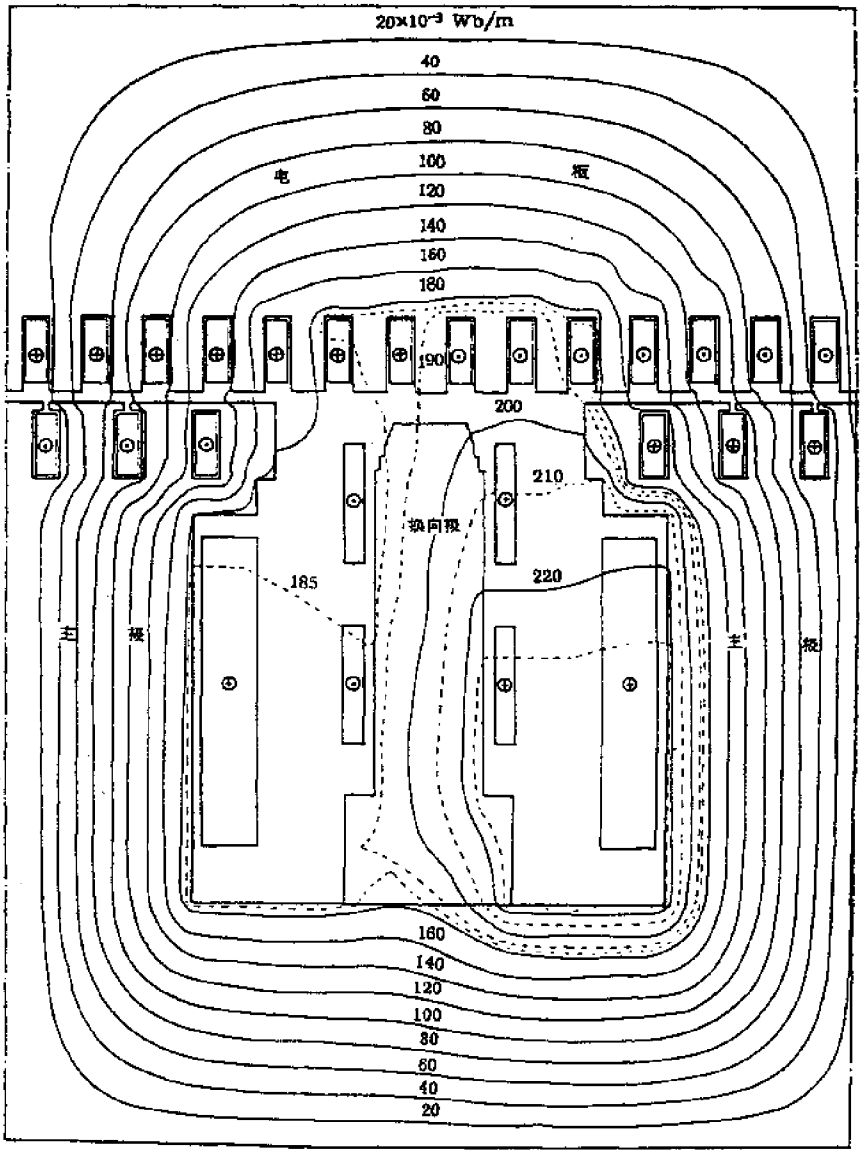


图 4-23　一台 1300kW、660V 的直流电动机在额定状态下的磁场分布

计算实例 利用上述方法，对一台国产 1300kW、660V、100/220r/min 的直流电动机在空载和额定负载下的非线性磁场进行了详细的计算. 整个横截面上共 $M\times N=35\times 83=2905$ 个节点，求解节点数为 $(M-2)(N-1)=33\times 82=2706$. 计算时超松驰因子 ω 取为 1.87，磁阻率的欠松驰因子 ω_r 取为 $\frac{1}{12}$. 图 4-23 表示用计算机算出的额定负载时一个极距内的磁场分布图. 图 4-24 表示额定状态下在气隙中心线上气隙磁场的分布图. 从图可以确定负载时气隙磁场的畸变程度，交轴电枢反应的等效去磁效应，换向极和补偿绕组的有效程度，主极和换向极的漏磁系数等一系列数据，从而为换向极磁场的调整和进一步改进设计提供可靠的依据.

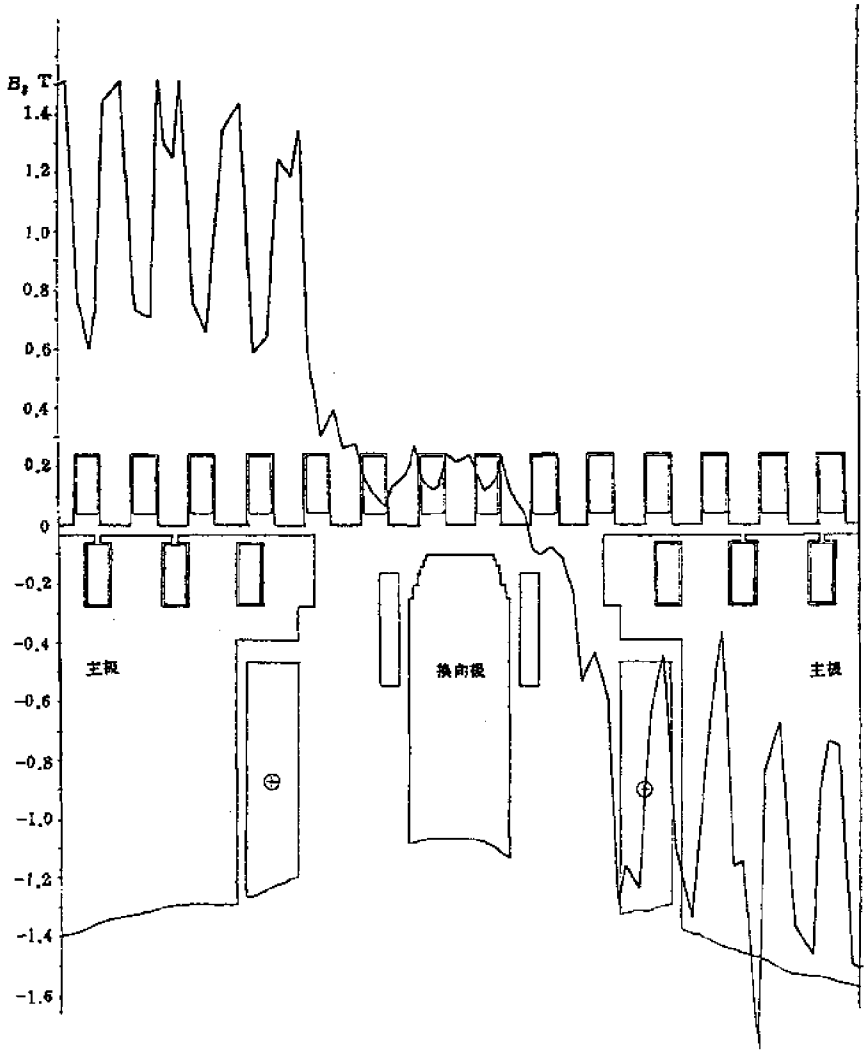


图 4-24 额定负载下直流电机的气隙磁场分布

4-7 有限单元法[9—15]

有限单元法是从变分原理或加权余量法出发，结合单元剖分和分片插值，用以求解数理方程的一种离散化数值方法. 由于它具有单元剖分灵活，算法统一、通用的优点，并适用于电子计算机的计算，因而近年来在工程中得到广泛的应用. 对于电机中的各种二维和三维电磁场问题，有限单元法是一种有效的数值方法.

以变分原理为基础的有限元法在求解磁场问题时，其过程大致如下：

1. 建立问题的变分表述　从待解的磁场边值问题出发，利用变分原理把问题转化为等价的变分问题，即能量泛函的极值问题.

2. 单元剖分　将求解区域剖分成一系列子区域，即单元.

3. 选择分片插值函数　选取分片光滑的插值函数去逼近整个求解域内光滑的磁位函数（或其他场量，下同）.

4. 对变分问题离散化　把磁位的插值函数代入能量泛函，对变分问题进行离散化，得到以 n 个节点磁位为未知数的 n 阶联立代数方程组.

5. 求解代数方程组　用强加边界条件修改方程组，然后求解修改后的方程组，得到各个节点的磁位近似解，并由此算出各个单元和节点的磁感强度值.

6. 结果分析

以加权余量法为基础的有限元法，其实施过程除 1 应为建立问题的加权余量表述，4 为对加权余量积分作离散化处理之外，其余步骤与上述步骤基本相同.

下面先对单元剖分、分片插值和变分问题的离散处理作一简要说明.

（一）单元剖分

把求解域分割成有限个子域（单元），这一步骤称为单元剖分.

单元类型和选择　对于二维磁场问题，最常用的单元是具有三个节点的三角形单元，简称三角元 [图 4-25 (a)]. 这种单元的优点是，它的组合很容易逼近任何形状的二维区域；由于这种单元具有三个自由度，其插值函数为 x，y 的线性函数，所以比较简单，并在多数情况下能够满足工程问题的精度要求. 另一种常用的单元是具有四个节点的矩形单元 [图 4-25 (b)]. 这种单元的插值函数为双线性函数，其精度比三角元稍高，缺点是

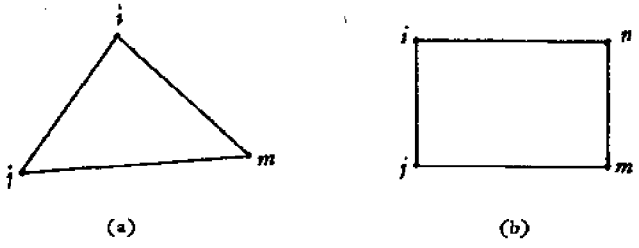
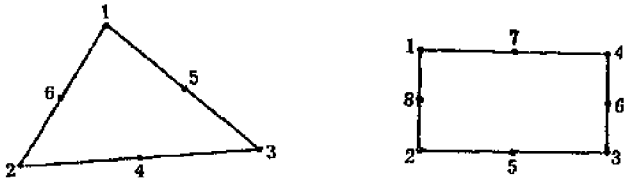


图 4-25　三角元和矩形元
(a) 三角元；(b) 矩形元

对曲线边界不能较好地拟合，因此仅在边界形状较为规则的情况下才采用．在电机工程中，大多采用三角元．

单元类型的选择，主要取决于求解域的形状以及解答的精度要求．对于精度要求较高的场合，可以采用二阶元（六节点三角元或八节点矩形元）或高阶元（图 4-26）．这些单元的节点数和自由度比一阶元多，从而插值函数的阶数亦比一阶元高，因此可以得到较高的精度；相应地，程序实现和计算亦将比一阶元稍为复杂一些．

下面介绍如何用三角元来进行场域剖分．



(a)　　(b)

图 4-26　二阶三角元和矩形元

(a) 三角元；(b) 矩形元

单元剖分　把求解区域 $G+\Gamma$ 剖分为一系列互不重叠的三角形单元，如图 4-27 所示．对曲线边界，可用适当的折线去逼近，即用直线段去局部近似代替曲线边界，并构成相应的三角形单元的一条边．

单元剖分时，应注意以下几点：

1. 任一三角形单元的顶点应是相邻三角形单元的顶点，而不能是相邻单元边界上的点．

2. 若区域内部或边界处的介质系数有间断性，则间断的点、线应取作为三角形单元的顶点和边．

3. 三角形单元三边边长（或三个顶角）不要相差过于悬殊．

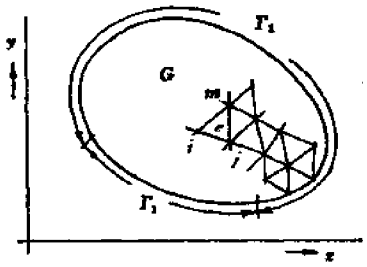


图 4-27　单元剖分

4. 单元剖分的疏密，通常根据精度要求和该处场的变化情况，计算机的存储量和速度等因素来定．一般来说，场的变化较为剧烈、精度要求较高和需要详细了解的部位，应当剖分得密一些，反之则可剖分得疏一些．

单元剖分后，将所有单元的顶点作为节点，并按一定次序把所有单元和节点进行编号，同时给出以下计算所需信息：

1. 节点坐标 (x_k, y_k)，$k=1, 2, \cdots, N$，N 为总节点数；

2. 三角元 e 的顶点 i，j，m 按逆时针方向排列时，各三角元的顶点编号；$e=1, 2, \cdots, E$，E 为单元总数．

（二）单元上磁位的插值函数

单分剖分以后，接下来的问题就是选择插值函数．有限元的基本思想之一，就是按照单元来分片构造和定义插值函数．这样一方面可以使近似解更加易于逼近精确解，并使插值函数易于选择；另一方面则将意味着插值函数及其导数可能在单元交界面处出现不连续性．实用上都用多项式作为插值函数，因为多项式可以对任何复杂的场的分布提供较好的近似，并易于求导和积分．图 4-28 示出了 m 次完整多项式的各项．多项式的次数取决于单元的节点数（即自由度数）．例如三节点三角元有三个自由度，故多项式只有三项，即常数项和 x、y 的线性项；六节点三角元有六个自由度，故多项式有六项，即常数项、线性项和二次项．

$$
\begin{array}{lll}
1 & & \cdots\cdots\text{常数项} \\
x \quad y & & \cdots\cdots\text{线性项} \\
x^2 \quad xy \quad y^2 & & \cdots\cdots\text{二次项} \\
x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 & & \cdots\cdots\text{三次项} \\
x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4 & & \cdots\cdots\text{四次项} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & &
\end{array}
$$

图 4-28　m 次完整多项式（帕斯卡三角形）

在选取插值函数时，要注意到完备性和相容性．完备性是指，对任何给定的具有一定光滑性的函数，当剖分加密、单元无限变小时，用插值函数所表示的近似解能按平均意义收敛到真解．若泛函的被积函数中导数项的最高阶数为 r，欲使该泛函存在，应采用 r 次（或更高次数的）完整多项式作为插值函数．相容性是指，在单元交界面处，分片插值函数应当连续．相容性一方面是场的物理性质所要求；另一方面，只有这样，泛函中才不会出现额外的“交界面贡献”项．为使相容性得到保证，交界面上位函数的值应当被该面上各个节点的位值唯一确定．当泛函的被积函数中最高含有 r 阶导数时，要求插值函数本身以及直到 $r-1$ 阶导数均为连续，即具有 C^{r-1} 连续性．例如，对于泊松方程的边值问题，泛函的被积函数中含有 u 的一阶导数，所以要求插值多项式具有 C^0 连续性．此时，三节点三角元和六节点三角元都满足相容性；对四节点矩形元，当边线与总体坐标轴线平行时，亦满足相容性．

三角元的插值函数　三节点三角元是一种最简单和最常用的单元，由于它具有三个自由度，故可构造一个线性函数去逼近单元 e 内的磁位函数 $u^e(x,y)$：

$$u^e(x,y)\doteq\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y \qquad (4\text{-}73)$$

式中 α_1、α_2 和 α_3 为待定常数．式（4-73）是一个完整的一阶多项式，其中第一项为常数项，第二和第三项分别为 x 和 y 的线性项．从下节可知，对于恒定磁场的泊松方程边值问题，泛函中被积函数最高只包含磁位 u 的一阶导数，插值函数（4-73）满足完备性和相容性．

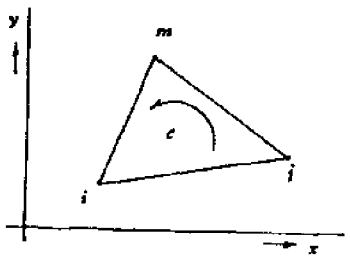


图 4-28　三角形单元 e

设三角元的编号为 e，其顶点按逆时针

次序的编号为 i，j，m，相应的坐标分别为 (x_i, y_i)，(x_j, y_j) 和 (x_m, y_m)；如图 4-28 所示．若三个顶点处的磁位分别为 u_i^e，u_j^e 和 u_m^e，把三个顶点的磁位和坐标依次代入式 (4-73)，可得

$$\left.\begin{aligned} u_i^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned}\right\} \tag{4-74}$$

求解上式，即可确定 α_1、α_2 和 α_3：

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_i^e & x_i & y_i \\ u_j^e & x_j & y_j \\ u_m^e & x_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\Delta_e}(a_i u_i^e + a_j u_j^e + a_m u_m^e) \tag{4-75}$$

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_i^e & y_i \\ 1 & u_j^e & y_j \\ 1 & u_m^e & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\Delta_e}(b_i u_i^e + b_j u_j^e + b_m u_m^e) \tag{4-76}$$

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i^e \\ 1 & x_j & u_j^e \\ 1 & x_m & u_m^e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\Delta_e}(c_i u_i^e + c_j u_j^e + c_m u_m^e) \tag{4-77}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, & a_j &= x_m y_i - x_i y_m, & a_m &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_m, & b_j &= y_m - y_i, & b_m &= y_i - y_j, \\ c_i &= x_m - x_j, & c_j &= x_i - x_m, & c_m &= x_j - x_i, \end{aligned}\right\} \tag{4-78}$$

Δ_e 则是单元 e 的面积（恒为正值），

$$\Delta_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b_i c_j - b_j c_i) = \frac{1}{2}(a_i + a_j + a_m) \tag{4-79}$$

把 α_1、α_2、α_3 代入式 (4-73)，经过整理，可得

$$\begin{aligned} u^e(x,y) &\doteq \frac{1}{2\Delta_e}[(a_i + b_i x + c_i y)u_i^e + (a_j + b_j x + c_j y)u_j^e + (a_m + b_m x + c_m y)u_m^e] \\ &= N_i^e u_i^e + N_j^e u_j^e + N_m^e u_m^e \end{aligned} \tag{4-80}$$

式中 N_i^e、N_j^e 和 N_m^e 称为单元 e 的基函数或形状函数；

$$\left.\begin{aligned} N_i^e &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j^e &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_m^e &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_m + b_m x + c_m y) \end{aligned}\right\} \tag{4-81}$$

写成矩阵形式时有

$$u^e(x,y) = [N_i^e \; N_j^e \; N_m^e]\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_m^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e\mathbf{u}^e \tag{4-82}$$

式中 $\mathbf{N}^e$ 表示单元形状函数行阵；$\mathbf{u}^e$ 表示单元磁位的列向量；

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e \; N_j^e \; N_m^e], \qquad \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_m^e \end{bmatrix} \tag{4-83}$$

从式(4-80)可见，单元内任一点的磁位都可以用单元三个顶点的磁位和单元的形状函数来表示，从而整个求解域内的磁位就可以用每个三角元的顶点磁位所构造的线性插值函数表达出来. 由于相邻单元的公共边和公共顶点上磁位插值函数取相同的值，故磁位的线性插值函数在 G 内保持了整体连续性.

从式（4-80）可见，在单元 e 中，u 的偏导数为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u^e}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta_e}(b_i u_i^e + b_j u_j^e + b_m u_m^e) \\ \frac{\partial u^e}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta_e}(c_i u_i^e + c_j u_j^e + c_m u_m^e) \end{aligned}\right\} \tag{4-84}$$

即 $\frac{\partial u^e}{\partial x}$、$\frac{\partial u^e}{\partial y}$均为常值. 在三角元内，磁感强度 B 和磁场强度 H 为常值；在不同单元内，$B(H)$取不同的常值，这是一阶三角元的特点.

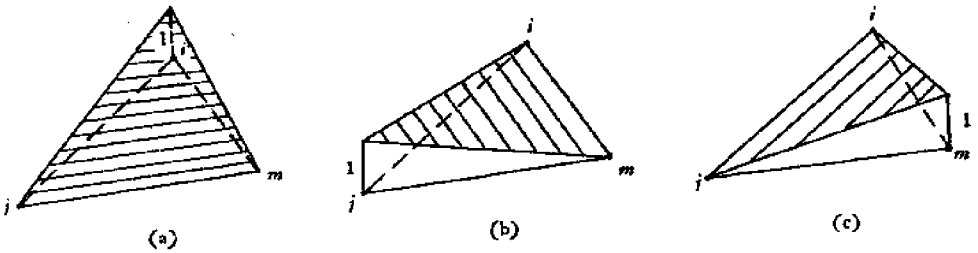


图 4-29　形状函数 N_i^e、N_j^e 和 N_m^e 的图形

(a) N_i^e 的分布；(b) N_j^e 的分布；(c) N_m^e 的分布

形状函数的含意和性质　从式 (4-81) 可见，对三角元而言，形状函数 N_i^e、N_j^e 和 N_m^e 亦是 x、y 的线性函数；N_i^e、N_j^e 和 N_m^e 仅与三角形三个顶点的坐标以及场点（x，y）的位置有关，而与节点的磁位值无关. 当节点 j 和 m 的磁位为 0，节点 i 的磁位为 1 时，三角元内磁位的分布就是 N_i^e 的分布形状；对 N_j^e 和 N_m^e亦有类似的情况；所以 N_i^e、N_j^e 和 N_m^e

称为单元的形状函数：

$$\left.\begin{aligned} N_i^e &= u^e(x,y)\big|_{u_i^e=1,\ u_j^e=u_m^e=0} \\ N_j^e &= u^e(x,y)\big|_{u_j^e=1,\ u_i^e=u_m^e=0} \\ N_m^e &= u^e(x,y)\big|_{u_m^e=1,\ u_i^e=u_j^e=0} \end{aligned}\right\} \tag{4-85}$$

图 4-29 示出形状函数 N_i^e、N_j^e 和 N_m^e 的分布.

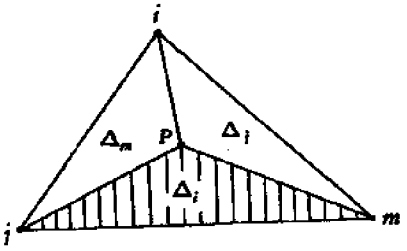


图 4-30

从另一个角度看，若 $P(x,y)$ 为三角元内任意一点，如图 4-30 所示；iP，jP，mP 把三角形分成 Δ_i、Δ_j 和 Δ_m 三部分. 把 Δ_i、Δ_j 和 Δ_m 与整个三角形的面积 Δ_e 之比定义为 P 点的面积坐标，用 L_i、L_j 和 L_m 表示，

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_e}, \quad L_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_e}, \quad L_m = \frac{\Delta_m}{\Delta_e} \tag{4-86}$$

则利用 L_i、L_j 和 L_m 就可以确定 P 点在三角形 ijm 中的位置. 不难导出

$$\begin{aligned} L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_e} &= \frac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta_e}\left(\begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_m & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix} y\right) \\ &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_i + b_i x + c_i y) \end{aligned} \tag{4-87}$$

同理有

$$L_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_e} = \frac{1}{2\Delta_e}(a_j + b_j x + c_j y) \tag{4-88}$$

$$L_m = \frac{\Delta_m}{\Delta_e} = \frac{1}{2\Delta_e}(a_m + b_m x + c_m y) \tag{4-89}$$

上面三个式子表明，对于三节点三角元，P 点的形状函数值就等于它的面积坐标值，即

$$N_i^e = L_i, \quad N_j^e = L_j, \quad N_m^e = L_m \tag{4-90}$$

这就是形状函数的几何意义.

由于三个节点的面积坐标之和恒等于 1，即

$$L_i + L_j + L_m = \frac{\Delta_i}{\Delta_e} + \frac{\Delta_j}{\Delta_e} + \frac{\Delta_m}{\Delta_e} = 1$$

由此可得

$$N_i^e(x,y) + N_j^e(x,y) + N_m^e(x,y) = 1 \tag{4-91}$$

从面积坐标出发，不难看出在顶点 i 处，N_i^e 等于 1；而在顶点 j 或 m 处，N_i^e 等于 0；即

$$N_i^e(x_i,y_i) = 1, \quad N_i^e(x_j,y_j) = 0, \quad N_i^e(x_m,y_m) = 0 \tag{4-92}$$

总之有

$$N_i^e(x_k,y_k)=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & k=i\text{ 时;}\\ 0, & k\neq i\text{ 时.}\end{cases}\qquad(k=i,j,m)\tag{4-93}$$

δ_{ik}称为 Kronecker δ. 对于 N_j^e 和 N_m^e 亦有类似的关系.

对式（4-91）求导，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_i^e}{\partial x}+\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\frac{\partial N_m^e}{\partial x}=0\\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y}+\frac{\partial N_j^e}{\partial y}+\frac{\partial N_m^e}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{4-94}$$

最后，对于三角元可以证明：

$$\iint_{G_e}N_i^e dxdy=\iint_{G_e}N_j^e dxdy=\iint_{G_e}N_m^e dxdy=\frac{1}{3}\Delta_e\tag{4-95}$$

$$\iint_{G_e}N_i^e N_j^e dxdy=\frac{1}{12}\Delta_e(1+\delta_{ij})\tag{4-96}$$

式（4-95）的证明如下. 由于

$$\begin{aligned}\iint_{G_e}N_i^e dxdy&=\frac{1}{2\Delta_e}\left[\iint_{G_e}a_i dxdy+\iint_{G_e}b_i x dxdy+\iint_{G_e}c_i y dxdy\right]\\&=\frac{1}{2\Delta_e}[a_i\Delta_e+b_i\Delta_e\bar{x}+c_i\Delta_e\bar{y}]=\frac{1}{2}(a_i+a_i\bar{x}+c_i\bar{y})\end{aligned}\tag{4-97}$$

式中 $\bar{x}$，$\bar{y}$为三角形的重心坐标；$\bar{x}=\frac{1}{3}(x_i+x_j+x_m)$，$\bar{y}=\frac{1}{3}(y_i+y_j+y_m)$. 把 $\bar{x}$、$\bar{y}$的表达式代入式（4-97），经过整理，可得

$$\begin{aligned}\iint_{G_e}N_i^e dxdy&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(x_iy_j-x_jy_i+x_jy_m-x_my_j+x_my_i-x_iy_m)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&x_i&y_i\\1&x_j&y_j\\1&x_m&y_m\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\Delta_e\end{aligned}\tag{4-98}$$

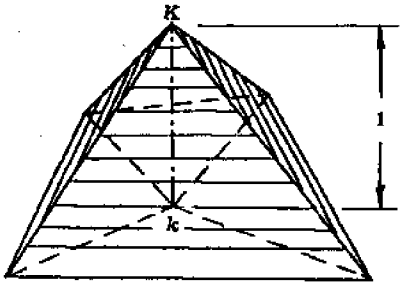


图 4-31　整体形状函数 $N_k(x,y)$的分布

同理可以证明，$\iint_{G_e}N_j^e dxdy$ 和 $\iint_{G_e}N_m^e dxdy$ 亦都等于$\frac{1}{3}\Delta_e$.

所有单元的形状函数都求出后，把有公共节点的相邻单元上的形状函数拼装起来，可得每个节点的整体形状函数. 不难看出，对于三角元，节点 k 处的整体形状函数 N_k 将是一个角锥函数；即

$$N_k(x,y)=\begin{cases}1, & \text{在节点 } k \text{ 处;}\\ N_k^e, & \text{在节点 } k \text{ 周围的各个三角元中;}\\ 0, & \text{在其他区域.}\end{cases}$$

图 4-31 示出了 $N_k(x,y)$的分布图.

（三）泛函的离散及求极值

节点的整体形状函数 N_k 求出后，整个求解域内的磁位 u 即可用各个节点的磁位表示出：

$$u \doteq \sum_{k=1}^{N} N_k u_k \tag{4-100}$$

相应地，与该边值问题相应的泛函 $I(u)$亦将离散为与 N 个节点磁位相关的多元函数 $I(u_1,u_2,\cdots,u_N)$；而泛函 $I(u)$的极值问题将转化为以形状函数 $N_1,N_2,\cdots,N_N$ 所张成的有限元子空间中的多元函数的极值问题.

$$I(u_1,u_2,\cdots,u_N) = \min \tag{4-101}$$

根据多元函数理论，当 $I(u_1,u_2,\cdots,u_N)$达到极值时，应有

$$\frac{\partial I}{\partial u_p} = 0 \qquad (p = 1,2,\cdots,N) \tag{4-102}$$

由此即可得到一个代数方程组. 再用第一类边界条件修改式(4-102)，并用数值法求解修改后的方程组，即可得到各个节点上磁位的数值解.

实际处理时，先把泛函 I 写成各个单元上的泛函 I^e 之和；即

$$I = \sum_{e=1}^{E} I^e \tag{4-103}$$

式中 E 为总单元数；然后把 I^e 用单元 e 的三个节点磁位 u_i^e、u_j^e 和 u_m^e 表出，并对 u_i^e、u_j^e、u_m^e 求导，以得到

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I^e}{\partial u_i^e} &= k_{ii}^e u_i^e + k_{ij}^e u_j^e + k_{im}^e u_m^e - f_i^e \\
\frac{\partial I^e}{\partial u_j^e} &= k_{ji}^e u_i^e + k_{jj}^e u_j^e + k_{jm}^e u_m^e - f_j^e \\
\frac{\partial I^e}{\partial u_m^e} &= k_{mi}^e u_i^e + k_{mj}^e u_j^e + k_{mm}^e u_m^e - f_m^e
\end{aligned}\right\} \tag{4-104}$$

再进一步将所有单元的“贡献”按式（4-102）和（4-103）依次叠加，并令其等于零；即

$$\sum_{e=1}^{E} \frac{\partial I^e}{\partial u_1} = 0, \quad \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial I^e}{\partial u_2} = 0, \quad \cdots, \quad \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial I^e}{\partial u_N} = 0 \tag{4-105}$$

由此即可得到一组以 N 个节点磁位为未知数的代数方程组. 此过程中的第一步称为单元分析，第二步称为总体合成. 这样做，对于用计算机来计算和处理，是特别方便的. 单元分析和总体合成的具体步骤，将在下面几节里结合实际问题来说明.

4-8 二维泊松方程的变分表述[9—15]

变分原理是数学物理方法中的一个重要方法，它常常能把椭圆型偏微分方程的边值问题转化为与之等价的变分问题，即相应泛函（能量积分）的极值问题. 下面以二维泊松方程的混合边值问题为例，建立其变分表述.

（一）介质系数为常值时

若求解域为 G，边界为 Γ、G 内介质为均匀、介质系数 ν 为一常值，则二维泊松方程的混合边值问题可表示为：

$$\left.\begin{aligned}&\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=-J_z,\quad (x,y)\in G\\&u|_{\Gamma_1}=\Phi,\quad \nu\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=q\end{aligned}\right\}\tag{4-106}$$

式中 $u=A_z$，J_z 为 G 内的分片连续函数；$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$，Γ_1 上给定 u 的边值、Γ_2 上给出 u 的法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$(图 4-32)，$\Phi$ 和 q 分别是 Γ_1 和 Γ_2 上的分片连续函数.

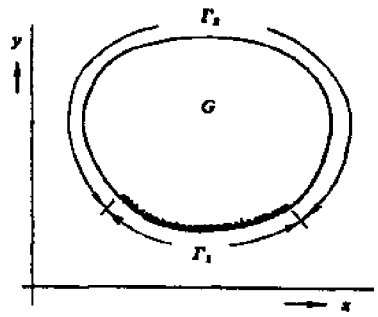


图 4-32　泊松方程的混合边值问题

考察泛函 $I(u)$

$$I(u)=\iint_G\frac{1}{2}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-\iint_G J_z u dxdy-\int_{\Gamma_2}qudl\tag{4-107}$$

可以证明，求解边值问题 (4-106)，与在 Γ_1 上满足 $u=\Phi$ 的条件下寻求泛函 $I(u)$ 的极小这一问题等价：

$$\left.\begin{aligned}&I(u)=\iint_G\frac{1}{2}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-\iint_G J_z u dxdy-\int_{\Gamma_2}qudl=\min\\&u|_{\Gamma_1}=\Phi\end{aligned}\right\}\tag{4-108}$$

下面对这两个问题的等价性作一简要说明.

对式 (4-108) 的唯一解 $u(x,y)$作变分 δu，规定 u 和 $u+\delta u$ 都是在 Γ_1 上满足 $u=\Phi$ 的连续可微函数，则 δu 在边界 Γ_1 必定满足

$$\delta u|_{\Gamma_1}=0\tag{4-109}$$

从式(4-107)可知，泛函 $I(u)$ 的一阶变分 δI 为：

$$\delta I=\iint_G\nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right]dxdy-\iint_G J_z\delta u dxdy-\iint_{\Gamma_2}q\delta udl\tag{4-110}$$

因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta u$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta u\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta u$$

所以

$$\delta I=-\iint_G \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\delta u dxdy+\iint_G \nu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta u\right)\right]dxdy$$
$$-\iint_G J_z\delta u dxdy-\int_{\Gamma_2} q\delta u dl \tag{4-111}$$

再设

$$\frac{\partial u}{\partial x}\delta u=Q,\qquad -\frac{\partial u}{\partial y}\delta u=P$$

利用格林公式

$$\oint_\Gamma P dx+Q dy=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

可知

$$\nu\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta u\right)\right]dxdy=\nu\oint_\Gamma\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)\delta u$$
$$=\oint_\Gamma \nu\frac{\partial u}{\partial n}dl\delta u=\int_{\Gamma_1}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl\delta u+\int_{\Gamma_2}\nu\frac{\partial u}{\partial n}dl\delta u \tag{4-112}$$

再考虑到 Γ_1 上 $\delta u=0$，于是式(4-111)可改写成

$$\delta I=-\iint_G\left[\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+J_z\right]dx\,dy\,\delta u+\int_{\Gamma_2}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}-q\right)dl\delta u \tag{4-113}$$

当泛函 $I(u)$ 达到极值时，泛函的变分 $\delta I=0$，由于 δu 的任意性，上式两个积分中的被积函数必定分别等于零；于是有

$$\left.\begin{aligned}\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+J_z=0,\quad (x,y)\in G\\ \left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}-q\right)_{\Gamma_2}=0\\ u|_{\Gamma_1}=\Phi\end{aligned}\right\} \tag{4-114}$$

式(4-114)说明，泛涵 $I(u)$ 达到极植时，函数 u 必定是泊松方程混合边值问题的解；即变分问题(4-108)与边值问题(4-106)等价.

比较一下这两个等价问题，不难看出：

1. 原来偏微分方程中的第一类边界条件，在相应的变分问题中作为 u 在 Γ_1 上的约束条件列出，因此这类边界条件亦称为强加边界条件；第二类边界条件则与微分方程本身一样，被所求的极值解自动满足，无需作为定解条件列出，因此这类条件亦称为自然边界条件. 含有强加边界条件的变分问题亦称为条件变分问题.

2. 原来的偏微分方程中含有 u 的二阶偏导数，但在相应的变分问题中，$I(u)$ 只包括一阶偏导数. 此时只要求形状函数具有 C^0 连续性.

从数值计算观点来看，导数的降阶，自然边界条件的自动满足，都使等价变分问题

的离散比原来边值问题的离散来得简单（特别对$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=0$的情况）. 此外，用变分法离散所得的代数方程组，其系数矩阵常常是对称的，因此便于求解. 这些都是有限元法的优点.

对于泊松方程的纯第一类边值问题，由式（4-108）可知，相应的条件变分问题为

$$\left.\begin{aligned} &I(u)=\iint_G\left\{\frac{1}{2}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-J_z u\right\}dxdy=\min \\ &u|_\Gamma=\Phi \end{aligned}\right\} \tag{4-115}$$

对于纯第二类边值问题，相应的变分问题为：

$$I(u)=\iint_G\left\{\frac{1}{2}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-J_z u\right\}dxdy-\int_\Gamma qudl=\min \tag{4-116}$$

（二）区域内部介质系数出现间断时

实际问题中常常会遇到求解域内含有两种不同磁阻率的介质，并形成内部交界面的情况，例如空气和铁心形成交界面L，如图 4-33 所示. 此时在交界面处，ν是间断的.

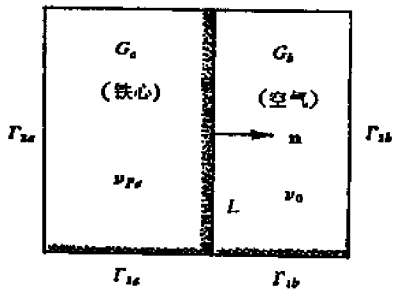


图 4-33　空气和铁心形成交界面

设L将整个区域G分成G_a和G_b两个子区域，在L上规定外法线 n 的方向从G_a指向G_b. 根据边界条件，在交界面L上，向量磁位和磁场强度的切向分量应当连续；即

$$\left.\begin{aligned} &u^+=u^-, \\ &\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+=\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^- \end{aligned}\right\}\quad (x,y)\in L \tag{4-117}$$

式中上标＋和－分别表示L上某点处的右极限和左极限. 于是，当区域内部具有间断的磁阻率时，泊松方程的混合边值问题可归结为：

$$\left.\begin{aligned} &\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=-J_z, && (x,y)\in G-L \\ &\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+=\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-, && (x,y)\in L \\ &\nu\frac{\partial u}{\partial n}=q, && (x,y)\in\Gamma_2 \\ &u=\Phi, && (x,y)\in\Gamma_1 \end{aligned}\right\} \tag{4-118}$$

可以证明，此时边值问题(4-118)仍然与式(4-108)的条件变分问题等价.

从前面的推导可知，在计算泛函$I(u)$的一阶变分δI的过程中，要利用格林公式，而格林公式要求P、Q具有连续的偏导数；因此当ν发生间断时，必须在G_a和G_b上分别应用格林公式. 从图 4-33 可见，$G_a+G_b=G-L$，对于Γ_1有$\Gamma_1=\Gamma_{1a}+\Gamma_{1b}$，对于$\Gamma_2$有$\Gamma_2=\Gamma_{2a}+\Gamma_{2b}$.

由于泛函仍为式(4-108)，所以δI仍为

$$\delta I=\iint_G\left[\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\delta u}{\partial y}-J_z\delta u\right]dxdy-\int_{\Gamma_2}q\delta udl \tag{4-119}$$

在区域G上去掉一条线L以后，积分值不变，所以

$$\iint_G \left[\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u}{\partial y}\right]dxdy$$
$$=\iint_{G_a}\nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u}{\partial y}\right]dxdy+\iint_{G_b}\nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u}{\partial y}\right]dxdy \tag{4-120}$$

分别把上式中的两个积分化简，并在G_a和G_b上应用格林公式，可得

$$\iint_{G_a}\nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u}{\partial y}\right]dxdy=-\iint_{G_a}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\delta u dxdy$$
$$+\iint_{\Gamma_{2a}}\nu\frac{\partial u}{\partial n}\delta u dl+\int_L\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-\delta u dl \tag{4-121}$$

$$\iint_{G_b}\nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u}{\partial y}\right]dxdy=-\iint_{G_b}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\delta u dxdy$$
$$+\iint_{\Gamma_{2b}}\nu\frac{\partial u}{\partial n}\delta u dl-\int_L\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+\delta u dl \tag{4-122}$$

式(4-122)中在L上的曲线积分取负号，是因为G_b的边界在L那一段其外法线方向与**n**方向相反．把式(4-121)和(4-122)代入式(4-119)，可得

$$\delta I=-\iint_{G_a+G_b}\left\{\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+J_x\right\}\delta u dxdy$$
$$+\int_L\left[\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^--\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+\right]\delta u dl+\int_{\Gamma_2}(\nu\frac{\partial u}{\partial n}-q)\delta u dl \tag{4-123}$$

当$\delta I=0$时，由于δu的任意性，式(4-123)中的各被积表达式都应等于零，再考虑到第一类边界上的约束条件，即可得到式(4-118)．这说明具有间断介质系数的二维泊松方程混合边值问题(4-118)，与条件变分问题(4-108)等价．

从式(4-123)可见，与第二类边界条件相类似，内部交界面条件亦被极值解自动满足，所以它亦是自然边界条件．此外，当$\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+=\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-$时，即使$\nu$发生间断，泛函中亦不会出现附加项目．

4-9 用有限元法解泊松方程的混合边值问题[16—20]

如前所述，求解二维泊松方程的混合边值问题，可以等价地转化为下列条件变分问题：

$$\left.\begin{aligned}&I(u)=\iint_G\frac{1}{2}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-\iint_G J_x u dxdy-\int_{\Gamma_2}qudl=\min,(x,y)\in G\\&u=\Phi,\quad (x,y)\in\Gamma_1\end{aligned}\right\}$$

当泛函达到极值时，一阶变分$\delta I=0$；根据变分原理，$\delta I=0$等价于

$$\sum_{e=1}^{E}\frac{\partial I^e}{\partial u_p}=0,\qquad p=1,2,\cdots,N \tag{4-124}$$

式中I^e为单元e上的泛函值；E为G内的单元总数，N为节点总数．下面先进行单元分

析，再进行总体合成，并求出 $I(u)$ 达到极值时 u 所满足的方程式.

（一）单元分析

单元分析 单元分析就是在单元 e 上对 $\dfrac{\partial I^e}{\partial u_l^e}$ 进行离散，并得到相应的表达式.

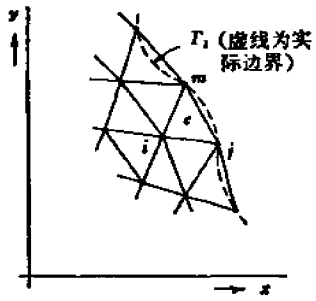


图 4-34 第二类边界单元

设所考察的三角元是第二类边界单元，即 e 上有一条边落在 Γ_2 上，如图 4-34 中 $\overline{jm}$ 所示. 为计算方便，把 I^e 分成 I_1^e、I_2^e 和 I_3^e 三部分：

$$\left.\begin{aligned} I_1^e &= \iint_{G_e} \frac{1}{2}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \\ I_2^e &= -\iint_{G_e} J_s u dxdy \\ I_3^e &= -\int_{\overline{jm}} q u dl \end{aligned}\right\} \tag{4-125}$$

于是

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_l^e}=\frac{\partial I_1^e}{\partial u_l^e}+\frac{\partial I_2^e}{\partial u_l^e}+\frac{\partial I_3^e}{\partial u_l^e} \qquad (l=i,j,m) \tag{4-126}$$

先对 $\dfrac{\partial I_1^e}{\partial u_i^e}$ 离散.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e}{\partial u_i^e} &= \frac{\partial}{\partial u_i^e}\iint_{G_e}\frac{1}{2}\nu_e\left[\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \\ &= \nu_e\iint_{G_e}\left[\frac{\partial u^e}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_i^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial u^e}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_i^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)\right]dxdy \\ &\doteq \nu_e\iint_{G_e}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=i,j,m}N_k^e u_k^e\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u^e}{\partial u_i^e}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=i,j,m}N_k^e u_k^e\right)\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u^e}{\partial u_i^e}\right]dxdy \\ &= \nu_e\iint_{G_e}\left[\sum_{k=i,j,m}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right)u_k^e\right]dxdy \\ &= \sum_{k=i,j,m}\left[\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right)dxdy\right]u_k^e \\ &= k_{ii}^e u_i^e+k_{ij}^e u_j^e+k_{im}^e u_m^e \end{aligned} \tag{4-127}$$

同理，

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e}{\partial u_j^e} &= \nu_e\iint_{G_e}\left[\frac{\partial u^e}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_j^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial u^e}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_j^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)\right]dxdy \\ &= k_{ji}^e u_i^e+k_{jj}^e u_j^e+k_{jm}^e u_m^e \end{aligned} \tag{4-128}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e}{\partial u_m^e} &= \nu_e\iint_{G_e}\left[\frac{\partial u^e}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_m^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial u^e}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_m^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)\right]dxdy \\ &= k_{mi}^e u_i^e+k_{mj}^e u_j^e+k_{mm}^e u_m^e \end{aligned} \tag{4-129}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
k^e_{kk} &= \nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}+\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\right)dxdy,\quad k=i,j,m\\
k^e_{ij} &= k^e_{ji}=\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N^e_i}{\partial x}\frac{\partial N^e_j}{\partial x}+\frac{\partial N^e_i}{\partial y}\frac{\partial N^e_j}{\partial y}\right)dxdy,\\
k^e_{im} &= k^e_{mi}=\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N^e_i}{\partial x}\frac{\partial N^e_m}{\partial x}+\frac{\partial N^e_i}{\partial y}\frac{\partial N^e_m}{\partial y}\right)dxdy,\\
k^e_{jm} &= k^e_{mj}=\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N^e_j}{\partial x}\frac{\partial N^e_m}{\partial x}+\frac{\partial N^e_j}{\partial y}+\frac{\partial N^e_m}{\partial y}\right)dxdy.
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}130)$$

对于三角元，$\frac{\partial N^e_k}{\partial x}=\frac{b_k}{2\Delta_e}$，$\frac{\partial N^e_k}{\partial y}=\frac{c_k}{2\Delta_e}$ $(k=i,\ j,\ m)$，$\iint_{G_e}dxdy=\Delta_e$，于是

$$\left.\begin{aligned}
k^e_{kk} &= \frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_k^2+c_k^2),\quad k=i,j,m\\
k^e_{ij} &= k^e_{ji}=\frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_ib_j+c_ic_j)\\
k^e_{im} &= k^e_{mi}=\frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_ib_m+c_ic_m)\\
k^e_{jm} &= k^e_{mj}=\frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_jb_m+c_jc_m)
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}131)$$

再对$\frac{\partial I^e_2}{\partial u^e_i}$进行离散.

把 $J_e(x,y)$按单元离散，在单元 e 上取为常值 J_e，则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^e_2}{\partial u^e_i} &= -\iint_{G_e}J_e\frac{\partial u^e}{\partial u^e_i}dxdy\doteq -J_e\iint_{G_e}N^e_i dxdy\\
&= -\frac{1}{3}J_e\Delta_e,\qquad l=i,j,m
\end{aligned}\qquad(4\text{-}132)$$

最后对$\frac{\partial I^e_3}{\partial u^e_i}$进行离散.

把 q 在离散边界$\overline{jm}$上的值取为常值 q_e，则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^e_3}{\partial u^e_i} &= -\int_{\overline{jm}_q}\frac{\partial u^e}{\partial u^e_i}dl\\
&= -q_e\int\frac{\partial u^2}{\partial u^e_i}dl,\quad l=i,j,m
\end{aligned}\qquad(4\text{-}133)$$

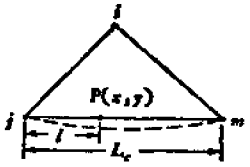


图 4-35　在第二类边界上$\frac{\partial I^e_3}{\partial u^e_i}$的计算

在$\overline{jm}$上任一点 P（图 4-35），其磁位可近似表示为

$$u^e\doteq\left(1-\frac{l}{L_e}\right)u^e_j+\frac{l}{L_e}u^e_m\qquad(4\text{-}134)$$

式中 l 为 P 点到 j 点的弦长，L_e 为$\overline{jm}$的边长，$L_e=\sqrt{(x_j-x_m)^2+(y_j-y_m)^2}$. 把式(4-134)代入式(4-133)，可得

$$\frac{\partial I^e_3}{\partial u^e_i}=0\qquad(4\text{-}135)$$

$$\frac{\partial I_3^e}{\partial u_j^e} \doteq -q_e \int_{\overline{jm}} \left(l - \frac{l}{L_e}\right) dl \doteq -\frac{1}{2} q_e L_e \tag{4-136}$$

$$\frac{\partial I_3^e}{\partial u_m^e} \doteq -q_e \int_{\overline{jm}} \frac{l}{L_e} dl \doteq -\frac{1}{2} q_e L_e \tag{4-137}$$

再把$\frac{\partial I_1^e}{\partial u_l^e}$、$\frac{\partial I_2^e}{\partial u_l^e}$ 和 $\frac{\partial I_3^e}{\partial u_l^e}$ $(l=i, j, m)$ 相加，得到$\frac{\partial I^e}{\partial u_l^e}$；写成矩阵形式时有

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial I^e}{\partial u_i^e} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_j^e} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_m^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_m^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \\ f_m^e \end{bmatrix} \tag{4-138}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} f_i^e &= \frac{1}{3} J_e \Delta_e, \\ f_j^e &= f_m^e = \frac{1}{3} J_e \Delta_e + \frac{1}{2} q_e L_e \end{aligned}\right\} \tag{4-139}$$

式(4-138)可以进一步简写成

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}^e} = \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e \tag{4-140}$$

式中 $\mathbf{u}^e$ 为单元节点磁位列向量；$\mathbf{k}^e$ 为单元的系数矩阵；$\mathbf{f}^e$ 为单元的右端项列向量；

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_m^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \\ f_m^e \end{bmatrix} \tag{4-141}$$

式(4-140)就是单元分析所得的结果.

如果 e 不是第二类边界单元，而是内部单元或第一类边界单元，则 f_i^e 和 f_m^e 中的第二项$\frac{1}{2} q_e L_e$ 均取为零，此时

$$f_i^e = f_j^e = f_m^e = \frac{1}{3} J_e \Delta_e \tag{4-142}$$

元素 k_{ii}^e和 k_{ij}^e的性质 从式(4-131)和图 4-36 可知，单元系数矩阵中的元素 k_{ii}^e和 k_{ij}^e为

$$\begin{aligned} k_{ii}^e &= \frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_i^2 + c_i^2) \\ &= \frac{\nu_e}{4\Delta_e}[(y_j - y_m)^2 + (x_m - x_j)^2] \\ &= \nu_e \frac{L_i^2}{4\Delta_e} = \nu_e \frac{L_i}{2h_i} \end{aligned} \tag{4-143}$$

$$\begin{aligned} k_{ij}^e &= \frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_i b_j + c_i c_j) \\ &= \frac{\nu_e}{8\Delta_e}[2(y_j - y_m)(y_m - y_i) + 2(x_m - x_j)(x_i - x_m)] \end{aligned}$$

$$= -\nu_e \frac{L_i^2 + L_j^2 - L_m^2}{8\Delta_e}$$

$$= -\frac{1}{4}\nu_e\left(\frac{L_i}{h_i} + \frac{L_j}{h_j} - \frac{L_m}{h_m}\right) \tag{4-144}$$

式中 L_i、L_j 和 L_m 分别为与节点 i、j、m 对面的边长；h_i、h_j 和 h_m 为垂直于 L_i、L_j 和 L_m 的三角形的三个高度；θ_m 为节点 m 处三角形的内角，如图 4-36 所示.

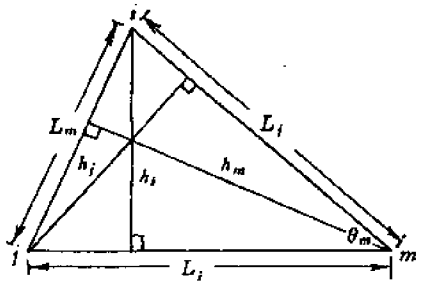


图 4-36　k_{ii}^e、k_{ij}^e与三角形边长和高之间的关系

从式（4-143）和（4-144）可见：

1. 对角线元素 k_{ii}^e恒为正值；

2. 非对角线元素 k_{ij}^e可正、可负，视 θ_m 的大小而定；若 $\theta_m<90°$，则 k_{ij}^e为负值；若 $\theta_m=90°$，则 $k_{ij}^e=0$；若 $\theta_m>90°$，则 k_{ij}^e为正值；

3. k_{ii}^e和 k_{ij}^e的值与$\frac{L}{h}$之比有关，而与三个节点坐标的具体值无关；因此坐标作平移或旋转时，元素的值保持不变.

这三点对其余的对角线元素和非对角线元素亦适用. 这些性质是十分重要的. 由于这些性质，各元素的值既可以用单元的局部坐标来计算，亦可以用整体坐标来计算；另外，在选取坐标时，原点的位置和坐标轴的取向可以任选，而不会对各元素值产生任何影响.

（二）总体合成

总体合成　当泛函达到极值时，

$$\frac{\partial I}{\partial u_p} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial I^e}{\partial u_p} = 0 \quad (p = 1,2,\cdots,N) \tag{4-145}$$

为此应把各单元的$\frac{\partial I^e}{\partial u_p}$叠加起来，并使其等于零，以形成 N 个联立方程式. 各个单元的$\frac{\partial I^e}{\partial u_p}$就称为“单元贡献”，叠加所得的方程称为总体方程.

为得到总体方程，必须先把单元分析结果改写成单元贡献的形式. 为此，把式（4-140）中的单元磁位阵 $\mathbf{u}^e$ 扩展成整个求解域中的磁位列阵 $\mathbf{u}$（$N\times1$ 矩阵），此时式（4-140）将改写成

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}^e\mathbf{u} - \mathbf{F}^e \tag{4-146}$$

式中 $\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$ 即为单元 e 对系数阵和右端项的贡献，$\mathbf{K}^e$ 为 $N\times N$ 的方阵，$\mathbf{F}^e$ 为 $N\times 1$ 的列阵. 由于泛函 I^e 仅与单元 e 的三个顶点磁位有关，而与其他节点磁位无关，所以对其他节点而言，$\frac{\partial I^e}{\partial u_p}=0$；因此矩阵 $\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$ 的构成是，把 $\mathbf{k}^e$ 和 $\mathbf{f}^e$ 的各个元素放在原来位置(按节点的总体编号置放)，其余所有扩展的元素都填 0. 换言之，$\mathbf{K}^e$ 中只有原先 $\mathbf{k}^e$ 中 9 个非零元素，其余均为零元素. 所以，$\mathbf{K}^e$ 是对称、稀疏阵.

然后根据式 (4-145)，把所有单元的$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}}$叠加起来，并令其等于 $\mathbf{0}$，即可得到

$$\sum_{e=1}^{E}\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{K}^e\mathbf{u}-\sum_{e=1}^{E}\mathbf{F}^e=\mathbf{K}\mathbf{u}-\mathbf{F}=\mathbf{0} \tag{4-147}$$

或

$$\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{F} \tag{4-148}$$

式 (4-148) 即为总体方程，其中总体系数矩阵 $\mathbf{K}$ 和总体右端项列阵 $\mathbf{F}$ 分别为所有的单元贡献按各自地址的叠加；

$$\mathbf{K}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{K}^e,\quad \mathbf{F}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{F}^e \tag{4-149}$$

不难看出，总体系数矩阵 $\mathbf{K}$ 是一个对称、稀疏、具有带状结构的方阵；其中元素 k_{ij} 仅当节点 i，j 属于同一单元时才不为 0，$\mathbf{K}$ 的最大半带宽等于相关节点编号的最大差值加 1.

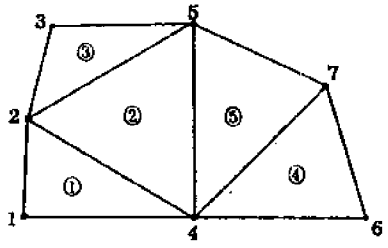


图 4-37　5 个单元的区域

总体合成示例　以图 4-37 所示区域为例来说明总体合成的叠加过程. 该区域共剖分为 5 个单元，7 个节点. 单元编号和节点的局部和总体编号如下表所示：

单元号 e	1	2	3	4	5
节点的局部编号	$i\ j\ m$	$i\ j\ m$	$i\ j\ m$	$i\ j\ m$	$i\ j\ m$
节点的总体编号	1 4 2	2 4 5	2 5 3	4 6 7	4 7 5

下面说明总体系数矩阵 $\mathbf{K}$ 的形成.

根据单元分析，对单元 1 有$\frac{\partial I^1}{\partial \mathbf{u}^1}=\mathbf{k}^1\mathbf{u}^1-\mathbf{f}^1$，用节点的总体编号表示时，

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial I^1}{\partial u_1}\\ \frac{\partial I^1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial I^1}{\partial u_4}\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\\1\\2\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&4\end{array}\\\begin{bmatrix}k_{11}^1&k_{12}^1&k_{14}^1\\k_{21}^1&k_{22}^1&k_{24}^1\\k_{41}^1&k_{42}^1&k_{44}^1\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f_1^1\\f_2^1\\f_4^1\end{bmatrix}$$

式中元素 k 和 f 的上标表示单元号，下标表示节点号. 将上式扩展到全部节点（共 7 个节点）时，上式可改写成$\frac{\partial I^1}{\partial \mathrm{u}}=\mathbf{K}^1\mathbf{u}-\mathbf{F}^1$；即

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial I^1}{\partial u_1}\\ \frac{\partial I^1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial I^1}{\partial u_3}\\ \frac{\partial I^1}{\partial u_4}\\ \frac{\partial I^1}{\partial u_5}\\ \frac{\partial I^1}{\partial u_6}\\ \frac{\partial I^1}{\partial u_7}\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\\begin{bmatrix}k_{11}^1&k_{12}^1&0&k_{14}^1&0&0&0\\k_{21}^1&k_{22}^1&0&k_{24}^1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\k_{41}^1&k_{42}^1&0&k_{44}^1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f_1^1\\f_2^1\\0\\f_4^1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{K}^1$ 和 $\mathbf{F}^1$ 是单元 1 对总体的贡献；

$$\mathbf{K}^1=\begin{bmatrix}k_{11}^1&k_{12}^1&0&k_{14}^1&0&0&0\\k_{21}^1&k_{22}^1&0&k_{24}^1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\k_{41}^1&k_{42}^1&0&k_{44}^1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}^1=\begin{bmatrix}f_1^1\\f_2^1\\0\\f_4^1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

可以看出，$\mathbf{K}^1$ 和 $\mathbf{F}^1$ 是 $\mathbf{k}^1$ 和 $\mathbf{f}^1$ 的扩展；其中第 1、2、4 行的元素是原来 $\mathbf{k}^1$ 和 $\mathbf{f}^1$ 中对应行和列的元素，其他扩展的元素都是零，所以实际计算时仅需计算 $\mathbf{k}^1$ 中的 9 个元素和 $\mathbf{f}^1$ 中的 3 个元素即可.

同理，对单元 2，单元系数阵 $\mathbf{k}^2$ 和右端项列向量 $\mathbf{f}^2$ 为

$$\mathbf{k}^2=\begin{array}{c}\\2\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}2&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}k_{22}^2&k_{24}^2&k_{25}^2\\k_{42}^2&k_{44}^2&k_{45}^2\\k_{52}^2&k_{54}^2&k_{55}^2\end{bmatrix}\end{array},\quad \mathbf{f}^2=\begin{bmatrix}f_2^2\\f_4^2\\f_5^2\end{bmatrix}$$

扩展后，单元贡献 $\mathbf{K}^2$ 和 $\mathbf{F}^2$ 分别为

$$\mathbf{K}^2=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&k^2_{22}&0&k^2_{24}&k^2_{25}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&k^2_{42}&0&k^2_{44}&k^2_{45}&0&0\\0&k^2_{52}&0&k^2_{54}&k^2_{55}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array},\quad \mathbf{F}^2=\begin{bmatrix}0\\f^2_2\\0\\f^2_4\\f^2_5\\0\\0\end{bmatrix}$$

对单元 3，单元贡献 $\mathbf{K}^3$ 和 $\mathbf{F}^3$ 分别为

$$\mathbf{K}^3=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&k^3_{22}&k^3_{23}&0&k^3_{25}&0&0\\0&k^3_{32}&k^3_{33}&0&k^3_{35}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&k^3_{52}&k^3_{53}&0&k^3_{55}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array},\quad \mathbf{F}^3=\begin{bmatrix}0\\f^3_2\\f^3_3\\0\\f^3_5\\0\\0\end{bmatrix}$$

对单元 4，$\mathbf{K}^4$ 和 $\mathbf{F}^4$ 分别为

$$\mathbf{K}^4=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&k^4_{44}&0&k^4_{46}&k^4_{47}\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&k^4_{64}&0&k^4_{66}&k^4_{67}\\0&0&0&k^4_{74}&0&k^4_{76}&k^4_{77}\end{bmatrix}\end{array},\quad \mathbf{F}^4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\f^4_4\\0\\f^4_6\\f^4_7\end{bmatrix}$$

对单元 5，$\mathbf{K}^5$ 和 $\mathbf{F}^5$ 分别为

$$\mathbf{K}^5=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&k^5_{44}&k^5_{45}&0&k^5_{47}\\0&0&0&k^5_{54}&k^5_{55}&0&k^5_{57}\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&k^5_{74}&k^5_{75}&0&k^5_{77}\end{bmatrix}\end{array},\quad \mathbf{F}^5=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\f^5_4\\f^5_5\\0\\f^5_7\end{bmatrix}$$

再把所有的单元贡献叠加，可得总体系数矩阵 $\mathbf{K}$ 和右端项列阵 $\mathbf{F}$

$$\mathbf{K}=\sum_{e=1}^{5}\mathbf{K}^{e}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&&k_{14}&&&\\k_{21}&k_{22}&k_{23}&k_{24}&k_{25}&&\\&k_{32}&k_{33}&&k_{35}&&\\k_{41}&k_{42}&&k_{44}&k_{45}&k_{46}&k_{47}\\&k_{52}&k_{53}&k_{54}&k_{55}&&k_{57}\\&&&k_{64}&&k_{66}&k_{67}\\&&&k_{74}&k_{75}&k_{76}&k_{77}\end{bmatrix}\end{array},\quad \mathbf{F}=\sum_{e=1}^{5}\mathbf{F}^{e}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\\f_5\\f_6\\f_7\end{bmatrix}$$

其中

$k_{11}=k_{11}^{1}$，　$k_{12}=k_{21}=k_{12}^{1}$，　$k_{14}=k_{41}=k_{14}^{1}$；

$k_{22}=k_{22}^{1}+k_{22}^{2}+k_{22}^{3}$，　$k_{23}=k_{32}=k_{23}^{3}$，　$k_{24}=k_{42}=k_{24}^{1}+k_{24}^{2}$，

$k_{25}=k_{52}=k_{25}^{2}+k_{25}^{3}$；

$k_{33}=k_{33}^{3}$，　$k_{35}=k_{53}=k_{35}^{3}$；

$k_{44}=k_{44}^{1}+k_{44}^{2}+k_{44}^{4}+k_{44}^{5}$，$k_{45}=k_{54}=k_{45}^{2}+k_{45}^{5}$，　$k_{46}=k_{64}=k_{46}^{4}$，

$k_{47}=k_{74}=k_{47}^{4}+k_{47}^{5}$；

$k_{55}=k_{55}^{2}+k_{55}^{3}+k_{55}^{5}$，$k_{57}=k_{75}=k_{57}^{5}$；

$k_{66}=k_{66}^{4}$，$k_{67}=k_{76}=k_{67}^{4}$；

$k_{77}=k_{77}^{4}+k_{77}^{5}$.

$f_1=f_1^{1}$，　$f_2=f_2^{1}+f_2^{2}+f_2^{3}$，　$f_3=f_3^{3}$，　$f_4=f_4^{1}+f_4^{2}+f_4^{4}+f_4^{5}$，

$f_5=f_5^{2}+f_5^{3}+f_5^{5}$，　$f_6=f_6^{4}$，　$f_7=f_7^{4}+f_7^{5}$.

图 4-38 表示把所有的单元贡献叠加，以得到总体系数矩阵时的示意图；图中×、○、□、△、·依次表示单元 1、2、3、4、5 的贡献.

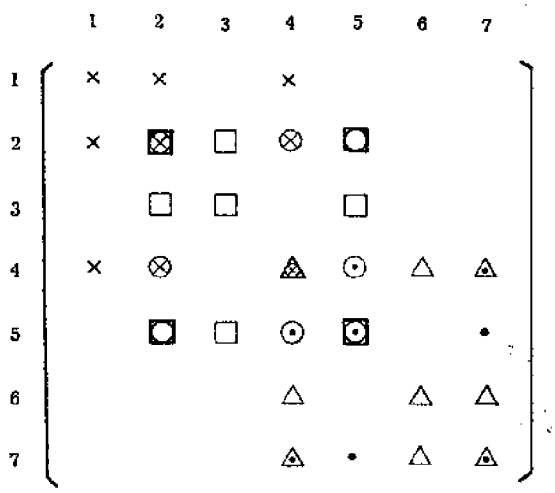


图 4-38　把单元贡献叠加得到总体系数矩阵（图中仅标出非零元素）

布尔选择矩阵 从上面的说明可见，把单元分析结果扩展成单元贡献，实质上是一个坐标变换. 单元磁位列阵 $\mathbf{u}^e$ 与整体磁位列阵 $\mathbf{u}$ 之间的变换矩阵 $\mathbf{b}^e$ 是一个 $3\times N$ 的布尔选择矩阵，

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{b}^e\mathbf{u} \tag{4-150}$$

$\mathbf{b}^e$ 中的元素，除了对应于总体编号 p、q、s 的三个元素等于 1 之外，其余均等于零；即

$$\mathbf{b}^e = \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & & p & & q & & s & & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4-151}$$

以上例中的单元 1 为例，$\mathbf{u}^1=\mathbf{b}^1\mathbf{u}$，其中

$$\mathbf{u}^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},\quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix}$$

再看系数矩阵是如何变换的. 由于列阵 $\dfrac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}}$ 中仅有属于 $\dfrac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}^e}$ 的三个元素为非零，其他元素均为零，故 $\dfrac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}}$ 可写成

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}} = (\mathbf{b}^e)^T\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}^e} = (\mathbf{b}^e)^T(\mathbf{k}^e\mathbf{u}^e-\mathbf{f}^e) = (\mathbf{b}^e)^T\mathbf{k}^e\mathbf{b}^e\mathbf{u} - (\mathbf{b}^e)^T\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e\mathbf{u}-\mathbf{F}^e \tag{4-152}$$

式中 $(\mathbf{b}^e)^T$ 为 $\mathbf{b}^e$ 的转置矩阵；$\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$ 等于

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{b}^e)^T\mathbf{k}^e\mathbf{b}^e, \qquad \mathbf{F}^e = (\mathbf{b}^e)^T\mathbf{f}^e \tag{4-153}$$

由此可见，把单元系数矩阵 $\mathbf{k}^e$ 前乘 $(\mathbf{b}^e)^T$、后乘 $\mathbf{b}^e$，即可得到扩展后的单元贡献 $\mathbf{K}^e$. 前乘 $(\mathbf{b}^e)^T$ 时，$\mathbf{k}^e$ 的行数从 3 扩展到 N，列数不变；后乘 $\mathbf{b}^e$ 时，列数从 3 扩展到 N，行数不变；两者的综合效果是把原先的 $\mathbf{k}^e$ 从 3×3 的方阵扩展为 $N\times N$ 的方阵；扩展前、后，9 个非零元素的位置和值保持不变. 以前例的单元 1 为例.

$$\mathbf{K}^1 = (\mathbf{b}^1)^T\mathbf{k}^1\mathbf{b}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & K_{22}^1 & k_{24}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & 0 & k_{44}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同理，把 $\mathbf{f}^e$ 前乘 $(\mathbf{b}^e)^T$，即可得到扩展后的单元贡献 $\mathbf{F}^e$.

此外，总体合成过程表面上看是对全部单元进行，实质上仅是对“相关单元”进行叠加；所谓相关单元是指含有同一公共节点或同一公共边的单元. 以图 4-47 中的节点 5 为例，它的相关单元是②、③、⑤三个单元，所以系数阵中的对角线元素 k_{55} 由三个单元的贡献叠加而成；即 $k_{55}=k_{55}^2+k_{55}^3+k_{55}^5$. 对右端项元素 f_5，同样有 $f_5=f_5^2+f_5^3+f_5^5$. 对于非对角线元素 k_{45}，以 $\overline{45}$ 作为公共边的单元为②和⑤，所以 $k_{45}=k_{45}^2+k_{45}^5$. 总之，

$$k_{ii}=\sum_{\substack{以i为公共节点的所有单元}} k_{ii}^e, \quad k_{ij}=\sum_{\substack{以ij为公共边的单元}} k_{ij}^e \tag{4-154}$$

不难看出，k_{ij} 最多由二项相加组成.

（三）第一类边界条件的处理

上面对泛函 $I(u)$ 进行了变分离散，但是 Γ_1 上的强加边界条件还没有处理. 为把第一类边界条件所规定的约束引入，应对导出的方程组进行修改.

设边界 Γ_1 上共有 M 个节点，其编号依次为 l_1，l_2，…，l_M，对应的磁位为给定的边值 Φ_{l_1}，Φ_{l_2}，…，Φ_{l_M}；即

$$u_k=\Phi_k, \quad k=l_1,l_2,\cdots,l_M \tag{4-155}$$

通常可用下列步骤来引入第一类边界条件：

1. 修改总体系数阵 $\mathbf{K}$　对给定磁位为 Φ_k 的节点 k，把 $\mathbf{K}$ 中第 k 行的对角线元素 k_{kk} 改成 1，第 k 行和第 k 列的其他元素 k_{kl} 和 k_{lk} 改成 0；即

$$\left.\begin{aligned} k_{kk}&=1, \\ k_{kl}=k_{lk}&=0, \quad l\neq k \end{aligned}\right\} \quad k=l_1,l_2,\cdots,l_M \tag{4-156}$$

2. 修改右端项列向量 $\mathbf{F}$　把 $\mathbf{F}$ 的第 k 个元素 f_k 改成 Φ_k，其余元素改成 $f_l-\sum_{k=l_1}^{l_M}k_{lk}\Phi_k$；即

$$f_l=\left.\begin{aligned} &\Phi_k, && l=k \\ &f_l-\sum_{k=l_1}^{l_M}k_{lk}\Phi_k, && l\neq k \end{aligned}\right\} \quad k=l_1,l_2,\cdots,l_M \tag{4-157}$$

这样，方程组(4-148)中的第 l_1，l_2，…，l_M 个方程就改成了第一类边界条件，但方程总数仍保持为 N.

（四）求解总体方程

用第一类边界条件修改后，方程组的系数矩阵成为对称、稀疏、正定阵，因此方程组存在唯一解．求解修改后的方程组，可得整个域内各个节点的磁位值．

（五）磁感强度的计算，场图的绘制

节点磁位求出后，单元中的磁感强度即可算出：

$$\left.\begin{aligned} &B_x=\frac{\partial u}{\partial y}\doteq\frac{1}{2\Delta_e}\sum_{k=i,j,m}c_ku_k^e,\qquad B_y=-\frac{\partial u}{\partial x}\doteq-\frac{1}{2\Delta_e}\sum_{k=i,j,m}b_ku_k^e\\ &B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}\end{aligned}\right\}\tag{4-158}$$

对于三节点三角元，由于磁位用线性插值函数去逼近，故单元中的磁感强度 **B** 为一常值．至于节点处的磁感强度，则其 x、y 分量可近似取为相关单元中 B_x、B_y 的平均值，或按面积的加权平均值．

各节点的磁位求出后，作出 A_z 的等位线，则在二维情况下，等 A_z 线就表示磁场的磁力线；画出不同值的等 A_z 线，即可得到整个磁场的分布图．

4-10 用有限单元法计算槽内载流导体所产生的磁场

仍以槽内载流导体所产生的磁场为例，说明有限单元法的应用．

设槽形为开口槽，导体为非磁性，整个求解域内的磁阻率为均匀，$\nu=1/\mu_0$；导体内的电流密度为 J，铁心的 $\mu_{Fe}=\infty$，齿中心线处为一磁力线．在上述假定下，在铁心表面和槽中心的对称面上，向量磁位（用 u 表示）的法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$；在齿中心线 EF 处，$u=0$．由此可知，这是一个泊松方程的混合边值问题，它与下列条件变分问题等价：

$$\left.\begin{aligned} &I(u)=\iint_G\left\{\frac{1}{2}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-Ju\right\}dxdy=\min\\ &u\big|_{EF}=0\end{aligned}\right\}$$

对求解域 G 进行三角形单元剖分（图 4-39），并确定下列几何和物理信息：

1. 各个节点的坐标；
2. 各个单元的三个顶点的编号；
3. 单元内的电密值；
4. 第一类边界节点的点号 l_k 以及该点的边值 Φ_{l_k}．

根据所给的单元信息，通过标准化的单元分析程序，由计算机按单元顺序依次算出各个单元的系数矩阵 $\mathbf{k}^e$ 和右端项列向量 $\mathbf{f}^e$ 中的各个元素，再把所有单元贡献依次叠加起来，得到总体系数矩阵和右端项列向量，最后可得线性代数方程组

$$\mathbf{Ku}=\mathbf{F}$$

然后用第一类边界条件来修改 **K** 和 **F**．以 E 点为例（点号 $i=33$），该点磁位给定为 0，即 **u** 的第 33 个分量为 0，故应将 k 中的对角线元素 $k_{33,33}$ 修改成 1，将第 33 行、第 33 列的其余所有元素都修改成 0，同时把 **F** 中的第 33 个分量 f_{33} 修改成 0．其余的第一类边

界节点都作类似的处理．再求解修改后的方程组，即可求得各个节点的磁位，并进一步算出各个单元和节点处的磁感强度．

图 4-40 表示计算程序的基本框图，其中形成总体系数矩阵 K 和求解线性代数方程组这两步是整个程序的核心．

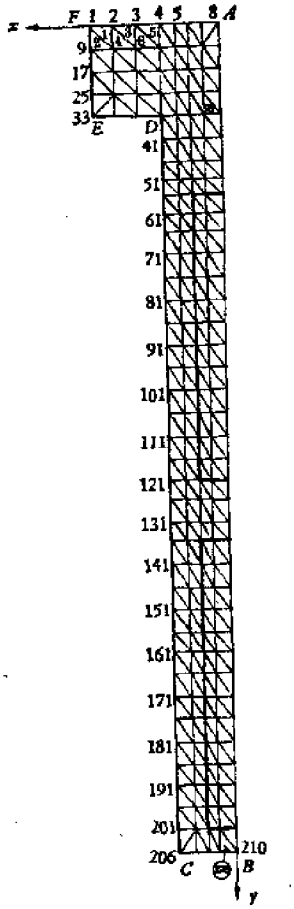


图 4-39　槽内和气隙中的单元剖分

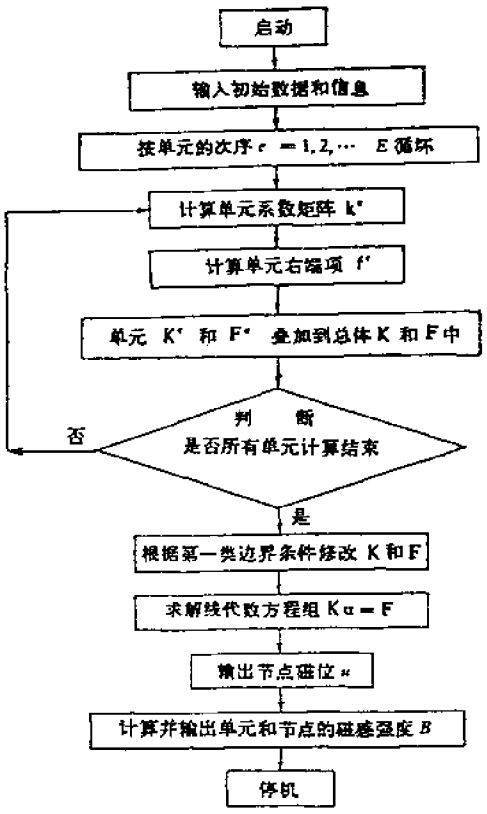


图 4-40　用有限元法解二维泊松方程混合边值问题的基本框图

4-11　二维准泊松方程混合边值问题的有限元解法[17—20]

本节进一步研究计及铁磁介质的非线性性质时，二维准泊松方程边值问题的有限元解法．

（一）准泊松方程混合边值问题的变分表述

计及铁磁介质的非线性性质时，二维恒定磁场的准泊松方程混合边值问题为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-J_z, \qquad (x,y)\in G\\&u|_{\Gamma_1}=\Phi, \qquad \nu\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=q. \qquad \Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2\end{aligned}\right\} \tag{4-159}$$

式中 u 表示向量磁位 A_z；ν 表示磁阻率，$\nu=\nu(x,y,B)$. 可以证明，与式（4-159）等价的条件变分问题为：

$$\left.\begin{aligned}&I(u)=\iint_G\left(\int_0^B\nu(b)bdb\right)dxdy-\iint_G J_z u dxdy-\int_{\Gamma_2}qudl=\min\\&u|_{\Gamma_1}=\Phi\end{aligned}\right\} \tag{4-160}$$

式（4-160）表明，泛函 $I(u)$ 中的第二项和第三项与线性时相同，第一项中的磁能密度则成为 $\int_0^B\nu(b)bdb$，如图 4-41 所示.

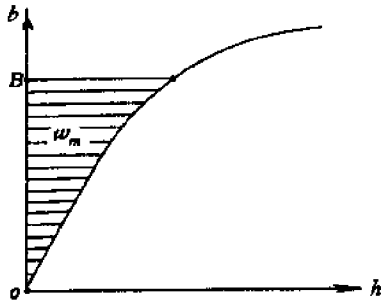


图 4-41　计及磁饱和时铁心内的磁能密度

下面来验证式(4-160)与式(4-159)的等价性.

对 u 取变分 δu，并使 u 在 Γ_1 上满足给定的边界条件，则 $\delta u|_{\Gamma_1}=0$. 此时泛函 $I(u)$ 的变分 δI 应为：

$$\begin{aligned}\delta I&=\iint_G\delta\left(\int_0^B\nu bdb\right)dxdy-\iint_G J_z\delta u dxdy-\int_{\Gamma_2}q\delta udl\\&=\iint_G\left(\frac{\partial}{\partial B}\int_0^B\nu bdb\right)\delta Bdxdy-\iint_G J_z\delta u dxdy-\int_{\Gamma_2}q\delta udl\\&=\iint_G\nu B\delta Bdxdy-\iint_G J_z\delta u dxdy-\int_{\Gamma_2}q\delta udl\end{aligned} \tag{4-161}$$

式中的 ν 为工作点 P 处的磁阻率，$\nu=\dfrac{H}{B}$. 考虑到

$$\begin{aligned}\delta B&=\delta\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}B^{-1}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}\delta\frac{\partial u}{\partial y}\right]\\&=B^{-1}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right]\end{aligned}$$

于是

$$\delta I=\iint_G\nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right]dxdy-\iint_G J_z\delta u dxdy-\int_{\Gamma_2}q\delta udl \tag{4-162}$$

又因为

$$\left.\begin{aligned}\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\,\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\delta u\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ \nu\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta u\,\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\delta u\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}$$

将其代入式(4-162)，可得

$$\begin{aligned}\delta I=&-\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+J_z\right]\delta u dxdy\\&+\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\,\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta u\,\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy-\int_{\Gamma_2}q\delta u dl\end{aligned}\tag{4-163}$$

再令 $\delta u\,\nu\frac{\partial u}{\partial x}=Q$，$-\delta u\,\nu\frac{\partial u}{\partial y}=P$，利用格林公式 $\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_\Gamma Pdx+Qdy$，可得

$$\begin{aligned}\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\,\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta u\,\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy&=\oint_\Gamma\nu\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)\delta u\\&=\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\nu\frac{\partial u}{\partial n}\delta u dl\end{aligned}\tag{4-164}$$

把式(4-164)代入式(4-163)，并考虑到 $\delta u|_{\Gamma_1}=0$，于是

$$\delta I=-\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+J_z\right]dxdy+\int_{\Gamma_2}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}-q\right)\delta u dl\tag{4-165}$$

当泛涵 I 达到极值时，$\delta I=0$，考虑到 δu 的任意性，就有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+J_z=0,\quad(x,y)\in G\\&\left(\nu\frac{\partial u}{\partial n}-q\right)_{\Gamma_2}=0\\&u|_{\Gamma_1}=\Phi\end{aligned}\right\}$$

这说明条件变分问题(4-160)与二维准泊松方程的混合边值问题（4-159）等价.

与线性情况时相类似，当区域内部介质系数出现间断时，由于内部交界面条件为自然边界条件，所以变分表述的形式不变.

（二）变分问题的离散

从式(4-160)可见，泛函 $I(u)$ 中的第二项和第三项与线性情况时相同，所以只要着重研究第一项即可.

对于单元 e，

$$I_1^e=\iint_{G_e}\left(\int_0^B\nu bdb\right)dxdy\tag{4-166}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1^e}{\partial u_i^e}&=\iint_{G_e}\left(\frac{\partial}{\partial u_i^e}\int_0^B\nu bdb\right)dxdy=\iint_{G_e}\left(\frac{\partial}{\partial B}\int_0^B\nu bdb\right)\frac{\partial B}{\partial u_i^e}dxdy\\&=\iint_{G_e}\nu B\frac{\partial B}{\partial u_i^e}dxdy=\iint_{G_e}\nu B\frac{\partial}{\partial u_i^e}(B_x^2+B_y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy\\&=\iint_{G_e}\nu\left(B_x\frac{\partial B^x}{\partial u_i^e}+B_y\frac{\partial B^y}{\partial u_i^e}\right)dxdy\end{aligned}$$

$$=\iint_{G_e}\left[\frac{\partial u^e}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_i^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)+\frac{\partial u^e}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_i^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right)\right]dxdy \tag{4-167}$$

由于单元较小，取单元的磁阻率为 ν_e，则上式可改写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1^e}{\partial u_i^e}&=\nu_e\iint_{G_e}\left[\frac{\partial u^e}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_i^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial u^e}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_i^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)\right]dxdy\\&=\sum_{k=i,j,m}\left[\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right)dxdy\right]u_k^e\\&=k_{ii}^e u_i^e+k_{ij}^e u_j^e+k_{im}^e u_m^e\end{aligned} \tag{4-168}$$

同理，

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1^e}{\partial u_j^e}&=\nu_e\iint_{G_e}\left[\frac{\partial u^e}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_j^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial u^e}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_j^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)\right]dxdy\\&=k_{ji}^e u_i^e+k_{jj}^e u_j^e+k_{jm}^e u_m^e\end{aligned} \tag{4-169}$$

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial u_m^e}=k_{mi}^e u_i^e+k_{mj}^e u_j^e+k_{mm}^e u_m^e \tag{4-170}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}k_{kk}^e&=\nu_e\iint_{G_e}\left[\left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\\&=\frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_k^2+c_k^2)\quad k=i,j,m\\k_{ij}^e&=k_{ji}^e=\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right)dxdy\\&=\frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_ib_j+c_ic_j)\\k_{im}^e&=k_{mi}^e=\frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_ib_m+c_ic_m)\\k_{jm}^e&=k_{mj}^e=\frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_jb_m+c_jc_m)\end{aligned}\right\} \tag{4-171}$$

由此可见，$\frac{\partial I_1^e}{\partial u_l}$（$l=i$，$j$，$m$）的离散结果与线性时相似，差别仅在于：对于非线性介质，为使 ν_e 值与该单元的饱和程度相对应，要进行多次迭代，逐步逼近.

这样，经过单元分析，亦可得到

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial I^e}{\partial u_i^e}\\\frac{\partial I^e}{\partial u_j^e}\\\frac{\partial I^e}{\partial u_m^e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e\\k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e\\k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i^e\\u_j^e\\u_m^e\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f_i^e\\f_j^e\\f_m^e\end{bmatrix} \tag{4-172}$$

式中

$$f_i^e=\frac{1}{3}J_e\Delta_e,\qquad f_j^e=f_m^e=\frac{1}{3}J_e\Delta_e+\frac{1}{2}q_eL_e \tag{4-173}$$

然后进行总体合成，即可得到一组非线性代数方程组

$$\mathbf{Ku}=\mathbf{F} \tag{4-174}$$

再用第一类边界条件修改系数矩阵 **K** 和右端项列向量 **F**，最后求解修改后的非线性方程组，即可得到各个节点的磁位 u.

4-12 周期性边界条件的处理

电机内的磁场分布，有时每经过一对极（即一个周期 2τ）就发生重复；有时则经过一个极（即半个周期 τ）就发生反向重复；前者称为满足整周期边界条件，后者则为满足半周期边界条件. 当磁场满足周期性边界条件时，求解域可以缩小为一对极或一个极内的区域；另一方面，对于边界单元的单元系数矩阵和右端项列向量，需要进行一定的修改.

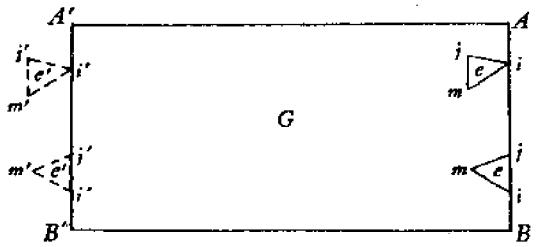


图 4-42 周期性边界条件

以图 4-42 为例，若磁场满足整周期边界条件，则 $A'B'BA$ 为一对极下的区域，$\overline{B'B}=2\tau$. 此时边界$\overline{AB}$上任一点 i 的磁位，应与边界$\overline{A'B'}$上对应点 i' 的磁位相等，即

$$u_i = u_{i'} \tag{4-175}$$

若磁场满足半周期边界条件，$A'B'BA$ 将是一个极下的区域，$B'B=\tau$. 此时 i 点的磁位应为 i' 点磁位的负值；即

$$u_i = -u_{i'} \tag{4-176}$$

不难看出，对于周期性边界条件，$\overline{AB}$上各个节点的磁位无需作为未知数来求解，因此总的未知磁位数应为 $N-N_{AB}$，N_{AB}为$\overline{AB}$线上的节点数.

下面分成两种情况来说明.

（一）单元 e 有一个节点落在边界线上

设 e 为边界单元，它有一个节点 i 落在边界线$\overline{AB}$上；单元 e' 为前面的一个重复区域内与 e 对应的虚设单元，它有一个节点 i' 落在$\overline{A'B'}$上，节点 i' 与节点 i 的位置相对应. 对 e 进行单元分析，有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I^e}{\partial u_i^e} &= k_{ii}^e u_i^e + k_{ij}^e u_j^e + k_{im}^e u_m^e - f_i^e \\
\frac{\partial I^e}{\partial u_j^e} &= k_{ji}^e u_i^e + k_{jj}^e u_j^e + k_{jm}^e u_m^e - f_j^e \\
\frac{\partial I^e}{\partial u_m^e} &= k_{mi}^e u_i^e + k_{mj}^e u_j^e + k_{mm}^e u_m^e - f_m^e
\end{aligned}\right\} \tag{4-177}$$

整周期边界条件 此时 $u_i^e=u_{i'}^e$，故$\overline{AB}$线上所有节点的磁位 u_i^e 可用 $u_{i'}^e$来代替，故式(4-177) 可改写为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial I^e}{\partial u_i^e}\\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_j^e}\\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_m^e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e\\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e\\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i'}^e\\ u_j^e\\ u_m^e\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f_i^e\\ f_j^e\\ f_m^e\end{bmatrix} \tag{4-178}$$

单元贡献为

$$\mathbf{K}^e=\begin{array}{c}\\ i'\\ j\\ m\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}i' & & j & & m\end{array}\\ \begin{bmatrix}\vdots & & \vdots & & \vdots\\ \cdots k_{ii}^e & \cdots & k_{ij}^e & \cdots & k_{im}^e\cdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \cdots k_{ji}^e & \cdots & k_{jj}^e & \cdots & k_{jm}^e\cdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \cdots k_{mi}^e & \cdots & k_{mj}^e & \cdots & k_{mm}^e\cdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\end{bmatrix}\end{array},\quad \mathbf{F}^e=\begin{array}{c}\\ i'\\ j\\ m\end{array}\begin{bmatrix}\vdots\\ f_i^e\\ \vdots\\ f_j^e\\ \vdots\\ f_m^e\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{4-179}$$

注意，此时应把原先 i 行、i 列的元素放到 i'行、i'列的位置中去.

半周期边界条件 此时 $u_i^e=-u_{i'}^e$，$f_i^e=-f_{i'}^e$，故式(4-177)可改写为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial I^e}{\partial u_i^e}\\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_j^e}\\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_m^e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{ii}^e & -k_{ij}^e & -k_{im}^e\\ -k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e\\ -k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i'}^e\\ u_j^e\\ u_m^e\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-f_i^e\\ f_j^e\\ f_m^e\end{bmatrix} \tag{4-180}$$

式(4-180)表明，此时应把单元系数阵中所有下标含有 i 的非对角线元素变号，对下标为 i 的右端项 f_i 亦变号.

相应的单元贡献为

$$\mathbf{K}^e=\begin{array}{c}\\ i'\\ j\\ m\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}i' & & j & & m\end{array}\\ \begin{bmatrix}\vdots & & \vdots & & \vdots\\ \cdots k_{ii}^e & \cdots & -k_{ij}^e & \cdots & -k_{im}^e\cdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \cdots -k_{ji}^e & \cdots & k_{jj}^e & \cdots & k_{jm}^e\cdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \cdots -k_{mi}^e & \cdots & k_{mj}^e & \cdots & k_{mm}^e\cdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\end{bmatrix}\end{array},\quad \mathbf{F}^e=\begin{array}{c}\\ i'\\ j\\ m\end{array}\begin{bmatrix}\vdots\\ -f_i^e\\ \vdots\\ f_j^e\\ \vdots\\ f_m^e\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{4-181}$$

(二) 单元 e 有两个节点落在边界线上

再讨论 e 有两个节点 i，j 落在边界线$\overline{AB}$上的情况. 此时虚设单元 e'的节点落在边界$\overline{A'B'}$上.

整周期边界条件 此时 $u_i^e=u_{i'}^e$，$u_j^e=u_{j'}^e$，故式(4-177)可改写为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial I^e}{\partial u_{i'}^e} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_{j'}^e} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_m^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i'}^e \\ u_{j'}^e \\ u_m^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \\ f_m^e \end{bmatrix} \tag{4-182}$$

相应的单元贡献为：

$$\mathbf{K}^e = \begin{array}{c} \\ i' \\ j' \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i' & j' & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots k_{ii}^e & \cdots k_{ij}^e & \cdots k_{im}^e \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots k_{ji}^e & \cdots k_{jj}^e & \cdots k_{jm}^e \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots k_{mi}^e & \cdots k_{mj}^e & \cdots k_{mm}^e \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{F}^e = \begin{array}{c} \\ i' \\ j' \\ m \end{array} \begin{bmatrix} \vdots \\ f_i^e \\ \vdots \\ f_j^e \\ \vdots \\ f_m^e \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{4-183}$$

半周期边界条件　此时 $u_i^e=-u_{i'}^e$，$u_j^e=-u_{j'}^e$，$f_i^e=-f_{i'}^e$，$f_j^e=-f_{j'}^e$；于是式（4-177）可改写成

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial I^e}{\partial u_{i'}^e} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_{j'}^e} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial u_m^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & -k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & -k_{jm}^e \\ -k_{mi}^e & -k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i'}^e \\ u_{j'}^e \\ u_m^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -f_i^e \\ -f_j^e \\ f_m^e \end{bmatrix} \tag{4-184}$$

不难看出，式(4-184)是在式(4-180)的基础上，对含有下标为 j 的非对角线元素和右端项元素再进行一次变号.

相应的单元贡献为

$$\mathbf{K}^e = \begin{array}{c} \\ i' \\ j' \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i' & j' & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots k_{ii}^e & \cdots k_{ij}^e & \cdots -k_{im}^e \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots k_{ji}^e & \cdots k_{jj}^e & \cdots -k_{jm}^e \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots -k_{mi}^e & \cdots -k_{mj}^e & \cdots k_{mm}^e \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{F}^e = \begin{array}{c} \\ i' \\ j' \\ m \end{array} \begin{bmatrix} \vdots \\ -f_i^e \\ \vdots \\ -f_j^e \\ \vdots \\ f_m^e \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{4-185}$$

4-13　凸极同步电机空载磁场的有限元计算

同步电机的空载特性过去都是用磁路计算的办法近似算出，本节说明怎样用有限元法更精确地算出空载时的气隙磁场和空载特性.

分析时作下述假定：

1. 把电机横截面内的磁场作为二维场处理；

2. 采用直角坐标系，定、转子的曲率忽略不计；

3. 主极极弧用通过最小气隙和最大气隙的抛物线表示，再用一系列折线去逼近；

4. 定子每极每相槽数 q＝整数.

（一）基本方程和边界条件

图 4-43 表示凸极同步电机的剖面图. 由于 q＝整数，且空载磁场分布与主极中心线对称，所以仅需以半个极距内的区域作为求解域. 在求解域内，向量磁位（用 u 表示）满足准泊松方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-J_z \tag{4-186}$$

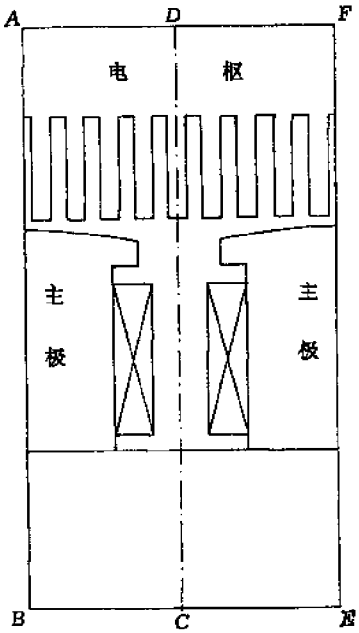


图 4-43　凸极同步电机剖面图

在实际电机中，定、转子各部分的轴向长度有一定差别，计算时以气隙处的轴向有效长度 l_i 为基准；这样，由式(4-186)算出的 u 将是各个区域内磁位的归算值. 磁位的实际值应为

$$A_z=\frac{l_i}{l_{Fe}}u \tag{4-187}$$

式中 l_{Fe} 为该部分铁心的轴向实际长度. 以定子铁心为例，$l_{Fe}=k_{Fe}\ (l-n_v b_v)$；其中 l 为完子铁心总长；$n_v b_v$ 为通风道的总宽度；k_{Fe} 为铁心的叠片因数. 进一步可以算出各个单元内的实际磁感强度 B，并从材料的磁化曲线查出对应的 ν 值.

本问题的边界条件为：

1. $\overline{AB}$、$\overline{BC}$和$\overline{AD}$为一条磁力线，设其磁位为零，则

$$u_{AB}=u_{BC}=u_{AD}=0 \tag{4-188}$$

2. 由于对称关系，在$\overline{CD}$线上磁感强度的切向分量为零；即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{CD}=0 \tag{4-189}$$

（二）气隙磁场和定子空载感应电动势的计算

磁场的非线性饱和迭代 把与上述准泊松方程混合边值问题相应的条件变分问题离散化，经单元分析和总体合成得到一组总体方程，再用第一类边界条件修改方程组，最后可得一组以节点磁位归算值 u 为未知数的非线性方程组

$$\mathbf{K}'\mathbf{u}=\mathbf{F}' \tag{4-190}$$

然后用逐次线性化法或牛顿-拉夫生法求解式(4-190)，即可解得各个节点处的 u 和各个单元内的磁感强度 B.

实际计算时，铁心部分各个单元的 ν 的初值，可用 B-H 曲线线性段处的 ν 值代入，然后再用解出的 B 值对 ν 进行调整；经过多次迭代达到收敛，得到 u 和 B 的终值. 饱和迭代的收敛判据通常规定为：

$$\max\left|\frac{B^{(k)}-B^{(k-1)}}{B^{(k)}}\right|\leqslant\varepsilon_B \tag{4-191}$$

式中 $B^{(k)}$和 $B^{(k-1)}$分别表示第 k 次和 $k-1$ 次迭代结束时各单元的磁感强度；ε_B 为规定的控制误差，可选 $\varepsilon_B=10^{-3}$. 在整个计算中，$\nu=f(B)$可用分段抛物线插值求得.

气隙磁场和空载特性的计算 根据通过最小气隙中心处的直线上 M 个取样点的向量磁位值，用中心差分算出任意二个样点的中点处的径向气隙磁感强度 B_δ，

$$B_\delta=-\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i},\qquad i=1,2,\cdots,M-1 \tag{4-192}$$

对此曲线 $B_\delta=f(x)$进行谐波分析，可得气隙中的基波和谐波磁感强度 B_ν.（$\nu=1$，3，5，…）；于是气隙中的基波磁通量 Φ_1 为

$$\Phi_1=\frac{2}{\pi}\tau l_i B_1 \tag{4-193}$$

定子绕组的基波感应电动势(每相)为

$$E_1=4.44fNk_{w1}\Phi_1 \tag{4-194}$$

式中 N 为定子每相串联匝数；k_{w1}为基波的绕组因数. 同理可以算出谐波电势 E_ν.

这样，给定不同的励磁电流 I_f，即可算得对应的空载电势，由此即可得到电机的空载曲线 $E_0=f(I_f)$.

计算示例 图 4-44 表示一台 1700 MW，$U_N=13.8$ kV，$\cos\varphi_N=0.875$，$2p=110$ 的水轮发电机在空载、额定电压下由计算机算出的磁场分布；该机的 $q=3$，气隙 $\delta=2.1$ cm，$\frac{\delta_{\max}}{\delta}=1.5$. 图 4-45 表示气隙中心线和定子齿面处的气隙磁场分布图，图 4-46 表示用有限单元法算出的空载曲线.

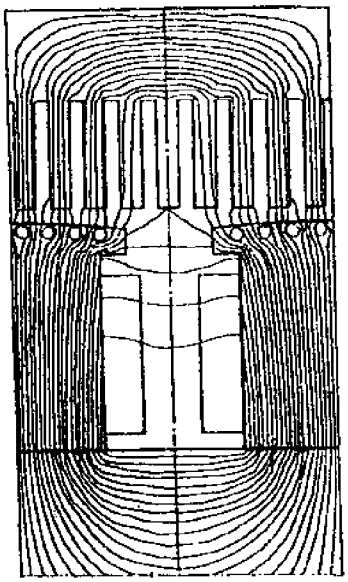


图 4-44　空载额定电压时的磁场分布

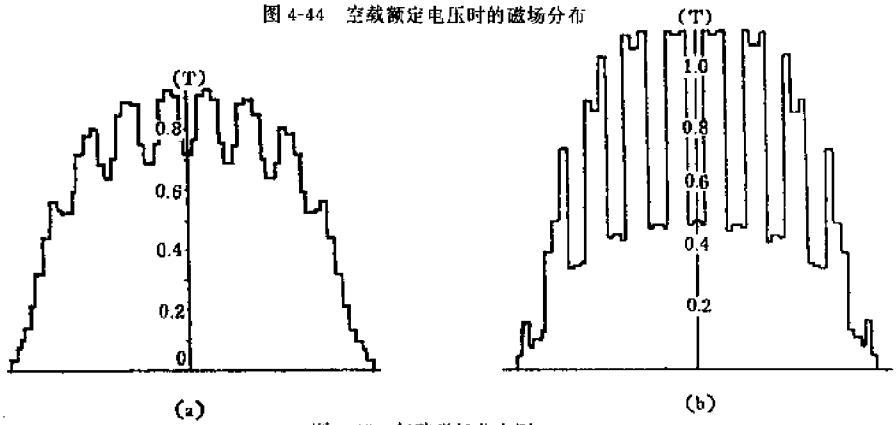


图 4-45　气隙磁场分布图

(a) 气隙中心线处；(b) 定子齿面处.

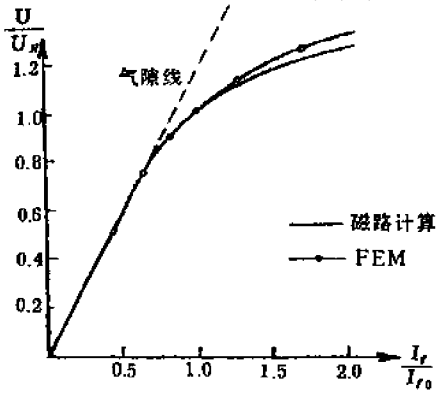


图 4-46　用有限元法算出的空载曲线

4-14 使用二阶元时准泊松方程的有限元解法[10,11,13—17]

为减少总单元数并提高计算精度，在许多场合下可以采用高阶插值函数和相应的高阶单元．在电机工程中，常用的高阶元是二阶三角元．

（一）二阶三角元的插值函数和形状函数

二阶三角元有六个节点，其中三个是主节点，三个是中间节点，如图 4-47 所示．主节点是三角元的三个顶点，通常用 1、2、3（或 i、j、m）表示；中间节点是三条边的中点，用 4、5、6 表示；其中节点 4 是$\overline{23}$的中点，5 是$\overline{31}$的中点，6 是$\overline{12}$的中点．六个节点按逆时针编号．

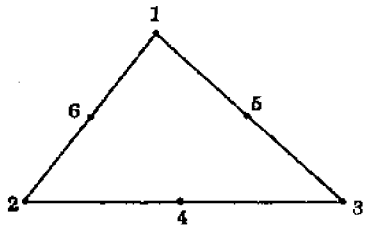


图 4-47 六节点三角元

六节点三角元有六个自由度，所以单元内的插值函数可选为

$$u^e(x,y)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5xy+\alpha_6y^2 \qquad (4\text{-}195)$$

式（4-195）是一个完整的二次多项式；其中 α_1，α_2，…，α_6 等六个系数可用六个节点的坐标和磁位值来表示．若节点 k 的坐标为 $(x_k,\ y_k)$，磁位为 u_k^e（$k=1$，2，…，6），则

$$u_k^e=\alpha_1+\alpha_2x_k+\alpha_3y_k+\alpha_4x_k^2+\alpha_5x_ky_k+\alpha_6y_k^2 \qquad (k=1,2,\cdots,6) \qquad (4\text{-}196)$$

于是可得六个联立方程式，求解这一联立方程组，即可唯一地确定 α_1、α_2、…、α_6 这六个系数．再把这六个系数代回到式(4-195)，经过整理，可得

$$u^e(x,y)=N_1^eu_1^e+N_2^eu_2^e+N_3^eu_3^e+N_4^eu_4^e+N_5^eu_5^e+N_6^eu_6^e=\sum_{k=1}^{6}N_k^eu_k^e \qquad (4\text{-}197)$$

式中 N_k^e 是六节点三角元的形状函数；

$$\left.\begin{aligned}&\text{对主节点：}\quad N_1^e=L_1(2L_1-1),\ N_2^e=L_2(2L_2-1),\ N_3^e=L_3(2L_3-1);\\&\text{对中间节点：}\quad N_4^e=4L_2L_3,\ N_5^e=4L_3L_1,\ N_6^e=4L_1L_2.\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}198)$$

式中 L_1、L_2 和 L_3 是三角形的面积坐标，$L_1=L_i$，$L_2=L_j$，$L_3=L_m$；L_i、L_j 和 L_m 的表达式如式(4-87)、(4-88)和(4-89)所示．不难看出，由于相邻的三角元公共边上任一点的磁位值被两个顶点和中点的磁位值及其坐标和该点的坐标唯一地确定，所以这种单元是协调元．

上面推导 N_k^e 的过程，实施起来十分烦复．下面从另一个角度来导出 N_k^e．

前已述及，单元形状函数有两个重要性质：

1．N_k^e 是一个与插值多项式同次的多项式；

2．在节点 k 处，$N_k^e(x_k,y_k)=1$；在其他节点处，$N_k^e(x_j,y_j)=0$ $(j\neq k)$．

由此可以设想，N_k^e 是由某两个面积坐标各自所形成的一次式的乘积．以主节点 1 为例，在节点 1 处，面积坐标 $L_1=1$；在对边$\overline{23}$上（包括节点 2，3，4 处），$L_1=0$；在连接中间节

点的直线$\overline{65}$上（包括节点 6 和 5 处），$L_1=0.5$ 或 $2L_1-1=0$；如图 4-48 所示．因此，如果设想 N_1^e 是 L_1 和 $2L_1-1$ 这两个一次式的乘积，即

$$N_1^e = L_1(2L_1 - 1)$$

则一方面它将是 x，y 的二次多项式，符合性质 1；此外，在节点 2、4、3 处，$L_1=0$，在节点 6 和 5 处，$2L_1-1=0$，因而在这五个节点处，$N_1^e=0$；而在节点 1 处，$L_1=1$，故 $N_1^e=1$；从而满足性质 2．这说明所构造的 N_1^e 是正确的．同理，对另外两个主节点 2 和 3，可以构造 $N_2^e=L_2(2L_2-1)$，$N_3^e=L_3(2L_3-1)$．

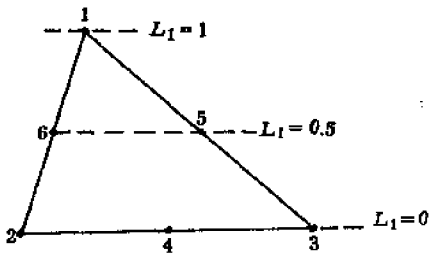


图 4-48　用面积坐标表示时，中线$\overline{65}$和边线$\overline{23}$的方程

再看中间节点 4．如图 4-48 所示，在边线$\overline{13}$上，$L_2=0$；在边线$\overline{21}$上，$L_3=0$；在节点 4 处，$L_2=0.5$，$L_3=0.5$．于是若设

$$N_4^e = 4L_2L_3$$

则在节点 1、6、2 处，$L_3=0$，在节点 5 和 3 处，$L_2=0$，故在此五个节点处，$N_4^e=0$；而在节点 4 处，$N_4^e=4\times0.5\times0.5=1$．这说明所构造的 N_4^e 是正确的．同理，对中间节点 5 和 6，可构造 $N_5^e=4L_3L_1$，$N_6^e=4L_1L_2$．这与式(4-198)得出的结果一致．

图 4-49 表示主节点和中间节点的单元形状函数的图形．

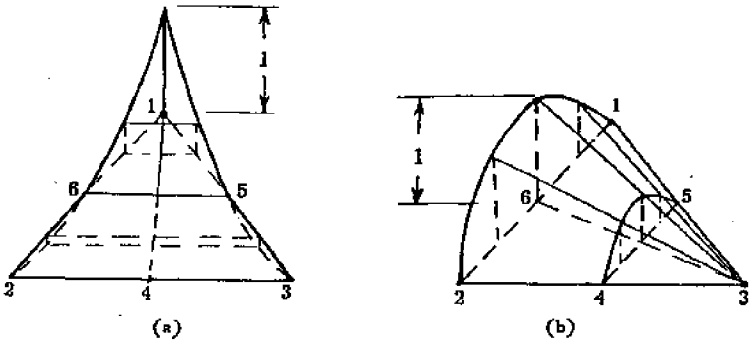


图 4-49　六节点三角元的形状函数
(a) 主节点 1 的 N_1^e；(b) 中间节点 6 的 N_6^e

不难导出，六个单元形状函数之和等于 1：

$$\sum_{k=1}^{6}N_k^e = (2L_1^2 - L_1) + (2L_2^2 - L_2) + (2L_3^2 - L_3) + 4L_1L_2 + 4L_2L_3 + 4L_3L_1$$

$$= 2(L_i + L_j + L_m)^2 - (L_i + L_j + L_m) = 1 \qquad (4\text{-}199)$$

另外，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_1^e}{\partial x}&=(4L_1-1)\frac{\partial L_1}{\partial x}=(4L_i-1)\frac{b_i}{2\Delta_e}\\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y}&=(4L_1-1)\frac{\partial L_1}{\partial y}=(4L_i-1)\frac{c_i}{2\Delta_e}\end{aligned}\right\}\tag{4-200}$$

对$\frac{\partial N_2^e}{\partial x}$和$\frac{\partial N_2^e}{\partial y}$，只要把上式中的$L_i$、$b_i$和$c_i$换成$L_j$、$b_j$和$c_j$；对$\frac{\partial N_3^e}{\partial x}$和$\frac{\partial N_3^e}{\partial y}$，换成$L_m$、$b_m$和$c_m$即可．而

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_4^e}{\partial x}&=4\left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial x}+L_3\frac{\partial L_2}{\partial x}\right)=\frac{2}{\Delta_e}(L_jb_m+L_mb_j)\\ \frac{\partial N_4^e}{\partial y}&=4\left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial y}+L_3\frac{\partial L_2}{\partial y}\right)=\frac{2}{\Delta_e}(L_jc_m+L_mc_j)\end{aligned}\right\}\tag{4-201}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_5^e}{\partial x}&=4\left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial x}+L_1\frac{\partial L_3}{\partial x}\right)=\frac{2}{\Delta_e}(L_mb_i+L_ib_m)\\ \frac{\partial N_5^e}{\partial y}&=4\left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial y}+L_1\frac{\partial L_3}{\partial y}\right)=\frac{2}{\Delta_e}(L_mc_i+L_ic_m)\end{aligned}\right\}\tag{4-202}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_6^e}{\partial x}&=4\left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial x}+L_2\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)=\frac{2}{\Delta_e}(L_ib_j+L_jb_i)\\ \frac{\partial N_6^e}{\partial y}&=4\left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial y}+L_2\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)=\frac{2}{\Delta_e}(L_ic_j+L_jc_i)\end{aligned}\right\}\tag{4-203}$$

式中b_i、b_j、b_m和c_i、c_j、c_m与三节点三角元时相同.

（二）变分问题的离散化

对二维准泊松方程的混合边值问题，单元泛函I^e为

$$\begin{aligned}I^e&=\iint_{G_e}\left(\int_0^B\nu b\,db\right)dxdy-\iint_{G_e}J_zu\,dxdy-\int_{\Gamma_{2e}}qu\,dl\\&=I_1^e+I_2^e+I_3^e.\end{aligned}\tag{4-204}$$

式中$u=A_z$．先计算$\frac{\partial I_1^e}{\partial u_l^e}$（$l=1,2,\cdots,6$）.

从上节的分析可知，

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1^e}{\partial u_l^e}&=\frac{\partial}{\partial u_l^e}\iint_{G_e}\left(\int_0^B\nu b\,db\right)dxdy=\nu_e\iint_{G_e}\left[\frac{\partial u^e}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_l^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial u^e}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_l^e}\left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)\right]dxdy\\&\doteq\nu_e\iint_{G_e}\left[\frac{\partial u^e}{\partial x}\frac{\partial N_l^e}{\partial x}+\frac{\partial u^e}{\partial y}\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\right]dxdy=\nu_e\iint_{G_e}\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right)u_k^e\,dxdy\\&=\sum_{k=1}^{6}k_{lk}^eu_k^e\qquad l=1,2,\cdots,6\end{aligned}\tag{4-205}$$

式中k_{lk}^e为单元系数矩阵的元素；

$$k_{lk}^e=\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right)dxdy\qquad l,k=1,2,\cdots,6\tag{4-206}$$

对于对角线元素，$l=k$；若是主节点，$l=1$，2，3．以k_{11}^e为例，

$$k_{11}^e=\nu_e\iint_{G_e}\left[\left(\frac{\partial N_1^e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial N_1^e}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\nu_e\iint_{G_e}\frac{1}{4\Delta_e^2}(4L_1-1)^2(b_i^2+c_i^2)dxdy$$

$$=\frac{\nu_e}{4\Delta_e^2}(b_i^2+c_i^2)\iint_{G_e}(16L_i^2-8L_i+1)dxdy$$

$$=\frac{\nu_e}{4\Delta_e}(b_i^2+c_i^2) \tag{4-207}$$

对 k_{22}^e和 k_{33}^e，只要把上式中的 b_i、c_i 换成 b_j、c_j 和 b_m、c_m 即可. 从式(4-207)可见，k_{11}^e、k_{22}^e和 k_{33}^e与普通三节点三角元的三个对角线元素相同. 对中间节点 4，

$$k_{44}^e=\nu_e\iint_{G_e}\left[\left(\frac{\partial N_4^e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial N_4^e}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$=\nu_e\iint_{G_e}\frac{4}{\Delta_e^2}[(L_jb_m+L_mb_j)^2+(L_jc_m+L_mc_j)^2]dxdy$$

$$=\frac{4\nu_e}{\Delta_e^2}\iint_{G_e}[L_j^2(b_m^2+c_m^2)+L_m^2(b_j^2+c_j^2)+2L_jL_m(b_jb_m+c_jc_m)]dxdy$$

$$=\frac{2\nu_e}{3\Delta_e}[b_j^2+b_m^2+c_j^2+c_m^2+b_jb_m+c_jc_m] \tag{4-208}$$

考虑到 $b_i+b_j+b_m=0$，$c_i+c_j+c_m=0$，于是上式可改写为

$$k_{44}^e=\frac{2\nu_e}{3\Delta_e}(b_i^2+c_i^2-b_jb_m-c_jc_m) \tag{4-209}$$

同理，对节点 5 和 6 有

$$\left.\begin{aligned}k_{55}^e&=\frac{2\nu_e}{3\Delta_e}(b_j^2+c_j^2-b_mb_i-c_mc_i)\\k_{66}^e&=\frac{2\nu_e}{3\Delta_e}(b_m^2+c_m^2-b_ib_j-c_ic_j)\end{aligned}\right\} \tag{4-210}$$

对于非对角线元素，若是两个主节点之间的 k_{12}^e、k_{23}^e和 k_{31}^e，有

$$k_{12}^e=k_{21}^e=\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_1^e}{\partial x}\frac{\partial N_2^e}{\partial x}+\frac{\partial N_1^e}{\partial y}\frac{\partial N_2^e}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\frac{\nu_e}{4\Delta_e^2}(b_ib_j+c_ic_j)\iint_{G_e}(4L_i-1)(4L_j-1)dxdy=\frac{\nu_e}{4\Delta_e^2}(b_ib_j+c_ic_j)\left(-\frac{1}{3}\Delta_e\right)$$

$$=-\frac{\nu_e}{12\Delta_e}(b_ib_j+c_ic_j) \tag{4-211}$$

对 k_{23}^e和 k_{31}^e，只要把上式中的 $b_ib_j+c_ic_j$ 换成 $b_jb_m+c_jc_m$ 和 $b_mb_i+c_mc_i$. 若是主节点与相邻中间节点之间的 k_{16}^e、k_{15}^e、k_{24}^e、k_{26}^e、k_{34}^e、k_{35}^e，则

$$k_{16}^e=k_{61}^e=\nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_1^e}{\partial x}\frac{\partial N_6^e}{\partial x}+\frac{\partial N_1^e}{\partial y}\frac{\partial N_6^e}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\nu_e\iint_{G_e}\frac{1}{\Delta_e^2}(4L_i-1)[L_i(b_ib_j+c_ic_j)+L_j(b_i^2+c_i^2)]dxdy$$

$$=\frac{\nu_e}{3\Delta_e}(b_ib_j+c_ic_j) \tag{4-212}$$

同理，

$$\left.\begin{aligned} k_{15}^e &= k_{51}^e = \frac{\nu_e}{3\Delta_e}(b_ib_m + c_ic_m) \\ k_{26}^e &= k_{62}^e = \frac{\nu_e}{3\Delta_e}(b_jb_i + c_jc_i) \\ k_{24}^e &= k_{42}^e = \frac{\nu_e}{3\Delta_e}(b_jb_m + c_jc_m) \\ k_{34}^e &= k_{43}^e = \frac{\nu_e}{3\Delta_e}(b_mb_j + c_mc_j) \\ k_{35}^e &= k_{53}^e = \frac{\nu_e}{3\Delta_e}(b_mb_i + c_mc_i) \end{aligned}\right\} \tag{4-213}$$

对主节点与对边中间节点之间的 k_{14}^e、k_{25}^e和 k_{36}^e，有

$$\left.\begin{aligned} k_{14}^e = k_{41}^e &= \nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_1^e}{\partial x}\frac{\partial N_4^e}{\partial x} + \frac{\partial N_1^e}{\partial y}\frac{\partial N_4^e}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \nu_e\iint_{G_e}(4L_i - 1)\frac{1}{\Delta_e^2}[L_j(b_ib_m + c_ic_m) + L_m(b_ib_j + c_ic_j)]dxdy = 0 \\ k_{25}^e = k_{52}^e &= k_{36}^e = k_{63}^e = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-214}$$

最后，对中间节点之间的 k_{46}^e、k_{56}^e和 k_{45}^e，有

$$\begin{aligned} k_{46}^e = k_{64}^e &= \nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_4^e}{\partial x}\frac{\partial N_6^e}{\partial x} + \frac{\partial N_4^e}{\partial y}\frac{\partial N_6^e}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \nu_e\iint\frac{4}{\Delta_e^2}[L_iL_j(b_jb_m + c_jc_m) + L_iL_m(b_i^2 + c_j^2) + L_jL_m(b_ib_j + c_ic_j) \\ &\qquad + L_j^2(b_ib_m + c_ic_m)]dxdy \\ &= \frac{2\nu_e}{3\Delta_e}(b_ib_m + c_ic_m) \end{aligned} \tag{4-215}$$

同理，

$$\left.\begin{aligned} k_{56}^e = k_{65}^e &= \frac{2\nu_e}{3\Delta_e}(b_jb_m + c_jc_m) \\ k_{45}^e = k_{54}^e &= \frac{2\nu_e}{3\Delta_e}(b_ib_j + c_ic_j) \end{aligned}\right\} \tag{4-216}$$

由此可得

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{u}^e} = \mathbf{k}^e\mathbf{u}^e \tag{4-217}$$

式中 $\mathbf{u}^e$ 为单元 e 的节点磁位列向量，$\mathbf{k}^e$ 为单元系数矩阵；

$$\mathbf{u}^e = [u_1^e \quad u_2^e \quad u_3^e \quad u_4^e \quad u_5^e \quad u_6^e]^T \tag{4-218}$$

$$\mathbf{k}^e = \frac{\nu_e}{12\Delta_e}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3(b_i^2+c_i^2) & & & & & \\ -(b_jb_i+c_jc_i) & 3(b_j^2+c_j^2) & & \text{对} & \text{称} & \\ -(b_mb_j+c_mc_i) & -(b_mb_j+c_mc_j) & 3(b_m^2+c_m^2) & & & \\ 0 & 4(b_jb_m+c_jc_m) & 4(b_jb_m+c_jc_m) & 8(b_i^2+c_i^2-b_jb_m-c_jc_m) & & \\ 4(b_mb_i+c_mc_i) & 0 & 4(b_mb_i+c_mc_i) & 8(b_jb_i+c_jc_i) & 8(b_j^2+c_j^2-b_mb_i-c_mc_i) & \\ 4(b_ib_j+c_ic_j) & 4(b_ib_j+c_ic_j) & 0 & 8(b_mb_i+c_mc_i) & 8(b_mb_j+c_mc_j) & 8(b_m^2+c_m^2-b_ib_j-c_ic_j) \end{bmatrix} \end{array} \tag{4-219}$$

接着计算$\frac{\partial I_2^e}{\partial u_i^e}$.

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial u_i^e}=\frac{\partial}{\partial u_i^e}\left[-\iint_{G_e}J_e u dxdy\right]=-\iint_{G_e}J_e N_i^e dxdy \tag{4-220}$$

对主节点1、2、3，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial I_2^e}{\partial u_1^e}=-J_e\iint_{G_e}L_i(2L_i-1)dxdy=0,\\&\frac{\partial I_2^e}{\partial u_2^e}=0,\qquad\frac{\partial I_2^e}{\partial u_3^e}=0.\end{aligned}\right\} \tag{4-221}$$

对中间节点4、5、6，

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial u_4^e}=-J_e\iint_{G_e}4L_iL_m dxdy=-\frac{1}{3}J_e\Delta_e \tag{4-222}$$

同理

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial u_5^e}=-\frac{1}{3}J_e\Delta_e,\qquad\frac{\partial I_2^e}{\partial u_6^e}=-\frac{1}{3}J_e\Delta_e \tag{4-223}$$

由此可得

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{u}^e}=-\frac{1}{3}J_e\Delta_e\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{4-224}$$

最后计算第二类边界单元的$\frac{\partial I_3^e}{\partial u_i^e}$.

$$\frac{\partial I_3^e}{\partial u_i^e}=-\frac{\partial}{\partial u_i^e}\int_{\Gamma_{2e}}qudl=-q_e\int_{\Gamma_{2e}}\frac{\partial u^e}{\partial u_i^e}dl \tag{4-225}$$

若单元e有一条边$\overline{23}$落在第二类边界上，$\overline{23}$的中间节点为4，如图4-50所示．此时边$\overline{23}$上任一点P的磁位u_P可表示为

$$u_P=N_2^e u_2^e+N_3^e u_3^e+N_4^e u_4^e \tag{4-226}$$

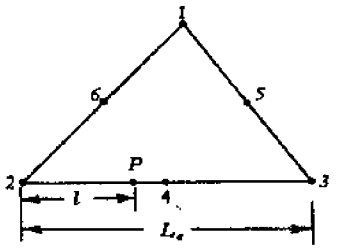


图4-50　第二类边界单元

在$\overline{23}$线上，面积坐标L_2和L_3将退化为长度坐标，$L_2=1-\frac{l}{L_e}$，$L_3=\frac{l}{L_e}$，L_e为$\overline{23}$的边长；于是

$$\frac{\partial I_3^e}{\partial u_l^e}=0,\qquad l=1,5,6 \tag{4-227}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial I_3^e}{\partial u_2^e}&=-q_e\int_{\Gamma_{2e}}N_2^e dl=-q_e\int_0^{L_e}L_j(2L_j-1)dl=-\frac{1}{6}q_eL_e\\ \frac{\partial I_3^e}{\partial u_3^e}&=-q_e\int_{\Gamma_{2e}}N_3^e dl=-q_e\int_0^{L_e}L_m(2L_m-1)dl=-\frac{1}{6}q_eL_e\end{aligned}\right\} \tag{4-228}$$

$$\frac{\partial I_3^e}{\partial u_4^e}=-q_e\int_{\Gamma_{2e}}N_4^e dl=-q_e\int_0^{L_e}4L_jL_m dL=-\frac{2}{3}q_el_e \tag{4-229}$$

由此可得

$$\frac{\partial I_3^e}{\partial \mathbf{u}^e}=-\frac{1}{6}q_eL_e\begin{bmatrix}0\\1\\1\\4\\0\\0\end{bmatrix} \tag{4-230}$$

把$\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{u}^e}$、$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{u}^e}$和$\frac{\partial I_3^e}{\partial \mathbf{u}^e}$相加，即可得到单元分析结果

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}^e}=\mathbf{k}^e\mathbf{u}^e-\mathbf{f}^e \tag{4-231}$$

式中$\mathbf{f}^e$为单元右端项列向量；

$$\mathbf{f}^e=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{6}q_eL_e\\\frac{1}{6}q_eL_e\\\frac{1}{3}J_e\Delta_e+\frac{2}{3}q_eL_e\\\frac{1}{3}J_e\Delta_e\\\frac{1}{3}J_e\Delta_e\end{bmatrix} \tag{4-232}$$

最后把$\mathbf{k}^e$和$\mathbf{f}^e$扩展成单元贡献$\mathbf{K}^e$和$\mathbf{F}^e$，再经过总体合成，并令$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}}=\mathbf{0}$，即可得到一个以$N$个节点磁位为未知数的联立代数方程组$\mathbf{Ku}=\mathbf{F}$．再用第一类边界条件修改方程组，求解修改后的方程组，即可得到各个节点的磁位值．

实际计算表明，与具有同样总节点数的一阶三角元相比较，二阶三角元的计算结果要比一阶三角元精确得多；因此在精度要求较高的场合，采用二阶元或更高阶的高阶元是适宜的．

4-15 加权余量法[11-13]

基于变分法的有限单元法，以存在与待解的微分方程边值问题对应的泛函为出发点．对于不存在或找不到对应泛函的情况，可以用加权余量法来进行有限元离散．

（一）加权余量法

考虑下列微分方程的边值问题：

$$\left.\begin{aligned} Lu &= p, \quad \text{在 } G \text{ 内} \\ Bu &= b. \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned}\right\} \tag{4-233}$$

式中 L 为表示该微分方程的适当的微分算子，p 为右端项；B 为表示边界条件的边界算子，b 为右端项．设 $\hat{u}$ 为该边值问题的近似解，则一般来讲，$\hat{u}$ 不可能精确地满足式(4-233)．因此把 $\hat{u}$ 代入式(4-233)后，在区域 G 内和边界 Γ 上将分别出现余量 R_G 和 R_Γ，

$$R_G(\hat{u}) = L\hat{u} - p, \qquad R_\Gamma(\hat{u}) = B\hat{u} - b \tag{4-234}$$

R_G 是域内各点坐标的函数，R_Γ 是边界上各点坐标的函数．若 u_0 为精确解，则余量 $R_G(u_0)=0, R_\Gamma(u_0)=0$.

为使余量在某种整体意义下降到零，以得到近似解 $\hat{u}$，作余量在加权意义下的一系列积分，并使其等于零；即

$$\iint_G W_l R_G \, dxdy + \int_\Gamma W_l R_\Gamma dl = 0, \qquad l = 1,2,\cdots,N \tag{4-235}$$

式中 W_l ($l=1, 2, \cdots, N$) 为一组适当的独立的权函数．可以证明，当 $N\to\infty$，余量将趋近于零，此时近似解 $\hat{u}$ 将收敛于精确解 u_0.

当求解域剖分成许多小的单元时，将磁位的插值函数 $\hat{u} \doteq \sum_{k=1}^{N} N_k u_k$ 代入式(4-235)，即可得到一组以节点磁位为未知数的联立方程组；求解此方程组，即可得到各个节点处的磁位值．这就是加权余量有限元法．式(4-235)则称为加权余量表述．

根据权函数选择的不同，加权余量法可分为配点法，最小二乘法和伽辽金法等．下面说明工程上最常用的伽辽金法．

（二）伽辽金有限元法

伽辽金法以形状函数 N_l 作为权函数，故式(4-235)成为

$$\iint_G N_l R_G(\hat{u}) dxdy + \int_\Gamma N_l R_\Gamma(\hat{u}) dl = 0, \qquad l = 1,2,\cdots,N \tag{4-236}$$

下面以准泊松方程的混合边值问题为例，说明伽辽金法的应用．

对于准泊松方程的混合边值问题

$$Lu = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right], \qquad p = J_z. \tag{4-237}$$

$$\left.\begin{aligned} Bu &= u, \quad b = \Phi, \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上；} \\ Bu &= \nu\frac{\partial u}{\partial n}, \quad b = q, \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上.} \end{aligned}\right\} \tag{4-238}$$

于是式(4-235)可以写成

$$-\iint_G W_l\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)+J_z\right]dxdy+\int_{\Gamma_1}W_l(\hat{u}-\Phi)dl$$
$$+\int_{\Gamma_2}W_l\left(\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}-q\right)dl=0,\qquad l=1,2,\cdots,N \tag{4-239}$$

对于第一类边界项，在离散后将通过修改方程组使 $\hat{u}$ 在 Γ_1 上精确地等于边值 Φ，所以无需列入；这样式（4-239）就简化成

$$-\iint_G W_l\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)+J_z\right]dxdy+\int_{\Gamma_2}W_l\left(\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}-q\right)dl=0,$$
$$l=1,2,\cdots,N \tag{4-240}$$

上式就是准泊松方程混合边值问题的加权余量表述.

根据格林公式

$$-\iint_G W_l\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)\right]dxdy$$
$$=\iint_G\left(\frac{\partial W_l}{\partial x}\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial W_l}{\partial y}\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)dxdy-\int_\Gamma \nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}W_l dl \tag{4-241}$$

把上式代入式（4-240），可得

$$\iint_G\left(\frac{\partial W_l}{\partial x}\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial W_l}{\partial y}\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)dxdy-\iint_G W_l J_z dxdy$$
$$-\int_{\Gamma_1}W_l\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}dl-\int_{\Gamma_2}W_l q dl=0,\qquad l=1,2,\cdots,N \tag{4-242}$$

上式对插值函数的连续性要求比式(4-240)低，所以此式称为加权余量法的弱表述形式. 再在第一类边界 Γ_1 上把权函数选取为零，即 $W_l|_{\Gamma_1}=0$，就有

$$\iint_G\left(\frac{\partial W_l}{\partial x}\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial W_l}{\partial y}\nu\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)dxdy-\iint_G W_l J_z dxdy-\int_{\Gamma_2}W_l q dl=0,\qquad l=1,2,\cdots,N \tag{4-243}$$

对于伽辽金法，$W_l=N_l$，于是上式成为

$$\iint_G \nu\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)dxdy=\iint_G J_z N_l dxdy+\int_{\Gamma_2}qN_l dl$$
$$l=1,2,\cdots,N \tag{4-244}$$

式(4-244)就是准泊松方程混合边值问题的伽辽金弱表述.

将整个区域 G 和边界 Γ_2 上的积分用内部单元和边界单元上的积分表出，并考虑到在每个单元内有 $N_l=N_l^e$，式（4-244）可改写成

$$\sum_{e=1}^{E}\iint_{G_e}\nu_e\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial \hat{u}^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial \hat{u}^e}{\partial y}\right)dxdy=\sum_{e=1}^{E}\iint_{G_e}J_e N_l^e dxdy+\sum_{e=1}^{E2}\int_{\Gamma_{2e}}q_e N_l^e dl \tag{4-245}$$

在单元内部，位函数 $\hat{u}^e$ 可用下式逼近

$$\hat{u}^e\doteq\sum_{k=1}^{n}N_k^e u_k^e \tag{4-246}$$

把式(4-246)代入式(4-245)，经过整理，即可得到一个以节点磁位为未知数的联立方程

组，用矩阵表示时有

$$\mathbf{Ku}=\mathbf{F} \tag{4-247}$$

其中系数矩阵 $\mathbf{K}$ 和右端项列向量 $\mathbf{F}$，分别为各个单元的“单元贡献” $\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$ 的叠加，

$$\mathbf{K}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{K}^e,\qquad \mathbf{F}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{F}^e \tag{4-248}$$

$\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$ 的缩减形式即为单元系数矩阵 $\mathbf{k}^e$ 和单元右端项列向量 $\mathbf{f}^e$，其元素 k_{ik}^e 和 f_i^e 分别为

$$\left.\begin{aligned} k_{ik}^e &= \nu_e\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right)dxdy \\ f_i^e &= J_e\iint_{G_e}N_i^e dxdy+q_e\int_{\Gamma_{2e}}N_i^e dl \end{aligned}\right\} \tag{4-249}$$

不难看出，式（4-249）与前面用变分法离散所得的结果完全相同；换言之，在导出有限元方程方面，加权余量法与变分法是等价的.

接着，与通常的有限元法一样，用第一类边界上的强加边界条件去修改方程组（4-247），求解修改后的方程组，即可得到各个节点上的磁位值.

总之，对于存在对应泛函的偏微分方程边值问题，可以证明，用伽辽金法导出的联立方程组与用变分原理导出的方程组完全相同；反之，对于不存在或找不到适当泛函的情况，可以从微分方程和边界条件出发，用伽辽金法直接进行有限元离散. 从这个意义上讲，伽辽金有限元法是比基于变分原理的有限元法更为通用、离散更为简单的一种有效方法，因此近年来此法在工程上得到愈来愈广泛的应用.

4-16 三维恒定无旋磁场的有限元解法[24,25]

以上各节研究了二维恒定磁场的数值解法. 由于电机的形状比较复杂，因此某些部分的磁场分布需要用三维场来计算. 本节和下节将研究三维恒定无旋磁场和旋度磁场的有限元解法. 先说明三维计算时所用的单元.

（一）三维计算时常用的单元及其形状函数

三维磁场计算时，常用的单元有四面体单元，直三棱柱单元和长方体单元（砖块单元）. 对于一阶元，四面体单元有四个节点，如图 4-51 所示；直三棱柱单元是五面体，有六个节点，如图 4-52 所示；长方体单元是六面体，有八个节点，如图 4-53 所示. 四面体单元的形状函数最简单，但剖分不太直观；直三棱柱单元和长方体单元的形状函数稍复杂，但由于形状规则，剖分较为方便，故应用较多. 特别是直三棱柱单元，它是从平面三角元发展而来，剖分和计算都较方便，因此在电机的三维有限元计算中获得较多的应用.

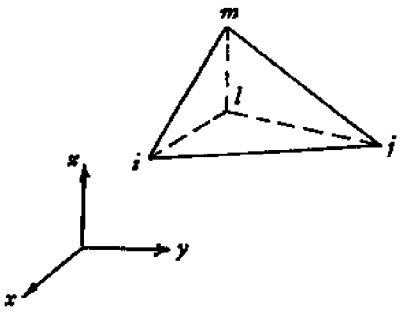


图 4-51 四面体单元

四面体单元 图 4-51 表示一个四面体

单元，它由四个三角形的侧面组成；单元的四个顶点 i、j、m、l 按右手螺旋关系编号，即节点 i、j、l 按逆时针编号，节点 m 在右手螺旋前进的上方. 对于一阶元，单元 e 内磁位的插值函数 u^e 为 x、y、z 的线性函数，即

$$u^e(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{4-250}$$

设节点 i、j、l、m 的坐标分别为 (x_i, y_i, z_i)、(x_j, y_j, z_j)、(x_l, y_l, z_l) 和 (x_m, y_m, z_m)；相应的磁位分别为 u_i^e、u_j^e、u_l^e 和 u_m^e，则有

$$\left.\begin{aligned} u_i^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \\ u_j^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 z_j \\ u_l^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_l + \alpha_3 y_l + \alpha_4 z_l \\ u_m^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m + \alpha_4 z_m \end{aligned}\right\} \tag{4-251}$$

由上式即可解得 α_1、α_2、α_3 和 α_4，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{6V_e}(a_i u_i^e + a_j u_j^e + a_l u_l^e + a_m u_m^e) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{6V_e}(b_i u_i^e + b_j u_j^e + b_l u_l^e + b_m u_m^e) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{6V_e}(c_i u_i^e + c_j u_j^e + c_l u_l^e + c_m u_m^e) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{6V_e}(d_i u_i^e + d_j u_j^e + d_l u_l^e + d_m u_m^e) \end{aligned}\right\} \tag{4-252}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_l & y_l & z_l \\ x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}, \qquad b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_l & z_l \\ 1 & y_m & z_m \end{vmatrix}, \\ c_i &= \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_l & z_l \\ 1 & x_m & z_m \end{vmatrix}, \qquad d_i = -\begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{4-253}$$

V_e 为单元的体积，

$$V_e = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_l & y_l & z_l \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}. \tag{4-254}$$

a_j，b_j，c_j，d_j，…，c_m，d_m 等可把式 (4-253) 按 i，j，l，m 的次序轮流置换而得，其中 a_j，b_j，c_j，d_j 和 a_m，b_m，c_m，d_m 在置换后还需乘以 (-1).

把 α_1、α_2、α_3 和 α_4 代回到式(4-251)，经整理，可得

$$\begin{aligned} u^e(x,y,z) &= \frac{1}{6V_e}[(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i^e + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j^e \\ &\quad + (a_l + b_l x + c_l y + d_l z)u_l^e + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m^e] \\ &= N_i^e u_i^e + N_j^e u_j^e + N_l^e u_l^e + N_m^e u_m^e \\ &= \sum_k N_k^e u_k^e \qquad (k = i,j,l,m) \end{aligned} \tag{4-255}$$

其中 N_k^e 为节点 k 的形状函数；

$$N_k^e=\frac{1}{6V_e}(a_k+b_kx+c_ky+d_kz)\qquad k=i,j,l,m \tag{4-256}$$

用行列式表示时，形状函数 N_i^e 为

$$N_i^e=\frac{1}{6V_e}(a_i+b_ix+c_iy+d_iz)=\frac{1}{6V_e}\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ 1 & x_j & y_j & z_j\\ 1 & x_l & y_l & z_l\\ 1 & x_m & y_m & z_m\end{vmatrix}=\frac{V_i}{V_e} \tag{4-257}$$

式中 x，y，z 为单元 e 内 P 点的坐标；V_i 为由 P 点和 jml 所形成的子四面体的体积. 同理，

$$N_j^e=\frac{V_j}{V_e},\quad N_l^e=\frac{V_l}{V_e},\quad N_m^e=\frac{V_m}{V_e}. \tag{4-258}$$

其中 V_j、V_l 和 V_m 分别为 P 点与 mli、ijm 和 lij 所形成的子四面体的体积. 换言之，形状函数 N_i^e，N_j^e，N_l^e 和 N_m^e 就分别等于该点的体积坐标$\frac{V_i}{V_e}$，$\frac{V_j}{V_e}$，$\frac{V_l}{V_e}$和$\frac{V_m}{V_e}$.

由式（4-257）不难得出，形状函数具有以下性质（以 N_i^e 为例）：

(1) $N_i^e(x_k,y_k,z_k)=\delta_{ik}$，　　$k=i,j,l,m$ (4-259)

式中 δ_{ik}为 Kronecker δ，

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1, & \text{当 } k=i;\\ 0, & \text{当 } k\neq i.\end{cases}$$

(2) $$\sum_k N_k^e=N_i^e+N_j^e+N_l^e+N_m^e=\frac{V_i+V_j+V_l+V_m}{V_e}=1 \tag{4-260}$$

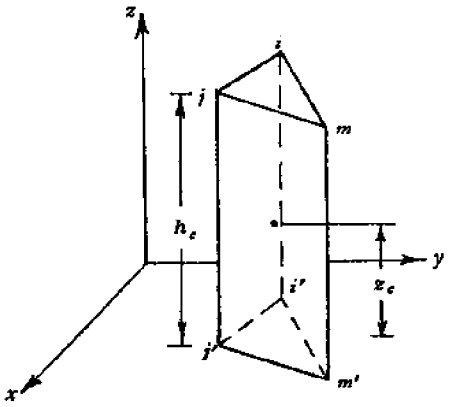


图 4-52　直三棱柱单元

直三棱柱单元　图 4-52 表示一个直三棱柱单元，它由顶面、底面和三个矩形侧面组成. 设三棱柱单元的六个节点分别为 i、j、m、i'、j'、m'，底面 $i'j'm'$、顶面 ijm 与 xy 平面平行，棱柱 ii'、jj'、mm' 与 z 轴平行；三棱柱的高为 $h_e=2d$，重心的 z 轴坐标为 z_c. 于是三棱柱内任一点的磁位 u^e 为

$$u^e(x,y,z)=N_i^eu_i^e+N_j^eu_j^e+N_m^eu_m^e+N_{i'}^eu_{i'}^e+N_{j'}^eu_{j'}^e+N_{m'}^eu_{m'}^e$$

$$= \sum_k N_k^e u_k^e \qquad k = i, j, m, i', j', m' \tag{4-261}$$

对于一阶元，若三棱柱内任一平行于 xy 平面的三角形，形状函数对 x, y 的变化规律与平面三角元相同；另外，沿棱柱方向，从顶面到底面，设形状函数从 1 到 0(或从 0 到 1)随 z 作线性变化；则六个节点的形状函数即为

$$\left.\begin{aligned}
N_i^e &= L_i \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z - z_c}{d}\right), \\
N_j^e &= L_j \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z - z_c}{d}\right), \\
N_m^e &= L_m \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z - z_c}{d}\right), \\
N_{i'}^e &= L_{i'} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z - z_c}{d}\right), \\
N_{j'}^e &= L_{j'} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z - z_c}{d}\right), \\
N_{m'}^e &= L_{m'} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z - z_c}{d}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4-262}$$

式中 L_i, L_j, L_m 为三角元 ijm 的面积坐标；$L_{i'}, L_{j'}, L_{m'}$ 为三角元 $i'j'm'$ 的面积坐标；$L_{i'} = L_i$，$L_{j'} = L_j$，$L_{m'} = L_m$. 式(4-262)的六个形状函数可以归纳成一个通用的式子，即

$$N_k^e = L_k \frac{1}{2}\left(1 + p_k \frac{z - z_c}{d}\right), \quad \left.\begin{aligned} p_k &= 1, \quad \text{当 } k = i, j, m \text{ 时} \\ p_k &= -1, \quad \text{当 } k = i', j', m' \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{4-263}$$

其中

$$L_k = \frac{1}{2\Delta_e}(a_k + b_k x + c_k y) \tag{4-264}$$

不难证明，这些形状函数亦有以下性质（以 N_i^e 为例）：

(1) $N_i^e(x_k, y_k, z_k) = \delta_{ik}$，　　$k = i, j, m, i', j', m'$. (4-265)

(2) $$\begin{aligned}\sum_k N_k^e &= N_i^e + N_j^e + N_m^e + N_{i'}^e + N_{j'}^e + N_{m'}^e \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z - z_c}{d}\right)(L_i + L_j + L_m) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z - z_c}{d}\right)(L_{i'} + L_{j'} + L_{m'}) \\ &= 2 \end{aligned} \tag{4-266}$$

(3) 在顶面和底面处 ($z = z_c \pm d$)，三棱柱的形状函数退化为平面三角元的形状函数；即

$$\left.\begin{aligned}
N_{i(z=z_c+d)}^e &= N_{i'(z=z_c-d)}^e = L_i, \\
N_{j(z=z_c+d)}^e &= N_{j'(z=z_c-d)}^e = L_j, \\
N_{m(z=z_c+d)}^e &= N_{m'(z=z_c-d)}^e = L_m.
\end{aligned}\right\} \tag{4-267}$$

长方体单元　图 4-53 表示一个长方体单元，此单元共八个节点，上面四个节点标为 i，j，l，m，下面四个标为 i'，j'，l'，m'；单元的长、宽、高分别为 $2a$、$2b$ 和 $2c$，单元的六个面分别平行于 xy、yz、和 zx 平面，单元的重心坐标为 x_c，y_c 和 z_c. 此时单元 e 内任一点的磁位值 u^e 可表示为

$$u^e(x, y, z) = \sum_k N_k^e u_k^e \qquad k = i, j, l, m, i', j', l', m' \tag{4-268}$$

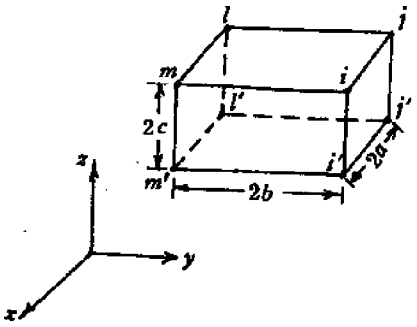


图 4-53　长方体单元

可以导出，长方体的形状函数分别为

$$\left.\begin{aligned}
N_i^e &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1+\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1+\frac{z-z_c}{c}\right),\\
N_j^e &= \frac{1}{8}\left(1-\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1+\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1+\frac{z-z_c}{c}\right),\\
N_l^e &= \frac{1}{8}\left(1-\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1-\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1+\frac{z-z_c}{c}\right),\\
N_m^e &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1-\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1+\frac{z-z_c}{c}\right),\\
N_{i'}^e &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1+\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1-\frac{z-z_c}{c}\right),\\
N_{j'}^e &= \frac{1}{8}\left(1-\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1+\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1-\frac{z-z_c}{c}\right),\\
N_{l'}^e &= \frac{1}{8}\left(1-\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1-\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1-\frac{z-z_c}{c}\right),\\
N_{m'}^e &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1-\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1-\frac{z-z_c}{c}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4-269}$$

这八个形状函数可以统一地写成：

$$\left.\begin{aligned}
N_k^e &= \frac{1}{8}\left(1+p\frac{x-x_c}{a}\right)\left(1+q\frac{y-y_c}{b}\right)\left(1+r\frac{z-z_c}{c}\right)\\
p &= \begin{cases}1, & k=i,m,i',m';\\ -1, & k=j,l,j',l'.\end{cases}\\
q &= \begin{cases}1, & k=i,j,i',j';\\ -1, & k=l,m,l',m'.\end{cases}\\
r &= \begin{cases}1, & k=i,j,l',m';\\ -1, & k=i',j',l',m'.\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{4-270}$$

不难证明，长方体的形状函数亦具有下列性质（以 N_i^e 为例）：

(1) $N_i^e(x_k,y_k,z_k)=\delta_{ik}$，　　$k=i,j,l,m,i',j',l',m'$.　　(4-271)

(2) $\sum_k N_i^e = 1$ (4-272)

（二）三维无旋磁场的标量位表述

对于三维无旋磁场，为简化计算，可用标量磁位 Ω 来进行计算，然后通过 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=-\mu\ \mathrm{grad}\ \Omega$ 即可求出场域内各点的磁场分布.

设求解域为 V，其边界面为 S，$S=S_1+S_2$. 用标量位（以下用 u 来表示）表述时，三维无旋磁场的混合边值问题为：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{div}(\mu\ \mathrm{grad}\ u)=0, \qquad \text{在 } V \text{ 内} \\ &u|_{S_1}=\Phi, \qquad \mu\ \mathrm{grad}\ u\cdot\mathbf{n}|_{S_2}=q \end{aligned}\right\} \tag{4-273}$$

式中 Φ 为第一类边界面 S_1 上给定的标量磁位值；q 为第二类边界面 S_2 上给定的磁位法向导数值乘以介质的磁导率 μ；一般来说，$\mu=\mu(x,y,z)$. 不难得知，与上式相应的条件变分问题为：

$$\left.\begin{aligned} &I(u)=\frac{1}{2}\int_V \mu(\mathrm{grad}\ u)^2 dV-\int_{S_2} qu dS=\min \\ &u|_{S_1}=\Phi \end{aligned}\right\} \tag{4-274}$$

（三）变分问题的离散

单元分析 把整个场域 V 分成 E 个立体单元，则总体泛函 I 可写成

$$I(u)=\sum_{e=1}^{E} I^e(u), \qquad I^e(u)=I_1^e(u)+I_2^e(u) \tag{4-275}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &I_1^e(u)=\frac{1}{2}\int_{V_e}\mu(\mathrm{grad}\ u)^2 dV, \\ &I_2^e(u)=-\int_{S_{2e}} qu dS \end{aligned}\right\} \tag{4-276}$$

在各个单元内引入磁位的分片插值函数，则单元内任一点的磁位即可用该单元的各个节点处的磁位及其相应的形状函数表示为

$$u^e(x,y,z)=\sum_k N_k^e u_k^e \tag{4-277}$$

以三棱柱单元为例，该单元共有六个节点，故

$$u^e=N_i^e u_i^e+N_j^e u_j^e+N_m^e u_m^e+N_{i'}^e u_{i'}^e+N_{j'}^e u_{j'}^e+N_{m'}^e u_{m'}^e \tag{4-278}$$

把 I_1^e 对节点 l 求偏导数（$l=i$、j、m、i'、j'、m'），并设单元 e 的磁导率为一常值 μ_e，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e}{\partial u_l^e}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_l^e}\int_{V_e}\mu(\mathrm{grad}\ u)^2 dV=\mu_e\int_{V_e}\mathrm{grad}\ u\cdot\frac{\partial}{\partial u_l^e}\mathrm{grad}u dV \\ &=\mu_e\int_{V_e}\left(\sum_k u_k^e\ \mathrm{grad}\ N_k^e\right)\cdot\mathrm{grad}\ N_l^e dV \\ &=\sum_k\left(\mu_e\int_{V_e}\mathrm{grad}\ N_l^e\cdot\mathrm{grad}\ N_k^e dV\right)u_k^e \end{aligned}$$

$$= \sum_k k_{lk}^e u_k^e \qquad l = i, j, m, \cdots, m' \tag{4-279}$$

式中 k_{lk}^e 为单元系数矩阵 $\mathbf{k}^e$ 的元素；

$$k_{lk}^e = \mu_e \int_{V_e} \text{grad } N_l^e \cdot \text{grad } N_k^e dV$$

$$= \mu_e \int_{V_e} \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y} + \frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z} \right) dxdydz \qquad l, k = i, j, m, \cdots \tag{4-280}$$

对式(4-279)依次使 $l=i$，j，m，…，并把它们集合起来写成矩阵形式，有

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{u}^e} = \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e \tag{4-281}$$

式中 $\mathbf{u}^e$ 为单元 e 的磁位列向量；$\mathbf{k}^e$ 为单元系数矩阵. 对于三棱柱单元，

$$\mathbf{u}^e = [u_i^e \quad u_j^e \quad u_m^e \quad u_{i'}^e \quad u_{j'}^e \quad u_{m'}^e]^T \tag{4-282}$$

$$\mathbf{k}^e = \begin{array}{c} i \\ j \\ m \\ i' \\ j' \\ m' \end{array} \begin{bmatrix} k_{ii}^e & & & & & \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & & \text{对} & \text{称} & \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e & & & \\ k_{i'i}^e & k_{i'j}^e & k_{i'm}^e & k_{i'i'}^e & & \\ k_{j'i}^e & k_{j'j}^e & k_{j'm}^e & k_{j'i'}^e & k_{j'j'}^e & \\ k_{m'i}^e & k_{m'j}^e & k_{m'm}^e & k_{m'i'}^e & k_{m'j'}^e & k_{m'm'}^e \end{bmatrix} \tag{4-283}$$

再把 I_2^e 对 u_l^e 求偏导数. 把单元的第二类边界面 S_{2e} 上的 q 取为常值 q_e，可得

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial u_l^e} = -\int_{S_{2e}} q \frac{\partial u^e}{\partial u_l^e} dS = -q_e \int_{S_{2e}} N_l^e dS$$

$$= -f_l^e \qquad l = i, j, m, \cdots \tag{4-284}$$

式中 f_l^e 为单元的右端项，

$$f_l^e = q_e \int_{S_{2e}} N_l^e dS \tag{4-285}$$

把式(4-284)集合起来，写成矩阵形式，有

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{u}^e} = -\mathbf{f}^e \tag{4-286}$$

式中 $\mathbf{f}^e$ 为单元的右端项列向量.

总体合成 再把 $\mathbf{k}^e$ 和 $\mathbf{f}^e$ 扩展成单元贡献 $\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$，并进行总体合成，可得

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \tag{4-287}$$

式中

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{E} \mathbf{K}^e, \qquad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^{E} \mathbf{F}^e \tag{4-288}$$

最后用第一类边界条件修改方程组. 求解修改后的方程组，即可得到各个节点的磁位值.

（四）采用三棱柱单元时各元素的表达式

单元系数阵的元素 考虑到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}&=\frac{b_k}{2\Delta_e}\frac{1}{2}\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)\\ \frac{\partial N_k^e}{\partial y}&=\frac{c_k}{2\Delta_e}\frac{1}{2}\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)\\ \frac{\partial N_k^e}{\partial z}&=L_k\frac{1}{2}\frac{p_k}{d}\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}289)$$

把上述关系代入式（4-280），可得单元系数阵中的对角线元素 k_{ll}^e 为

$$\begin{aligned}k_{ll}^e&=\mu_e\int_{V_e}\left[\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz\\&=\mu_e\int_{V_e}\left[\frac{1}{16\Delta_e^2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)^2(b_l^2+c_l^2)+\frac{1}{4}\left(\frac{p_l}{d}\right)^2L_l^2\right]dxdydz\\&=\mu_e\frac{1}{16\Delta_e}(b_l^2+c_l^2)\int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)^2dz+\mu_e\frac{1}{4}\left(\frac{p_l}{d}\right)^2 2d\int_{S_e}L_l^2dxdy\\&=\mu_e\frac{1}{6\Delta_e}(b_l^2+c_l^2)d+\mu_e\frac{p_l^2\Delta_e}{12d}\\&=\frac{\mu_e}{12V_e}\left[h_e^2(b_l^2+c_l^2)+2\Delta_e^2\right]\qquad l=i,j,m,i',j',m'\end{aligned}\qquad(4\text{-}290)$$

式中 V_e 为三棱柱的体积，$V_e=h_e\Delta_e$. 对于非对角线元素 k_{lk}^e，

$$\begin{aligned}k_{lk}^e=k_{kl}^e&=\mu_e\int_{V_e}\left[\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right]dxdydz\\&=\mu_e\int_{V_e}\left[\frac{b_lb_k}{4\Delta_e^2}\frac{1}{4}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)+\frac{c_lc_k}{4\Delta_e^2}\frac{1}{4}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\right.\\&\qquad\left.\cdot\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)+\frac{1}{4}\frac{p_lp_k}{d^2}L_lL_k\right]dxdydz\\&=\mu_e\int_{z_c-d}^{z_c+d}\frac{1}{16\Delta_e}(b_lb_k+c_lc_k)\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)dz\\&\qquad+\mu_e\frac{p_lp_k}{4d^2}2d\int_{S_e}L_lL_kdxdy\\&=\frac{\mu_e}{12V_e}\left[mh_e^2(b_lb_k+c_lc_k)+np_lp_k2\Delta_e^2\right]\qquad l,k=i,j,m,i',j',m'\end{aligned}$$

$$m=\begin{cases}1, & \text{若 } p_l=p_k;\\ 0.5, & \text{若 } p_l\neq p_k.\end{cases}\qquad n=\begin{cases}1, & \text{对 } ii',jj',mm';\\ 0.5, & \text{对其他情况.}\end{cases}\qquad(4\text{-}291)$$

于是单元系数阵 $\mathbf{k}^e$ 为 [见下页式（4-292）].

从式（4-290）和（4-291）可见，系数阵中的各个元素仅与三棱柱的形状和尺寸有关，因此它们既可在整体坐标中算出，亦可在局部坐标中算出.

右端项列向量的元素 若三棱柱的顶面或底面为第二类边界面，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_2^e}{\partial u_l^e}&=-q_e\int_{S_{2e}}N_ldS=-q_e\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)_{z=z_c\pm d}\int_{S_{2e}}L_ldxdy\\&=-\frac{1}{3}q_e\Delta_e,\qquad l=i,j,m\text{ 或 }i',j',m'\end{aligned}\qquad(4\text{-}293)$$

于是

$$
\mathbf{k}^e=\frac{\mu_r}{12V_e}
\begin{array}{c}
\\ i \\ j \\ m \\ i' \\ j' \\ m'
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} i & j & m & i' & j' & m' \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
h_e^2(b_i^2+c_i^2)+2\Delta_e^2 & & & & & \\
h_e^2(b_jb_i+c_jc_i)+\Delta_e^2 & h_e^2(b_j^2+c_j^2)+2\Delta_e^2 & & \text{对} & \text{称} & \\
h_e^2(b_mb_i+c_mc_i)+\Delta_e^2 & h_e^2(b_mb_j+c_mc_j)+\Delta_e^2 & h_e^2(b_m^2+c_m^2)+2\Delta_e^2 & & & \\
\frac{1}{2}h_e^2(b_i^2+c_i^2)-2\Delta_e^2 & \frac{1}{2}h_e^2(b_ib_j+c_ic_j)-\Delta_e^2 & \frac{1}{2}h_e^2(b_ib_m+c_ic_m)-\Delta_e^2 & h_e^2(b_i^2+c_i^2)+2\Delta_e^2 & & \\
\frac{1}{2}h_e^2(b_jb_i+c_jc_i)-\Delta_e^2 & \frac{1}{2}h_e^2(b_j^2+c_j^2)-2\Delta_e^2 & \frac{1}{2}h_e^2(b_jb_m+c_jc_m)-\Delta_e^2 & h_e^2(b_jb_i+c_jc_i)+\Delta_e^2 & h_e^2(b_j^2+c_j^2)+2\Delta_e^2 & \\
\frac{1}{2}h_e^2(b_mb_i+c_mc_i)-\Delta_e^2 & \frac{1}{2}h_e^2(b_mb_j+c_mc_j)-\Delta_e^2 & \frac{1}{2}h_e^2(b_m^2+c_m^2)-2\Delta_e^2 & h_e^2(b_mb_i+c_mc_i)+\Delta_e^2 & h_e^2(b_mb_j+c_mc_j)+\Delta_e^2 & h_e^2(b_m^2+c_m^2)+2\Delta_e^2
\end{array}\right]
\end{array}
\tag{4-292}
$$

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{u}^e}=-\frac{1}{3}q_e\Delta_e\begin{matrix}i\\j\\m\\i'\\j'\\m'\end{matrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=-\mathbf{f}^e \quad \text{或} \quad -\frac{1}{3}q_e\Delta_e\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{4-294}$$

其中元素 f_l^e 为

$$f_l^e=\begin{cases}\dfrac{1}{3}q_e\Delta_e, & l=i,j,m \text{ 或 } i',j',m';\\ 0, & \text{其他节点.}\end{cases} \tag{4-295}$$

若三棱柱的侧面（例如 $jj'm'm$ 面）为第二类边界面，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_2^e}{\partial u_l^e}&=-q_e\int_{S_{2e}}L_l\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)dzdl\\&=-q_e\frac{1}{2}\int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)dz\int_{L_l}L_l dl\\&=-\frac{1}{4}q_eS_{\square} \qquad l=j,j',m',m\end{aligned} \tag{4-296}$$

式中 $S_{\square}$ 为矩形 $jj'm'm$ 的面积. 由此

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{u}^e}=-\frac{1}{4}q_eS_{\square}\begin{matrix}i\\j\\m\\i'\\j'\\m'\end{matrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=-\mathbf{f}^e \tag{4-297}$$

其中元素 f_l^e 为

$$f_l^e=\begin{cases}\dfrac{1}{4}q_eS_{\square}, & l=j,m,j',m';\\ 0, & \text{对其他节点.}\end{cases} \tag{4-298}$$

总之，是把 q_eS_e 均分到相关节点上.

4-17 三维恒定旋度磁场的有限元解法[24—43]

电机内部有不少区域是载流区，此时磁场属旋度场，应当用向量磁位 A 或其他混合方法来求解. 本节说明用向量磁位表述时，三维恒定磁场的有限元解法.

（一）三维恒定磁场的向量位表述

边界条件 对于三维恒定旋度磁场，向量磁位 A 满足向量泊松方程或者 A 的旋度旋度方程与 divA＝0 的联立方程. 为得到唯一解，边界条件可按下列三类给出：

1. 第一类边界条件 此时整个边界面 S 上给定向量磁位的切向分量 $\mathbf{A}_t$，即

$$\mathbf{n}\times\mathbf{A}|_S=\mathbf{A}_t \tag{4-299}$$

多数情况下，$\mathbf{A}_t$ 取为零向量.

2. 第二类边界条件　此时整个边界面 S 上给定磁场强度的切向分量 $\mathbf{H}_t$(即$-\mathbf{q}$)，

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}|_S=\mathbf{H}_t \tag{4-300}$$

若边界面为铁心，并设 $\mu_{Fe}=\infty$，则在许多情况下有 $\mathbf{H}_t=0$.

3. 混合边界条件　此时边界面 S 分成 S_1 和 S_2 两部分，S_1 上给定第一类边值，S_2 上给定第二类边值；即

$$\mathbf{n}\times\mathbf{A}|_{S_1}=\mathbf{A}_t,\qquad \mathbf{n}\times\mathbf{H}|_{S_2}=\mathbf{H}_t \tag{4-301}$$

此外，在边界面 S 或 S_2 上，有时还要规定 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0$.

向量泊松方程表述　若整个求解域内磁介质为线性、均匀，则 $\mathbf{A}$ 满足向量泊松方程. 对于混合边值问题，就有

$$\left.\begin{aligned}&\nu\,\text{✡}\mathbf{A}=-\mathbf{J},\qquad \text{在 } V \text{ 内}\\&\mathbf{n}\times\mathbf{A}|_{S_1}=\mathbf{A}_t,\mathbf{n}\times\mathbf{H}|_{S_2}=-\mathbf{q}\end{aligned}\right\} \tag{4-302}$$

在导出向量泊松方程时，对 divA 所加的实际约束为 grad(div A)=0，为使整个求解域内的 div A=0 和 A 为唯一，在整个 S 面上还应规定

$$\operatorname{div}\mathbf{A}|_S=0 \tag{4-303}$$

或

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}|_S=0 \tag{4-304}$$

与式(4-302)和(4-304)等价的条件变分问题为：

$$\left.\begin{aligned}I(\mathbf{A})=&\frac{1}{2}\nu\int_V|\nabla\times\mathbf{A}^2|dV+\frac{1}{2}\nu\int_V(\operatorname{div}\mathbf{A})^2dV-\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}dV\\&-\int_{S_2}\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}dS=\min\\&\mathbf{n}\times\mathbf{A}|_{S_1}=\mathbf{A}_t,\qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}|_S=0\end{aligned}\right\} \tag{4-305}$$

可以证明，上式的欧拉方程就是式(4-302)和(4-304).

对 $\mathbf{A}$ 取变分 $\delta\mathbf{A}$，相应地得到泛函 $I(\mathbf{A})$ 的变分 δI，

$$\delta I=\nu\int_V(\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\delta\mathbf{A}+\operatorname{div}\mathbf{A}\operatorname{div}\delta\mathbf{A})dV-\int_V\mathbf{J}\cdot\delta\mathbf{A}dV-\int_{S_2}\mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{A}dS \tag{4-306}$$

由向量分析中的公式

$$\int_V[\mathbf{a}\cdot\text{✡}\mathbf{b}+\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}+\operatorname{div}\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}]dV$$

$$=\int_S[(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\operatorname{div}\mathbf{b}]dS$$

令 $\mathbf{a}=\delta\mathbf{A}$，$\mathbf{b}=\mathbf{A}$，可知

$$\begin{aligned}&\int_V[\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\delta\mathbf{A}+\operatorname{div}\mathbf{A}\operatorname{div}\delta\mathbf{A}]\,dV\\&=-\int_V\delta\mathbf{A}\cdot\text{✡}\mathbf{A}dV+\int_S[\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}\times\delta\mathbf{A})+(\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{A})\operatorname{div}\mathbf{A}]\,dS\end{aligned} \tag{4-307}$$

利用此关系，式(4-306)可改写为

$$\delta I=-\int_V[\nu\,\text{✡}\mathbf{A}+\mathbf{J}]\cdot\delta\mathbf{A}dV+\int_S[\nu\mathbf{B}\cdot(\mathbf{n}\times\delta\mathbf{A})+\nu\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{A})]dS$$

$$-\int_{S_2}\mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{A}dS$$

$$=-\int_V[\nu\,\nabla\times\mathbf{A}+\mathbf{J}]\cdot\delta\mathbf{A}dV+\int_S(\nu\,\mathrm{div}\mathbf{A})\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{A}dS$$

$$+\int_{S_1}\nu\mathbf{B}\cdot(\mathbf{n}\times\delta\mathbf{A})dS+\int_{S_2}(\mathbf{H}\times\mathbf{n})\cdot\delta\mathbf{A}dS-\int_{S_2}\mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{A}dS \qquad (4\text{-}308)$$

由于在整个边界面 S 上 $\delta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A})=0$，在第一类边界面 S_1 上 $\delta(\mathbf{n}\times\mathbf{A})=0$，所以上式可进一步写成

$$\delta I=-\int_V[\nu\,\nabla\times\mathbf{A}+\mathbf{J}]\cdot\delta\mathbf{A}dV+\int_{S_2}(\mathbf{H}\times\mathbf{n}-\mathbf{q})\cdot\delta\mathbf{A}dS \qquad (4\text{-}309)$$

当 $\delta I=0$ 时，考虑到 $\delta\mathbf{A}$ 的任意性，有

$$\left.\begin{aligned}&\nu\,\nabla\times\mathbf{A}+\mathbf{J}=0, \qquad \text{在 } V \text{ 内}\\&(\mathbf{H}\times\mathbf{n}-\mathbf{q})_{S_2}=0\\&\mathbf{n}\times\mathbf{A}|_{S_1}=\mathbf{A}_t, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}|_S=0\end{aligned}\right\}$$

显然，这就是式(4-302)和(4-304).

从式(4-308)可见，若边界面 S 上规定 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$，亦可得到式(4-309)，即与规定 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0$ 的效果相同.

旋度旋度方程表述 用旋度旋度方程表述时，为保证 $\mathbf{A}$ 的唯一解，在求解域 V 内应引入 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$ 的约束. 这样，对于混合边值问题，就有

$$\left.\begin{aligned}&\nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A}=\mathbf{J}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{A}=0. \qquad \text{在 } V \text{ 内}\\&\mathbf{n}\times\mathbf{A}|_{S_1}=\mathbf{A}_t, \qquad \mathbf{n}\times\mathbf{H}|_{S_2}=-\mathbf{q},\\&\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}|_{S_2}=0\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}310)$$

与上式等价的条件变分问题为：

$$\left.\begin{aligned}&I=\frac{1}{2}\int_V\nu|\nabla\times\mathbf{A}|^2dV+\frac{1}{2}\lambda\int_V\nu(\mathrm{div}\mathbf{A})^2dV-\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}dV\\&\quad-\int_{S_2}\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}dS=\min\\&\mathbf{n}\times\mathbf{A}|_{S_1}=\mathbf{A}_t, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}|_{S_2}=0\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}311)$$

上式中，泛函的第一项和第三项与旋度旋度方程相对应；第四项为第二类边界条件项；$\mathrm{div}\mathbf{A}=0$ 这一约束是用罚函数的形式引进的，它与第三项 $\frac{1}{2}\lambda\int_V\nu\,(\mathrm{div}\,\mathbf{A})^2dV$ 相对应，其中 λ 为罚数，它是一个任选的足够大的正数. λ 选得合适，数值计算的收敛性就好，算出的 $\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ 值亦更接近于零.

（二）变分问题的离散

下面对向量泊松方程的表述方式进行变分离散[即对式(4-305)变分离数]，并导出其有限元方程. 先进行单元分析.

单元分析 把式(4-305)所示泛函写成各单元泛函之和，

$$\left.\begin{aligned}&I(\mathbf{A})=\sum_{e=1}^{E}I^e(\mathbf{A}),\\&I^e(\mathbf{A})=I_1^e(\mathbf{A})+I_2^e(\mathbf{A})+I_3^e(\mathbf{A})\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}312)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} I_1^e &= \frac{1}{2}\nu_e\int_{V_e}|\nabla\times\mathbf{A}|^2dV+\frac{1}{2}\nu_e\int_{V_e}(\mathrm{div}\mathbf{A})^2dV \\ I_2^e &= -\int_{V_e}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}dV \\ I_3^e &= -\int_{S_{2e}}\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}dS \end{aligned}\right\} \tag{4-313}$$

把单元内任一点的向量磁位 $\mathbf{A}^e$ 用单元的形状函数和各节点处的向量磁位来表示，

$$\mathbf{A}^e \doteq \sum_{k=1}^{n} N_k^e\mathbf{A}_k^e \tag{4-314}$$

式中 n 为单元的节点数；于是 $\mathbf{A}^e$ 的 x，y，z 分量 A_x^e，A_y^e，A_z^e 分别为

$$A_x^e \doteq \sum_{k=1}^{n} N_k^eA_{kx}^e,\qquad A_y^e \doteq \sum_{k=1}^{n} N_k^eA_{ky}^e,\quad A_z^e \doteq \sum_{k=1}^{n} N_k^eA_{kz}^e. \tag{4-315}$$

而

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A_z^e}{\partial z}=\sum_{k=1}^{n}A_{kz}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial z},\quad \frac{\partial A_z^e}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n}A_{kz}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}, \\ &\frac{\partial A_y^e}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n}A_{ky}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x},\quad \frac{\partial A_x^e}{\partial y}=\sum_{k=1}^{n}A_{kx}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial y}, \\ &\frac{\partial A_x^e}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n}A_{kx}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x},\quad \frac{\partial A_y^e}{\partial y}=\sum_{k=1}^{n}A_{ky}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial y},\quad \frac{\partial A_z^e}{\partial z}=\sum_{k=1}^{n}A_{kz}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial z}, \\ &\frac{\partial}{\partial A_{lx}^e}\left(\frac{\partial A_x^e}{\partial z}\right)=\frac{\partial N_l^e}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial A_{lz}^e}\left(\frac{\partial A_z^e}{\partial y}\right)=\frac{\partial N_l^e}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial A_{lz}^e}\left(\frac{\partial A_z^e}{\partial x}\right)=\frac{\partial N_l^e}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{4-316}$$

把 I_1^e 对第 l 个节点磁位的 x 分量 $\mathbf{A}_{lx}^e$ 求偏导数，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e}{\partial A_{lx}^e} &= \nu_e\int_{V_e}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\frac{\partial}{\partial A_{lx}^e}(\nabla\times\mathbf{A})dV+\nu_e\int_{V_e}\mathrm{div}\,\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial A_{lx}^e}\mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV \\ &= \nu_e\int_{V_e}\left[\left(\frac{\partial A_x^e}{\partial z}-\frac{\partial A_z^e}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial A_{lx}^e}\left(\frac{\partial A_x^e}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial A_y^e}{\partial x}-\frac{\partial A_x^e}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial A_{lx}^e}\left(-\frac{\partial A_z^e}{\partial y}\right)\right]dV \\ &\quad+\nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial A_x^e}{\partial x}+\frac{\partial A_y^e}{\partial y}+\frac{\partial A_z^e}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial A_{lx}^e}\left(\frac{\partial A_x^e}{\partial x}\right)dV \\ &\doteq \nu_e\int_{V_e}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}A_{kx}-\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}A_{kz}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}A_{ky}-\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}A_{kx}\right)\right]dV \\ &\quad+\nu_e\int_{V_e}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}A_{kx}+\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}A_{ky}+\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}A_{kz}\right)dV \\ &= \nu_e\int_{V_e}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)A_{kx}^e\right. \\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}-\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)A_{ky}^e+\left.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}-\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)A_{kz}^e\right]dV \\ &= \sum_{k=1}^{n}k_{lxkx}^eA_{kx}^e+\sum_{k=1}^{n}k_{lxky}^eA_{ky}^e+\sum_{k=1}^{n}k_{lxkz}^eA_{kz}^e \qquad l=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{4-317}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} k^e_{lxkx} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}+\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}+\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}\right)dV \\ k^e_{lxky} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}-\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\right)dV \\ k^e_{lxkz} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}-\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\right)dV \qquad l,k=1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{4-318}$$

同理，把 I^e_1 和 A^e_{ly} 求偏导数，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e_1}{\partial A^e_{ly}} &= \nu_e\int_{V_e}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\frac{\partial}{\partial A^e_{ly}}(\nabla\times\mathbf{A})dV+\nu_e\int_{V_e}\operatorname{div}\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial A^e_{ly}}(\operatorname{div}\mathbf{A})dV \\ &= \nu_e\int_{V_e}\left[\left(\frac{\partial A^e_z}{\partial y}-\frac{\partial A^e_y}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial A^e_y}{\partial x}-\frac{\partial A^e_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\right)\right]dV \\ &\quad+\nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial A^e_x}{\partial x}+\frac{\partial A^e_y}{\partial y}+\frac{\partial A^e_z}{\partial z}\right)\frac{\partial N^e_l}{\partial y}dV \\ &= \nu_e\int_{V_e}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}-\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\right)A^e_{kx}\right. \\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}+\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}+\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\right)A^e_{ky} \\ &\quad\left.+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}-\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\right)A^e_{kz}\right]dV \\ &= \sum_{k=1}^{n}k^e_{lykx}A^e_{kx}+\sum_{k=1}^{n}k^e_{lyky}A^e_{ky}+\sum_{k=1}^{n}k^e_{lykz}A^e_{kz} \qquad l=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{4-319}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} k^e_{lykx} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}-\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\right)dV \\ k^e_{lyky} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}+\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}+\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\right)dV \\ k^e_{lykz} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}-\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\right)dV \qquad l,k=1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{4-320}$$

把 I^e_1 对 A^e_{lz} 求偏导数，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e_1}{\partial A^e_{lz}} &= \nu_e\int_{V_e}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\frac{\partial}{\partial A^e_{lz}}(\nabla\times\mathbf{A})dV+\nu_e\int_{V_e}\operatorname{div}\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial A^e_{lz}}\operatorname{div}\mathbf{A}dV \\ &= \sum_{k=1}^{n}k^e_{lzkx}A^e_{kx}+\sum_{k=1}^{n}k^e_{lzky}A^e_{ky}+\sum_{k=1}^{n}k^e_{lzkz}A^e_{kz} \qquad l=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{4-321}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} k^e_{lzkx} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}-\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}\right)dV \\ k^e_{lzky} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}-\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}\right)dV \\ k^e_{lzkz} &= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}+\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}+\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\right)dV \qquad l,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{aligned}\right\} \tag{4-322}$$

不难看出

$$\left.\begin{aligned} &k^e_{lxkx}=k^e_{lyky}=k^e_{lzkz}\\ &k^e_{lzky}=-k^e_{lykz},\qquad k^e_{lzkx}=-k^e_{lxkz},\qquad k^e_{lykx}=-k^e_{lzky}\end{aligned}\right\} \tag{4-323}$$

把 $\mathbf{A}_l$ 的 x，y，z 分量写成列向量，可得

$$\frac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e_l}=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{K}^e_{lk}\mathbf{A}^e_k \qquad l=1,2,\cdots,n \tag{4-324}$$

式中

$$\mathbf{A}^e_k=\begin{bmatrix}A^e_{kx}\\A^e_{ky}\\A^e_{kz}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{k}^e_{lk}=\begin{bmatrix}k^e_{lxkx}&k^e_{lzky}&k^e_{lzkz}\\k^e_{lykx}&k^e_{lyky}&k^e_{lykz}\\k^e_{lzkx}&k^e_{lzky}&k^e_{lzkz}\end{bmatrix} \tag{4-325}$$

再把单元中所有节点的$\dfrac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e_l}$（$l=1$，$2$，$\cdots$，$n$）集合在一起，组成一个列向量，可得 $\dfrac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e}$. 以三棱柱单元为例，

$$\frac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e_i}\\[2mm]\dfrac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e_j}\\[2mm]\dfrac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e_m}\\[2mm]\dfrac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e_{i'}}\\[2mm]\dfrac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e_{j'}}\\[2mm]\dfrac{\partial I^e_1}{\partial \mathbf{A}^e_{m'}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{k}^e_{ii}&\mathbf{k}^e_{ij}&\mathbf{k}^e_{im}&\mathbf{k}^e_{ii'}&\mathbf{k}^e_{ij'}&\mathbf{k}^e_{im'}\\\mathbf{k}^e_{ji}&\mathbf{k}^e_{jj}&\mathbf{k}^e_{jm}&\mathbf{k}^e_{ji'}&\mathbf{k}^e_{jj'}&\mathbf{k}^e_{jm'}\\\mathbf{k}^e_{mi}&\mathbf{k}^e_{mj}&\mathbf{k}^e_{mm}&\mathbf{k}^e_{mi'}&\mathbf{k}^e_{mj'}&\mathbf{k}^e_{mm'}\\\mathbf{k}^e_{i'i}&\mathbf{k}^e_{i'j}&\mathbf{k}^e_{i'm}&\mathbf{k}^e_{i'i'}&\mathbf{k}^e_{i'j'}&\mathbf{k}^e_{i'm'}\\\mathbf{k}^e_{j'i}&\mathbf{k}^e_{j'j}&\mathbf{k}^e_{j'm}&\mathbf{k}^e_{j'i'}&\mathbf{k}^e_{j'j'}&\mathbf{k}^e_{j'm'}\\\mathbf{k}^e_{m'i}&\mathbf{k}^e_{m'j}&\mathbf{k}^e_{m'm}&\mathbf{k}^e_{m'i'}&\mathbf{k}^e_{m'j'}&\mathbf{k}^e_{m'm'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^e_i\\\mathbf{A}^e_j\\\mathbf{A}^e_m\\\mathbf{A}^e_{i'}\\\mathbf{A}^e_{j'}\\\mathbf{A}^e_{m'}\end{bmatrix}=\mathbf{k}^e\mathbf{A}^e \tag{4-326}$$

式中 $\mathbf{k}^e_{ii}$和 $\mathbf{k}^e_{ij}$等都是一些 3×3 的子矩阵，$\mathbf{A}^e_i$和 $\mathbf{A}^e_j$等则是 3×1 的列阵；且 $\mathbf{k}^e_{ji}=(\mathbf{k}^e_{ij})^T$.

再看 I^e_2 对 $\mathbf{A}^e_l$的偏导数.

$$\begin{aligned}\frac{\partial I^e_2}{\partial A^e_{lx}}&=-\int_{V_e}\mathbf{J}_e\cdot\frac{\partial \mathbf{A}^e}{\partial A^e_{lx}}dV=-J_{ex}\int_{V_e}\frac{\partial A^e_x}{\partial A^e_{lx}}dV\\&=-J_{ex}\int_{V_e}N^e_l dV\end{aligned} \tag{4-327}$$

同理，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial I^e_2}{\partial A^e_{ly}}&=-\int_{V_e}\mathbf{J}_e\cdot\frac{\partial A^e}{\partial \mathbf{A}^e_{ly}}dV=-J_{ey}\int_{V_e}N^e_l dV\\\frac{\partial I^e_2}{\partial A^e_{lz}}&=-\int_{V_e}\mathbf{J}_e\cdot\frac{\partial A^e}{\partial A^e_{lz}}dV=-J_{ez}\int_{V_e}N^e_l dV\end{aligned}\right\} \tag{4-328}$$

式中 J_{ex}，J_{ey}和 J_{ez}分别表示单元电密向量 $\mathbf{J}_e$ 的 x，y 和 z 分量，在单元中取为常值. 于是

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{A}_l^e} = -\begin{bmatrix} J_{ex} \\ J_{ey} \\ J_{ez} \end{bmatrix} \int_{V_e} N_l^e dV = -\mathbf{J}_e \int_{V_e} N_l^e dV \tag{4-329}$$

最后是 I_3^e 对 $\mathbf{A}_l^e$ 的偏导数.

$$\frac{\partial I_3^e}{\partial A_{lx}^e} = -\int_{S_{2e}} \mathbf{q}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^e}{\partial A_{lx}^e} dS = -q_{ex} \int_{S_{2e}} \frac{\partial A_x^e}{\partial A_{lx}^e} dS$$

$$= q_{ex} \int_{S_{2e}} N_l^e dS \tag{4-330}$$

同理，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial I_3^e}{\partial A_{ly}^e} &= -\int_{S_{2e}} \mathbf{q}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^e}{\partial A_{ly}^e} dS = -q_{ey} \int_{S_{2e}} N_l^e dS \\ \frac{\partial I_3^e}{\partial A_{lz}^e} &= -\int_{S_{2e}} \mathbf{q}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^e}{\partial A_{lz}^e} dS = -q_{ez} \int_{S_{2e}} N_l^e dS \end{aligned}\right\} \tag{4-331}$$

式中 q_{ex}，q_{ey}和 q_{ez}分别为 $\mathbf{q}_e$ 的 x，y，z 分量. 于是

$$\frac{\partial I_3^e}{\partial \mathbf{A}_l^e} = -\begin{bmatrix} q_{ex} \\ q_{ey} \\ q_{ez} \end{bmatrix} \int_{S_{2e}} N_l^e dS = -\mathbf{q}_e \int_{S_{2e}} N_l^e dS \tag{4-332}$$

把$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{A}_l^e}$ 和 $\frac{\partial I_3^e}{\partial \mathbf{A}_l^e}$ 合成一起，可得

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{A}_l^e} + \frac{\partial I_3^e}{\partial \mathbf{A}_l^e} = -\begin{bmatrix} f_{lx}^e \\ f_{ly}^e \\ f_{lz}^e \end{bmatrix} = -\mathbf{f}_l^e \tag{4-333}$$

式中 $\mathbf{f}_l^e$ 为节点 l 的单元右端项列向量，其 x 分量为

$$f_{lx}^e = J_{ex} \int_{V_e} N_l^e dV + q_{ex} \int_{S_{2e}} N_l^e dS \tag{4-334}$$

把上式中的 J_{ex}和 q_{ex}换成 J_{ey}，q_{ey}或 J_{ez}，q_{ez}，可得 f_{ly}^e和 f_{lz}^e.

再把单元中所有节点的$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_l^e}(I_2^e+I_3^e)$ 集合在一起，可得$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}^e}(I_2^e+I_3^e)$. 以三棱柱单元为例，

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}^e}(I_2^e + I_3^e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_i^e}(I_2^e + I_3^e) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_j^e}(I_2^e + I_3^e) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_m^e}(I_2^e + I_3^e) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_{i'}^e}(I_2^e + I_3^e) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_{j'}^e}(I_2^e + I_3^e) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_{m'}^e}(I_2^e + I_3^e) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \\ \mathbf{f}_m^e \\ \mathbf{f}_{i'}^e \\ \mathbf{f}_{j'}^e \\ \mathbf{f}_{m'}^e \end{bmatrix} = -\mathbf{f}^e \tag{4-335}$$

由此可得单元分析的结果为

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{A}^e}=\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{A}^e}+\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{A}^e}+\frac{\partial I_3^e}{\partial \mathbf{A}^e}=\mathbf{k}^e\mathbf{A}^e-\mathbf{f}^e \tag{4-336}$$

总体合成 把 $\mathbf{A}^e$ 扩展为 $\mathbf{A}$，$\mathbf{k}^e$ 和 $\mathbf{f}^e$ 扩展为单元贡献 $\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$，再进行总体合成，并令$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{A}}=\mathbf{0}$，即可得到一个代数方程组

$$\mathbf{KA}=\mathbf{F} \tag{4-337}$$

式中

$$\mathbf{K}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{K}^e,\qquad \mathbf{F}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{F}^e \tag{4-338}$$

然后用强加边界条件修改方程组，求解修改后的方程组，即可得到各个节点的向量磁位值.

（三）采用三棱柱单元时各元素的计算公式

对于直三棱柱单元，$N_l^e=L_l\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)$，且

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial N_l^e}{\partial x}=\frac{b_l}{2\Delta_e}\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right),\quad \frac{\partial N_l^e}{\partial y}=\frac{c_l}{2\Delta_e}\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right),\\&\frac{\partial N_l^e}{\partial z}=L_l\frac{1}{2}\frac{p_l}{d}.\end{aligned}\right\}$$

由此可算出单元系数阵中对角线子阵 $\mathbf{k}_{ll}^e$ 中的九个元素为：

$$\begin{aligned}k_{lxlx}^e=k_{lyly}^e=k_{lzlz}^e&=\nu_e\int_{V_e}\left[\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz\\&=\frac{\nu_e}{12V_e}[(b_l^2+c_l^2)h_e^2+2\Delta_e^2]\qquad l=i,j,m,i',j',m'.\end{aligned} \tag{4-339}$$

$$k_{lxly}^e=k_{lylx}^e=k_{lxlz}^e=k_{lzlx}^e=k_{lylz}^e=k_{lzly}^e=0,\qquad l=i,j,m,i',j',m'. \tag{4-340}$$

即

$$\mathbf{k}_{ll}^e=\frac{\nu_e}{12V_e}\begin{array}{c}\\x\\y\\z\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{bmatrix}(b_l^2+c_l^2)h_e^2+2\Delta_e^2&0&0\\0&(b_l^2+c_l^2)h_e^2+2\Delta_e^2&0\\0&0&(b_l^2+c_l^2)h_e^2+2\Delta_e^2\end{bmatrix}\end{array} \tag{4-341}$$

对非对角线子矩阵 $\mathbf{k}_{lk}^e$，其九个元素为：

$$\left.\begin{aligned}k_{lxkx}^e&=k_{lyky}^e=k_{lzkz}^e\\&=\nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)dxdydz\\&=\frac{\nu_e}{16\Delta_e}(b_lb_k+c_lc_k)\int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)dz\\&\quad+\frac{\nu_e}{4}\frac{p_lp_k}{d^2}2d\int_{S_e}L_lL_kdxdy\\&=\frac{\nu_e}{12V_e}[m(b_lb_k+c_lc_k)h_e^2+np_lp_k2\Delta_e^2]\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
k^e_{lxky} &= -k^e_{lykx} = \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial y} - \frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\right)dxdydz \\
&= \frac{\nu_e}{16\Delta_e}(b_ic_k - c_ib_k)\int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1 + p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\left(1 + p_k\frac{z-z_c}{d}\right)dz \\
&= \frac{\nu_e}{12V_e}m(b_ib_k - c_ib_k)h_e^2 \\
k^e_{lxkz} &= -k^e_{lzkx} = \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial z} - \frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\right)dxdydz \\
&= \nu_e\left[\frac{b_ip_k}{4V_e}\int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1 + p_l\frac{z-z_c}{d}\right)dz\int_{S_e}L_kdxdy\right. \\
&\quad \left. - \frac{b_kp_l}{4V_e}\int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1 + p_k\frac{z-z_c}{d}\right)dz\cdot\int_{S_e}L_ldxdy\right] \\
&= \frac{\nu_e}{12}(b_ip_k - b_kp_l) \\
k^e_{lykz} &= -k^e_{lzky} \\
&= \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial z} - \frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\right)dxdydz \\
&= \frac{\nu_e}{12}(c_ip_k - c_kp_l) \\
m &= \begin{cases}1, & \text{若 } p_l = p_k;\\ 0.5, & \text{若 } p_l \neq p_k.\end{cases} \qquad n = \begin{cases}1, & \text{对 } ii', jj', mm' \text{ 节点组合;}\\ 0.5, & \text{对其他组合.}\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{4-342}
$$

即 $\mathbf{k}^e_{lk}$ 为反对称矩阵，且对角线元素均相等；

$$
\mathbf{k}^e_{lk} = \frac{\nu_e}{12V_e}\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}\\ \begin{bmatrix} m(b_ib_k + c_ic_k)h_e^2 + np_ip_k(2\Delta_e^2) & & \text{反 对 称} \\ m(c_ib_k - b_ic_k)h_e^2 & m(b_ib_k + c_ic_k)h_e^2 + np_ip_k(2\Delta_e^2) & \\ (b_kp_l - b_lp_k)V_e & (c_kp_l - c_lp_k)V_e & m(b_ib_k + c_ic_k)h_e^2 + np_ip_k(2\Delta_e^2)\end{bmatrix}\end{array} \tag{4-343}
$$

再看单元右端项列阵中的各个元素．由于

$$
\int_{V_e}N^e_ldV = \int_{S_e}L_ldxdy\int_{z_c-d}^{z_c+d}\frac{1}{2}\left(1 + p_l\frac{z-z_c}{d}\right)dz = \frac{1}{6}V_e \tag{4-344}
$$

所以

$$
\frac{\partial I^e_2}{\partial \mathbf{A}^e_l} = -\frac{1}{6}V_e\begin{bmatrix}J_{ex}\\ J_{ey}\\ J_{ez}\end{bmatrix}, \qquad l = i, j, m, i', j', m' \tag{4-345}
$$

第二类边界项需分成两种情况来讨论．若第二类边界面为三棱柱的顶面或底面，则 N^e_l 退化成 L_l，而 $\int_{S_{2e}}L_ldS = \frac{1}{3}\Delta_e$；另一方面，由于边界面的法线与 z 轴平行，所以 $\mathbf{q}_e$ 只有 x，y 分量；于是

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I^e_3}{\partial \mathbf{A}^e_l} &= -\frac{1}{3}\Delta_e\begin{bmatrix}q_{ex}\\ q_{ey}\\ 0\end{bmatrix}, \qquad l = i, j, m(\text{或 } i', j', m');\\
&= \mathbf{0}, \qquad\qquad\qquad \text{对其他节点.}
\end{aligned}\right\} \tag{4-346}
$$

若第二类边界面为三棱柱的侧面，例如 $jj'mm'$ 面，则 $\int_{S_{2e}} N_l^e dS = \frac{1}{4}S_{\square}$，$S_{\square}$ 为侧面的矩形面积；于是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial I_3^e}{\partial \mathbf{A}_l^e} &= -\frac{1}{4}S_{\square}\begin{bmatrix}q_{ex}\\ q_{ey}\\ q_{ez}\end{bmatrix}, \qquad l=i,j,i',j';\\ &= \mathbf{0}, \qquad\qquad \text{对其他节点.}\end{aligned}\right\} \tag{4-347}$$

而

$$\mathbf{f}_l^e = -\left(\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{A}_l^e} + \frac{\partial I_3^e}{\partial \mathbf{A}_l^e}\right) \tag{4-348}$$

（四）非线性的处理

对于非线性问题，泛函 $I(\mathbf{A})$ 中的第一项（磁能项）应写成 $\int_v\left[\int_0^B \nu b db\right]dV$；由于在计算 $\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{A}_l^e}$ 时，把整个单元的磁阻率作为同一个值，所以从形式上看，非线性时的离散结果将与线性时相同，差别在于 ν_e 要进行多次迭代，以达到与该单元处的饱和程度相对应.

对于三棱柱单元，可以用重心处的磁感强度 B_e 来确定对应的 ν_e 值. B_e 可用下式算出：

$$\left.\begin{aligned}B_{ex} &= \left(\frac{\partial A_z^e}{\partial y} - \frac{\partial A_y^e}{\partial z}\right)_e = \sum_k\left(\frac{c_k}{4\Delta_e}A_{kz} - \frac{p_k}{3h_e}A_{ky}\right)_{x=x_e,\ y=y_e,\ z=z_e}\\ B_{ey} &= \left(\frac{\partial A_x^e}{\partial z} - \frac{\partial A_z^e}{\partial x}\right)_e = \sum_k\left(\frac{p_k}{3h_e}A_{kx} - \frac{b_k}{4\Delta_e}A_{kz}\right)_{x=x_e,\ y=y_e,\ z=z_e}\\ B_{ez} &= \left(\frac{\partial A_y^e}{\partial x} - \frac{\partial A_x^e}{\partial y}\right)_e = \sum_k\left(\frac{b_k}{4\Delta_e}A_{ky} - \frac{c_k}{4\Delta_e}A_{kx}\right)_{x=x_e,\ y=y_e,\ z=z_e}\end{aligned}\right\} \tag{4-349}$$

式中 $\sum_k$ 是指对 $k=i$，j，m，i'，j'，m' 等六个节点求和.

4-18 小　　结

近年来，由于计算数学的发展和数字计算机的广泛应用，使得许多复杂的电磁场问题得以用数值法来求解. 常用的数值方法为有限差分法和有限单元法.

有限差分法采用矩形网格. 对泊松方程的边值问题，可采用泰勒级数法或积分法来离散. 泰勒级数法是用节点磁位的差商来代替微商，将微分方程及其边界条件离散为差分方程. 此法的优点是简单、明了，并能给出离散逼近的误差估计；缺点是对于复杂的边界条件和求解域内存在介质系数间断时，需要进行单独处理. 积分法是将泊松方程及其边界条件还原为安培环路定律的积分形式，并在网格中线的周边路径上建立离散的差分方程. 由积分法所得的代数方程组，其系数矩阵易保证对称性；另外，内部介质系数间断所引起的交界面条件被近似解自动满足，无需进行特殊处理.

有限单元法是将变分原理（或加权余量法）与剖分、分片插值逼近相结合的一种离散数值方法. 此法的单元剖分、节点配置比较自由，在精度要求较高的区域，可以根据需

要局部加密剖分；对于不规则边界和形状较为复杂的内部交界面，亦能做到较好的逼近和处理．另外，用有限单元法离散、并经修改所得的代数方程组，其系数矩阵常常是对称、正定和稀疏的，这对方程组的求解十分有利．最后，有限单元法的算法统一，便于实现程序标准化和计算自动化．所有这些优点，使有限单元法的应用愈来愈广．

用有限单元法求解与原微分方程边值问题等价的变分问题时，第二类边界条件被泛函的极值解自动满足，所以称为自然边界条件；第一类边界条件则需作为定解条件，通过修改离散后的方程组，强制使其满足，所以称为强加边界条件或本质边界条件．由于第一类边界条件是强加条件，所以第一类边界节点上的位值精确地等于给定的边值；而对第二类边界节点，算出的磁位导数值仅能近似地满足给定的第二类边界条件．

由于三维问题的处理要比二维问题复杂得多，所以通常尽可能把实际问题简化成二维问题来研究．对二维问题，常用的单元是三节点三角元；这种单元的形状函数和变分问题的离散格式比较简单，在剖分比较理想的情况下，能够满足工程一般精度的要求．对于某些精度要求较高的问题，应当采用二阶元（例如六节点三角元）或其他高阶元．对于电机内部少数形状和电密分布比较复杂的部位，有时需要作为三维问题来研究．三维问题中常用的单元是直三棱柱单元和砖块单元．为减少变量数，应尽可能采用标量位来求解，此时一个节点上只有一个变量．若采用向量位求解，一个节点上将有 x，y，z 分量等三个变量，使方程数扩大 3 倍，从而使所需的计算机存储量和计算时间大大增加．对于必须用向量位求解的三维问题，一方面要注意如何引入 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$ 的约束；另一方面要注意边界条件的正确给定，否则不能保证解的唯一性和正确性．

参　考　文　献

[1] G. E. 福雪斯、W. R. 华沙．偏微分方程的有限差分方法，上海科学技术出版社，1964.

[2] G. D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations (Finite Difference Method), 2nd Edition, Clarendon Press, 1978.

[3] S. V. Ahamed, E. A. Erdelyi, Nonlinear Vector Potential Equation for Highly Saturated Heterpolar Electrical Machines, IEEE Trans. on Aerospace, No. 2, 1964.

[4] E. A. Erdelyi, S. V. Ahamed and R. D. Burtness, Flux Distribution in Saturated D-C Machines at No-load, IEEE Trans. on PAS, No. 5, 1965.

[5] S. V. Ahamed, E. A. Erdelyi, Flux Distribution in D-C Machine on Load and Overload, IEEE Trans. on PAS, No. 9, 1966.

[6] S. V. Ahamed, E. A. Erdelyi, Nonlinear Theory of Salient-pole Machines, IEEE Trans. on PAS, No. 1, 1966.

[7] E. A. Erdelyi, E. F. Fuchs, Nonlinear Magnetic Field Analysis of D-C Machines, pt. Ⅰ ——Theoretical Fundamentals; pt. Ⅱ ——Application of The Improved treatment; pt. Ⅲ ——Equipotential Plots Drawn by Computer, IEEE Trans. on PAS, No. 7, 1970.

[8] 汤蕙璎、王浩民、刘汉炎、路宝昕，直流电机非线性磁场的数值计算，哈尔滨电工学院学报，1980, No. 1.

[9] A. J. Davies, The Finite Element Method, Clarendon Press, 1980.

[10] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1977.

[11] O. C. Zienkiewicz, K. Morgan, Finite Element and Approximation, John Wiley & Sons, 1983.

[12] B. A. Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972.

[13] 中田高義、高橋則雄，電気工学の有限要素法，森北出版株式会社，1982.

[14] 曾余庚、徐国华、宋国乡，电磁场有限单元法，科学出版社，1982.

[15] 盛剑霓，工程电磁场数值分析，西安交通大学出版社，1991.

[16] M. V. K. Chari, P. P. Silvester (Editors), Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems, John Wiley & Sons, 1980.

[17] P. P. Silvester, R. L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University Press, 1983.

[18] A. M. Winslow, Magnetic Field Calculation in an Irregular Triangle Mesh, Proc. Int. Symposium on Magnetic Technology, Oct. 1965.

[19] P. Silvester, M. K. V. Chari, Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problem, IEEE Trans. on PAS, No. 7, 1970.

[20] M. K. V. Chari, P. P. Silvester, Analysis of Turboalternator Magnetic Fields by Finite Elements, IEEE Trans. on PAS, No. 2, 1971.

[21] M. K. V. Chari, Nonlinear Finite Element Solution of Electrical Machines Under No-load and Full-load Condition, IEEE Trans. on Magnetics, 1974.

[22] M. K. V. Chari, Finite Element Analysis of Electric Machinery and Devices, IEEE Trans. on Magnetics, No. 5, 1980.

[23] 王建设，凸极同步电机空载特性的有限元分析，哈尔滨电工学院学报，1985，No. 2.

[24] E. Guancian, S. D. Gupta, Three-dimensional Finite Element Program for Magnetic Field Problem, IEEE Trans. on Magnetics, No. 3, 1977.

[25] O. C. Zienkiewicz, T. Lyness and D. R. Jowen, Three-dimensional Magnetic Field Determination Using a Scalar Potentical——A Finite Element Solution, IEEE Trans. on Magnetics, No. 5, 1977.

[26] 吴海容，解三维恒定磁场的有限元方法，哈尔滨电工学院学报，1979，No. 2.

[27] N. A. Damerdash, T. W. Nahl and F. A. Fouad, Finite Element Formulation and Analysis of Three Dimensional Magnetic Field Problems, IEEE Trans. on Magnetics, No. 5, 1980.

[28] N. A. Demerdash, T. W. Nehl and F. A. Fouad, Three Dimensional Finite Element Vector Potential Formulation of Magnetic Fields in Electrical Apparatus, IEEE Trans. on PAS, No. 8, 1981.

[29] N. A. Demerdash, T. W. Nahl, O. A. Mohammed and F. A. Fouad, Nonlinear Three Dimensional Magnetic Vector Potential Finite Element Solution of Field Problems Including Experimental Verification, IEEE Trans. on Magnetics, No. 6, 1981.

[30] J. L. Coulomb, Finite Elements Three Dimensional Magnetic Field Computation, IEEE Trans. on Magnetics, No. 6, 1981.

[31] Z. J. Csendes, J. Weiss and S. R. H. Hoole, Alternative Vector Potential Formulation of 3-D Magnetostatic Field Problems, IEEE Trans. on Magnetics, No. 2, 1982.

[32] P. R. Kotiuga, P. P. Silvester, Vector Potential Formulation for Three Dimensional Magnetostatics, Journal of Applied Physics, No. 11, pt. Ⅰ, 1982.

[33] M. V. K. Chari, P. Silvester, A. Konrad, Z. J. Csendes and M. A. Palmo, Three-dimensional Magnetostatic Field Analysis of Electric Machinery by the Finite-element Method, IEEE Trans. on PAS, No. 8, 1981.

[34] M. V. K. Chari, A. Konrad, J. D'Angelo and M. A. Palmo, Finite Element Computation of Three-dimensional Electrostatic and Magnetostatic Field Problems, IEEE Trans. on Magnetics, No. 6, 1983.

[35] M. V. K. Chari, J. D'Angelo, M. A. Palmo and D. K. Sharma, Application of Three-dimensional Electromagnetic Analysis Methods to Electrical Machinery and Devices, pt. Ⅰ: Theory, IEEE Trans. on Energy Conversion, June, 1986.

[36] 颜威利，三维恒定非线性磁场有限元法的变分原理，哈尔滨电工学院学报，1983，No. 1.

[37] O. A. Mohammed, W. A. Davis, B. D. Popovic, T. W. Nehl and D. A. Demerdash, On Uniqueness of Solution of Magnetic Vector Potential Problems by Three Dimensional Finite Element Methods, Journal of Applied Physics, No. 11, pt. Ⅰ, 1982.

[38] O. A. Mohammed, N. A. Demerdash and T. W. Nehl, Vilidity of Finite Element Formulation and Solution of Three Dimensional Magnetostatic Problems in Electrical Devices with Application to Transformer and Reactor, IEEE Trans. on PAS, No. 7, 1984.

[39] O. A. Mohammed, N. A. Demerdash and T. W. Nehl, Nonlinear Vector Potential Formulation and Experimental Verification of Newton-Raphson Solution of Three Dimensional Magnetostatic Fields in Electrical Devices, IEEE Trans. on Energy Conversion, No. 1, 1986.

[40] J. Rikabi, C. F. Bryrant and E. M. Freeman, On the Solvability of Magnetostatic Vector Potential Formulation, IEEE Trans. on Magnetics, No. 5, 1990.

[41] T. Morisue, Infinitely Many Formulation Using the Magnetic Vector Potential with the Coulomb Gauge for 3D Field Calculations, IEEE Trans. on Magnetics, No. 2, 1990.

[42] 汤蕴璆，三维恒定磁场的唯一性，哈尔滨电工学院学报，1994，No. 4.

[43] 吴海容、汤蕴璆，三维恒定磁场罚函数月限元法的离散格式，哈尔滨电工学院学报，1995，No. 3.

第五章　时变电磁场的基本理论

电机中有许多问题属于随时间而变化的电磁场问题，例如叠片铁心中的涡流损耗，槽内载流导体的电流集肤效应，实心转子交流电机中的涡流和参数等，这些问题需要用时变电磁场的理论来研究、解决. 本章先阐明时变电磁场的基本方程——麦克斯韦方程，时变电磁场中的电磁位，边界条件和能量关系. 第六章和第七章将接着研究稳态正弦电磁场的解析解和数值解，第八章研究电磁场的瞬态.

5-1　静止介质中的麦克斯韦方程[1—4]

(一) 位移电流和麦克斯韦第一方程

对于恒定磁场，我们知道

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{5-1}$$

式中 $\mathbf{J}$ 为传导电流的电流密度；这是安培环路定律的微分形式. 对上式取散度，可得

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{H}) = \mathrm{div}\,\mathbf{J}$$

由向量分析可知，旋度场的散度恒等于零，所以上式的左端恒等于零；在恒定电流下，电流密度的散度亦等于零；所以式 (5-1) 在恒定磁场情况下成立.

若电流随时间而变化，根据电荷守恒定律

$$\mathrm{div}\,\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{5-2}$$

式中 ρ 为自由电荷密度；此时电流密度的散度一般不再等于零. 由于电荷守恒定律是实验验证的普遍规律，所以在电流非恒定的情况下，式(5-1)应加以修改.

由于 $\rho=\mathrm{div}\mathbf{D}$，所以

$$\mathrm{div}\,\mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\mathbf{D})$$

或

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0 \tag{5-3}$$

式(5-3)说明，当电流非恒定时，$\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$的散度恒等于零；于是可以设想把式(5-1)修改成如下形式：

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{5-4}$$

式中$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$为电位移随时间的变化率，称为位移电流密度.

这样修改是否符合客观实际，要由实践来验证. 麦克斯韦引入位移电流的概念以后，推导出电磁场的运动具有波动性，并断定电磁波的传播速度等于光速，由此建立了光的

电磁说，这些预言后来均被实验所证实.

式(5-4)就称为麦克斯韦第一方程，它是安培环路定律的推广；它告诉我们：不仅电流能激发磁场，随时间变化的电场亦能激发磁场.

（二）电磁感应定律和麦克斯韦第二方程

当通过闭合电路中的磁通量发生变化时，电路中就会产生感应电流 i（图 5-1）；若回路的电阻为 R，则

$$Ri = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \tag{5-5}$$

由于 $Ri = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$，式中 $\mathbf{E}$ 为作用在回路各处的电场强度；故回路中的感应电势 $\mathscr{E}$ 应为

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \tag{5-6}$$

这就是法拉第电磁感应定律. 根据楞茨定则，感应电流的方向恒为抵制磁通变化的方向；因此，如果 $\mathscr{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的正方向符合右手螺旋关系，则式(5-6)中有一个负号.

电磁感应定律是从一个具有电阻 R 的实体回路中总结出来的. 但是实验证明，当所研究的区域内没有实体回路时，式(5-6)仍然成立；即沿闭合回线内电场强度 $\mathbf{E}$ 的线积分值仍然等于 $-\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$. 这样，从式 (5-6) 就可以导出相应的微分形式.

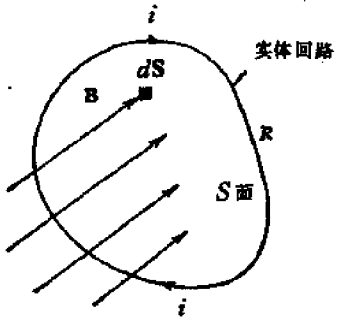


图 5-1　法拉第电磁感应定律

在静止介质中，磁通量的变化只能由磁感强度 $\mathbf{B}$ 的变化引起，因此

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

于是式(5-6)可改写成

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{5-7}$$

再利用斯托克斯定理，即可得到

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5-8}$$

上式就是麦克斯韦第二方程. 式(5-8)说明，磁场随时间变化时会激发电场.

（三）麦克斯韦方程组

麦克斯韦第一和第二方程描述了时变电场和磁场的有旋性，麦克斯韦第三和第四方程是描述磁场和电场是否有源的两个方程. 麦克斯韦认为，对于时变场，磁场仍为无源，磁感强度 $\mathbf{B}$ 的散度处处为零；电场仍为有源，电位移 $\mathbf{D}$ 的散度等于该点的电荷密度. 这样，整个时变电磁场的变化规律就可用以下四个方程式来表达：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};\\ &\mathrm{div}\mathbf{B}=0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{D}=\rho \end{aligned}\right\} \tag{5-9}$$

式(5-9)称为麦克斯韦方程组. 式(5-9)中的第一和第三式规定了磁场的旋度和散度，第二和第四式规定了电场的旋度和散度；通过第一式和第二式把电场和磁场联系起来，并使电磁场以波动形式运动.

对于各向同性介质，介质的成分方程为

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}, \qquad \mathbf{J}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{(e)}) \tag{5-10}$$

式中 ε 为介电常数，μ 为磁导率，σ 为电导率；$\mathbf{E}^{(e)}$ 为局外力（即由非电磁能转换为电磁能所引起的外来力）所产生的电场强度，称为局外电场强度，它仅在蓄电池、发电机和电动机内存在. 对于不存在局外电场强度的区域，$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$.

麦克斯韦方程组加上介质的成分方程，组成了一个完整的方程组. 一旦给定电流密度和电荷密度的分布情况和变化规律，问题的初始条件和必要的边界条件，就可以完全确定所研究的区域内场的分布和变化.

5-2 涡流方程和波动方程[1—5]

（一）磁感强度和电场强度的微分方程

麦克斯韦第一和第二方程都是磁场和电场相耦合的方程. 为得到仅仅含有磁感强度 **B** 或电场强度 **E** 的微分方程，需要在第一方程中用 **B**（或 **H**）去替代 **J** 和 **D**；在第二方程中用 **E** 去替代 **B**.

对麦克斯韦第一方程取旋度，可得

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathrm{rot}\mathbf{J}+\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{D}$$

设介质为各向同性、线性和均匀，则 ε，μ 和 σ 均为常值；若所研究的区域内无局外电场，则 $\mathbf{E}^{(e)}=0$. 把上式乘以 μ，再把 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$，$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 和麦克斯韦第二方程代入，可得

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{B}=\mu\sigma\mathrm{rot}\mathbf{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{5-11}$$

根据向量分析，

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{B}=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{B})-\nabla\!\cdot\!\nabla\mathbf{B}$$

将上式代入式(5-11)，并考虑到 $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$，可得

$$\nabla\!\cdot\!\nabla\mathbf{B}=\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{5-12}$$

这就是时变电磁场中磁感强度 **B** 所满足的微分方程.

同理，对麦克斯韦第二方程取旋度，并将第一方程和第四方程代入，经整理后可得

$$\nabla\!\cdot\!\nabla\mathbf{E}=\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\mathrm{grad}\,\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5-13}$$

在自由电荷密度 $\rho=0$ 的情况下，有

$$\nabla\!\cdot\!\nabla\mathbf{E}=\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{5-14}$$

和

$$\nabla\mathbf{J} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial t^2} \tag{5-15}$$

这就是电场强度 **E** 和电流密度 **J** 所满足的微分方程. 式(5-12)和(5-13)通常称为电报方程式. 注意，这几个式子都是向量微分方程式.

下面来讨论两种重要的特殊情况.

（二）涡流方程

若所研究的电磁场随时间正弦变化，则导体中位移电流密度的幅值与传导电流密度幅值之比应为$\frac{J_D}{J}=\frac{\omega D}{\sigma E}=\frac{\varepsilon}{\sigma}2\pi f$. 对金属导体，$\sigma$ 为 $10^7\ \frac{1}{\Omega-\mathrm{m}}$级，$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$，故当频率 f 在 10^{10}以下时，$\frac{J_D}{J}<10^{-1}$. 这说明，对于导电区中的低频电磁场，位移电流可以略去不计；此时就有

$$\nabla\mathbf{B} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\quad \nabla\mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\quad \nabla\mathbf{J} = \mu\sigma\frac{\partial J}{\partial t} \tag{5-16}$$

式(5-16)经常用来研究导体和铁心中的涡流和集肤效应，所以亦称为涡流方程或集肤效应方程.

对于稳态、随时间正弦变化的正弦电磁场，磁感强度可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathrm{Re}(\mathbf{i}\dot{B}_x e^{j\omega t} + \mathbf{j}\dot{B}_y e^{j\omega t} + \mathbf{k}\dot{B}_z e^{j\omega t})\\ &= \mathrm{Re}(\dot{B}_z e^{j\omega t})\end{aligned} \tag{5-17}$$

式中 Re 表示实部；$\dot{\mathbf{B}}$既是向量又是相量；

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}\dot{B}_x + \mathbf{j}\dot{B}_y + \mathbf{k}\dot{B}_z \tag{5-18}$$

此时式(5-16)中的第一式可改写成

$$\nabla\dot{\mathbf{B}} = j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{B}} \tag{5-19}$$

同理，式(5-16)中的第二式和第三式可写成

$$\nabla\dot{\mathbf{E}} = j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{E}},\qquad \nabla\dot{\mathbf{J}} = j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{J}} \tag{5-20}$$

忽略位移电流时，波动现象不再出现；此外

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$$

这样，如能给出导体内电密 **J** 的分布，就可以用安培定律直接求得无界空间中的磁感强度 **B**，这点与恒定磁场很相似；所以忽略位移电流时的低频电磁场亦称为似恒电磁场. 另一方面，时变磁场会在导体内感生感应电场和涡流，

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{J} = \sigma\mathbf{E}$$

这将使导体内的电密分布成为不均匀和无法事先给定；这是似恒电磁场与恒定磁场的主要区别. 由于时变磁场会产生感应电场，所以似恒电磁场的解答要通过求解涡流方程来得到. 若进一步忽略涡流和集肤效应，则磁感强度 **B** 将满足向量拉普拉斯方程.

（三）波动方程

对于空气或其他非导电介质，$\sigma=0$，传导电流密度 $\mathbf{J}=0$，于是式(5-12)和(5-14)简化为

$$\nabla^2\mathbf{B}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2},\qquad \nabla^2\mathbf{E}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{5-21}$$

这就是波动方程．电磁波在真空和非导电介质中的传播就是从波动方程出发研究的．

5-3 时变电磁场中的电磁位[1—3,6—11]

上节中电磁场方程是用场量 **B** 和 **E** 表述的．本节将引入电磁位 **A** 和 φ，并导出用电磁位来表述时时变电磁场的方程．

（一）电磁位

电磁位 由于 $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$．故与恒定磁场时相类似，在时变电磁场中亦可以定义一个向量磁位 **A**，使

$$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A} \tag{5-22}$$

将上式代入 $\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$，并将 $-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{A}$ 移到等式左边，可得

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$$

由于旋度为零的向量可以表示为一标量 φ 的梯度，于是

$$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\,\mathrm{grad}\varphi$$

或

$$\mathbf{E}=-\,\mathrm{grad}\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{5-23}$$

式中 φ 称为标量电位；**A** 和 φ 二者组成了时变电磁场的电磁位．式(5-23)表示，在时变电磁场中，电场强度由两部分组成，一部分为标量电位 φ 的梯度场，另一部分为磁场变化所引起的感应电场．对于恒定场，**A** 不随时间变化，则 $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi$．

规范变换 从式(5-22)和(5-23)可见，已知磁位 **A** 和电位 φ，则 **B** 和 **E** 就完全确定．但是反过来，已知 **B** 和 **E**，却可能存在多组 **A** 和 φ．例如在式(5-22)中用 $\mathbf{A}'$ 来代替 **A**，使

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}-\mathrm{grad}\,S \tag{5-24}$$

其中 S 为一任意标量函数，则 **B** 将保持不变．同理，从式 (5-23) 可见，若用 φ' 去代替 φ，使

$$\varphi'=\varphi+\frac{\partial S}{\partial t} \tag{5-25}$$

则 **E** 亦将保持不变．这种保持 **B** 值和 **E** 值不变的变换，称为规范变换；S 则称为规范函数．

当 **A** 和 φ 作规范变换时，它所描述的场仍为同一客观电磁场，这种性质称为规范不

变性．由于这种不变性，故用电磁位来表述电磁场时，可以选择适当的规范，使处理简化．

（二）用电磁位表述时的电磁场方程

设介质为各向同性、线性和均匀，对 $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ 这个式子再取一次旋度，对 $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 这个式子取散度，再利用麦克斯韦方程，即可分别得到

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}&=-\mu\mathbf{J}+\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\mathbf{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\\ \nabla^2\varphi&=-\frac{\rho}{\varepsilon}-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}\end{aligned}\right\} \tag{5-26}$$

上式就是给定 $\mathbf{J}$ 和 ρ 时，用电磁位 $\mathbf{A}$ 和 φ 表述的电磁场方程．式(5-26)表明，一般来讲，$\mathbf{A}$ 和 φ 的偏微分方程之间具有耦合．

洛仑兹规范　到目前为止，对 $\mathbf{A}$ 的散度尚未作出规定，因此 $\mathbf{A}$ 还不是唯一的．若令

$$\mathrm{div}\mathbf{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{5-27}$$

则式(5-26)将简化成下状：

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}&=-\mu\mathbf{J}\\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\varepsilon}\end{aligned}\right\} \tag{5-28}$$

式(5-27)的规定称为洛仑兹规范．给定 $\mathbf{J}$ 和 ρ，由式 (5-28) 解出的 $\mathbf{A}$ 和 φ 称为推延电磁位，它在研究电磁波的传播和辐射时经常用到．不难证明，在洛仑兹规范下，规范函数 S_L 应满足齐次波动方程

$$\nabla^2 S_L-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 S_L}{\partial t^2}=0 \tag{5-29}$$

似恒电磁场中 A，φ 的方程　对于似恒场，位移电流忽略不计，于是式(5-27)成为

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=0 \tag{5-30}$$

即洛仑兹规范退化为库伦规范．相应地，式(5-28)将简化为

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J},\qquad \nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5-31}$$

即向量磁位满足向量泊松方程，标量电位满足标量泊松方程．对于恒定场，$\frac{\partial}{\partial t}=0$，导体内的电密一般为均匀分布，故 $\mathbf{J}$ 为已知；对于似恒场，由于涡流和集肤效应，导体内的电密为不均匀，无法预先给定，所以无法用式(5-31)直接求解 $\mathbf{A}$．为解决这一困难，把式(5-31)中的 $\mathbf{J}$ 用 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}=-\sigma\left(\mathrm{grad}\varphi+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)$ 代入，再设空间电荷密度 $\rho=0$，可得

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A}&=\mu\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi+\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\\ \nabla^2\varphi&=0\end{aligned}\right\} \tag{5-32}$$

式(5-32)就是采用库仑规范时，似恒电磁场的 $\mathbf{A}$，φ 方程．

式(5-32)的第一式中，$\mathbf{A}$ 和 φ 尚有一定的耦合．若把 $\mathrm{div}\mathbf{A}$ 规定为

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \mu\sigma\varphi = 0 \tag{5-33}$$

则 **A** 和 φ 将完全解耦；这种规定称为电导率规范. 采用电导率规范并设 $\rho=0$ 时，不难导出

$$\left.\begin{aligned} \nabla\mathbf{A} &= \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \nabla^2\varphi &= \mu\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{5-34}$$

即 **A** 和 φ 分别满足向量和标量涡流方程. 把式(5-34)与式(5-32)相比较，可见 div**A** 的规定不同，A 所满足的方程形式亦不同；换言之，可以选择适当的规范使电磁位的方程和求解简化.

对于正弦电磁场，采用库仑规范时，式(5-32)成为：

$$\left.\begin{aligned} \nabla\dot{\mathbf{A}} &= \mu\sigma\,\mathrm{grad}\dot{\varphi} + j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{A}} \\ \nabla^2\dot{\varphi} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-35}$$

对于二维平行平面场，$\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{k}\dot{A}_z$，$\mathrm{grad}\dot{\varphi}=\mathbf{k}\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial z}$，$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial z}$ 为一复常数，于是可不必求解 $\dot{\varphi}$ 而把式（5-35）写成

$$\frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial y^2} = \mu\dot{J}_\varphi + j\omega\mu\sigma\dot{A}_z \tag{5-36}$$

式中 $\dot{J}_\varphi$ 为标量电位梯度所引起的电密，$\dot{J}_\varphi=\sigma\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial z}=$复常数；$j\omega\sigma\dot{A}_z$ 则是由感应电场所引起的感应电密. 若采用电导率规范，就有

$$\nabla\dot{\mathbf{A}} = j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{A}} \tag{5-37}$$

对于二维平行平面场，上式简化为

$$\frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial y^2} = j\omega\mu\sigma\dot{A}_z \tag{5-38}$$

（三）修改向量磁位 $\mathbf{A}^*$

对于低频场，在一定的条件下，可以用引入修改向量磁位 $\mathbf{A}^*$ 的办法来消去标量电位，以减少变量数. 选择规范函数 S，使 $S=-\int\varphi\,dt$，通过规范变换，可得

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \mathbf{A} - \mathrm{grad}\,S = \mathbf{A} + \int\mathrm{grad}\varphi\,dt \\ \varphi^* &= \varphi + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-39}$$

从上式可见，标量电位已被消去.

用修改向量磁位 $\mathbf{A}^*$ 表示时，磁感强度 **B** 为

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\mathbf{A}^* \tag{5-40}$$

电场强度 **E** 则等于

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\varphi\right) = -\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t} \tag{5-41}$$

下面进一步导出 $\mathbf{A}^*$ 所满足的微分方程.

把 $\mathbf{A}^*$ 代入 $\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{A}\right)=\mathbf{J}=-\sigma\left(\mathrm{grad}\varphi+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$，可得

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{A}^*\right)=-\sigma\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \tag{5-42}$$

当 μ=常值 时，上式可简化成

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A}^*=-\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \tag{5-43}$$

进一步规定 $\mathbf{A}^*$ 的散度，使

$$\mathrm{div}\mathbf{A}^*=0 \tag{5-44}$$

即采用库仑规范，就有

$$\nabla^2\mathbf{A}^*=\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \tag{5-45}$$

式(5-45)说明，修改向量磁位 $\mathbf{A}^*$ 满足涡流方程.

对于低频场，引入 $\mathbf{A}^*$ 后，电流连续性定律可表示为

$$\mathrm{div}\mathbf{J}=\mathrm{div}\sigma\mathbf{E}=\sigma\mathrm{div}\mathbf{E}+\mathrm{grad}\sigma\cdot\mathbf{E}$$

$$=-\sigma\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}^*+\mathrm{grad}\sigma\cdot\mathbf{E}=0 \tag{5-46}$$

在库仑规范下，$\mathrm{div}\mathbf{A}^*=0$，所以要求

$$\mathrm{grad}\,\sigma\cdot\mathbf{E}=0 \tag{5-47}$$

当整个求解域内的电导率 σ 为均匀时，$\mathrm{grad}\,\sigma=0$，上式自然满足；当 σ 为非均匀，或在两个导电区的交界面处，上式要求在电场强度 $\mathbf{E}$ 的方向上，$\mathrm{grad}\sigma$ 的分量为 0. 这就是引入 $\mathbf{A}^*$ 以消去标量电位的条件.

（四）电磁位的另一种选择

除了 $\mathbf{A}$，φ 这对位函数之外，电磁位亦可以有其他的选择. 例如，对低频场的情况，位移电流可以忽略不计，此时从 $\mathrm{div}\mathbf{J}=0$ 出发，可以定义一个向量电位 $\mathbf{T}$，使

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{T}=\mathbf{J} \tag{5-48}$$

把上式代入 $\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}$，可得

$$\mathrm{rot}(\mathbf{H}-\mathbf{T})=0$$

于是

$$\mathbf{H}-\mathbf{T}=-\mathrm{grad}\Omega$$

或

$$\mathbf{H}=\mathbf{T}-\mathrm{grad}\Omega \tag{5-49}$$

式中 Ω 为标量磁位；$\mathbf{T}$ 和 Ω 就组成了另一对电磁位. 式(5-49)说明，用 $\mathbf{T}$，Ω 表示时，总磁场强度 $\mathbf{H}$ 由二部分组成，一部分是由电流密度 $\mathbf{J}$（包括源电流密度和感应电流密度）所产生的磁场强度，即向量电位 $\mathbf{T}$，它是 $\mathbf{H}$ 中的有旋部分；另一部分则是标量磁位 Ω 所形成的磁场强度 $-\mathrm{grad}\Omega$，它是 $\mathbf{H}$ 中的无旋部分.

下面导出 $\mathbf{T}$，Ω 所满足的微分方程.

从 $\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 出发，考虑到 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，可得

$$\mathrm{rot}\frac{\mathbf{J}}{\sigma}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{T}-\mathrm{grad}\Omega)$$

再把 $\mathbf{J}=\mathrm{rot}\mathbf{T}$ 代入上式，有

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\mathbf{T}\right)=-\mu\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t}+\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\Omega \tag{5-50}$$

另外，从 $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ 出发，可得

$$\mathrm{div}\mu(\mathbf{T}-\mathrm{grad}\Omega)=0$$

或

$$\mathrm{div}\mu\mathbf{T}=\mathrm{div}(\mu\,\mathrm{grad}\Omega) \tag{5-51}$$

式（5-50）和（5-51）就是电磁位 $\mathbf{T}$，Ω 的微分方程．若介质为各向同性、线性，μ=常值，σ=常值，则式（5-50）和（5-51）可简化为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{T}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t}+\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\Omega,\\ \nabla^2\Omega=\mathrm{div}\mathbf{T}\end{aligned}\right\} \tag{5-52}$$

到目前为止，对 $\mathbf{T}$ 的散度尚未作出规定．如进一步规定 $\mathrm{div}\,\mathbf{T}=0$，则式（5-52）可进一步写成

$$\left.\begin{aligned}\text{✡}\mathbf{T}=\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t}-\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\Omega,\\ \nabla^2\Omega=0\end{aligned}\right\} \tag{5-53}$$

采用 $\mathbf{T}$，Ω 作为位函数时，在导电区以外，$\mathbf{T}$ 可以选为 0．这样，对于导电区仅占总求解域中很小部分的一些实际问题，在导电区中用 $\mathbf{T}$，Ω，非导电区中仅有 Ω，使总变量数、所需计算机内存和计算时间显著减少．这是采用 $\mathbf{T}$，Ω 表述的一个优点．

5-4 时变电磁场的边界条件[2—5]

本节分别说明用场量和电磁位表示时，时变电磁场的边界条件．

（一）用场量表示时电磁场的边界条件

根据磁通连续定律 $\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$ 可知，交界面两侧磁感强度的法向分量应当连续；即

$$B_{1n}=B_{2n}\qquad\text{或}\qquad\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)=0 \tag{5-54}$$

根据推广的安培环路定律 $\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int\left(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$ 可知，交界面两侧磁场强度切向分量之差应当等于交界面上传导电流的电负荷值；即

$$H_{1t}-H_{2t}=K$$

或

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=\mathbf{K} \tag{5-55}$$

换言之，有关磁场的二个边界条件形式上与恒定磁场时相同．

下面导出电场的边界条件．

在边界面两侧作一小扁回路，如图 5-2 所示．根据法拉第定律 $\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$

可得

$$(E_{1t}-E_{2t})\Delta l=-\frac{\partial B}{\partial t}\Delta l\cdot\delta$$

式中 Δl 和 δ 分别表示回路的长度和宽度. 由于$\frac{\partial B}{\partial t}$为有限值，故当回路宽度 $\delta\to 0$ 时，$\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\partial B}{\partial t}\Delta l\cdot\delta=0$，于是

$$E_{1t}=E_{2t}\qquad 或\quad \mathbf{n}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0 \tag{5-56}$$

即在交界面两侧，电场强度的切向分量连续.

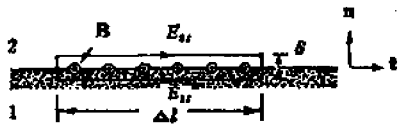


图 5-2 $E_{1t}=E_{2t}$的证明

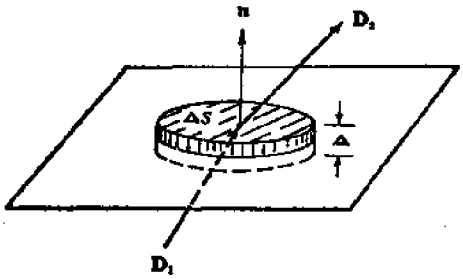


图 5-3 $D_{1n}-D_{2n}=\omega$的证明

类似地，穿过边界面作小扁匣，如图 5-3 所示. 根据高斯定律 $\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=Q$ 可知，

$$(D_{1n}-D_{2n})\Delta S=\rho\Delta S\cdot\Delta$$

式中 ΔS 为扁匣的表面积，Δ 为厚度；ρ 为体电荷密度. 当扁匣厚度 $\Delta\to 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta\to 0}\rho\Delta=\omega$，于是

$$D_{1n}-D_{2n}=\omega\qquad 或\quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)=\omega \tag{5-57}$$

式中 ω 为面电荷密度. 式(5-57)表示，在交界面两侧，电位移的法向分量之差等于交界面上的面电荷密度值.

对于低频似恒场，位移电流可忽略不计，因此电位移的边界条件不再有用，而应改用电流密度的边界条件.

根据电流连续性定律可知，对于似恒场，$\oint\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=0$；由此可以导出，在交界面两侧，电流密度的法向分量应当连续；即

$$J_{1n}=J_{2n}\qquad 或\quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_1-\mathbf{J}_2)=0 \tag{5-58}$$

上面这四个式子就是用场量表示时，低频电磁场的边界条件；即

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)=0,\qquad \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=\mathbf{K}\\&\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0,\qquad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_1-\mathbf{J}_2)=0\end{aligned}\right\} \tag{5-59}$$

由于 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$，所以式(5-59)中的上面两个式子分别规定了交界面两侧磁场的法向分量间和切向分量间的关系；下面两个式子则规定了电场的法向分量间和切向分量间的关系.

（二）用电磁位表示时电磁场的边界条件

A，φ表述 用A，φ表示电磁位时，根据磁通连续性定律可以导出，在交界面两侧，向量磁位的切向分量应当连续（见第一章第1-6节）；即

$$\mathbf{A}_{1t}=\mathbf{A}_{2t} \quad 或 \quad \mathbf{n}\times(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2)=0 \tag{5-60}$$

另外，如果规定divA=0，即采用库仑规范，可以导出向量磁位的法向分量应当连续；即

$$\mathbf{A}_{1n}=\mathbf{A}_{2n} \quad 或 \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2)=0 \tag{5-61}$$

把式(5-60)和(5-61)结合在一起，就有

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2 \tag{5-62}$$

上式表示，在交界面两侧，向量磁位保持连续. 式(5-62)既反映了磁通连续性定律，又反映了库仑规范.

其次，从交界面两侧磁场强度切向分量之间的关系可得

$$\mathbf{n}\times\frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\mathbf{A}_1)-\mathbf{n}\times\frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\mathbf{A}_2)=\mathbf{K} \tag{5-63}$$

再说明标量电位的边界条件.

从$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0$出发，考虑到$\mathbf{E}=\left(-\mathrm{grad}\varphi+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)$，可得

$$\mathbf{n}\times\left[\left(\mathrm{grad}\varphi_1+\frac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial t}\right)-\left(\mathrm{grad}\varphi_2+\frac{\partial\mathbf{A}_2}{\partial t}\right)\right]=0$$

由于$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$，于是有

$$\mathbf{n}\times(\mathrm{grad}\varphi_1-\mathrm{grad}\varphi_2)=0 \tag{5-64}$$

即在交界面两侧，标量电位梯度的切向分量应连续.

另外，从式(5-58)发发，考虑到$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$，有

$$\mathbf{n}\cdot\sigma_1\left(\mathrm{grad}\varphi_1+\frac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial t}\right)-\mathbf{n}\cdot\sigma_2\left(\mathrm{grad}\varphi_2+\frac{\partial\mathbf{A}_2}{\partial t}\right)=0$$

或

$$\mathbf{n}\cdot(\sigma_1\mathrm{grad}\varphi_1-\sigma_2\mathrm{grad}\varphi_2)=\mathbf{n}\cdot\left(\frac{\sigma_2\partial\mathbf{A}_2}{\partial t}-\sigma_1\frac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial t}\right) \tag{5-65}$$

其中$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$. 式(5-62)—(5-65)这四个式子就是采用库仑规范时，电磁位A，φ的边界条件.

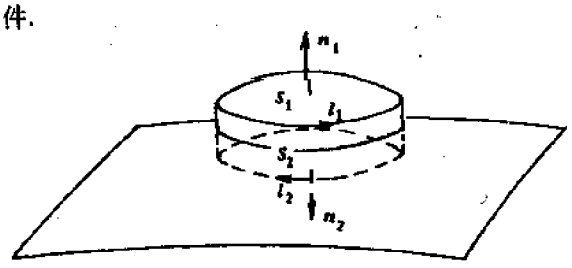


图 5-4 $\mathbf{T}_{1t}=\mathbf{T}_{2t}$的证明

T，Ω表述 把电流连续性定律应用到穿过交界面的小扁平圆柱体（图5-4），当圆柱体的高度趋于零时，有

$$\int_{S_1}\mathbf{J}_1\cdot d\mathbf{S}_1+\int_{S_2}\mathbf{J}_2\cdot d\mathbf{S}_2=0$$

式中S_1和S_2分别表示圆柱的上、下底面. 再利用$\mathbf{J}=\mathrm{rot}\,\mathbf{T}$和斯托克斯定理，上式可改写成

$$\oint_{l_1}\mathbf{T}_1\cdot d\mathbf{l}_1+\oint_{l_2}\mathbf{T}_2\cdot d\mathbf{l}_2=0 \tag{5-66}$$

考虑到 l_1 和 l_2 长度相同、循行方向相反，由式(5-66)可得

$$\mathbf{T}_{1t} = \mathbf{T}_{2t} \tag{5-67}$$

当采用库仑规范时，divT=0，由此可以导出，边界面两侧向量电位的法向分量连续；即

$$T_{1n} = T_{2n} \tag{5-68}$$

把式(5-67)和(5-68)结合在一起，有

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 \tag{5-69}$$

另外，根据交界面两侧电场强度的切向分量为连续，可知

$$\frac{1}{\sigma_1}(\nabla \times \mathbf{T}_1) \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sigma_2}(\nabla \times \mathbf{T}_2) \times \mathbf{n} \tag{5-70}$$

式(5-69)、(5-70)就是 T 的边界条件.

再看 Ω 的边界条件.

根据交界面两侧磁感强度的法向分量为连续这一条件，可知

$$\mu_1\left(T_{1n} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial n}\right) = \mu_2\left(T_{2n} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial n}\right) \tag{5-71}$$

或

$$\mu_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} = \mu_1 T_{1n} - \mu_2 T_{2n} \tag{5-72}$$

根据交界面两侧磁场强度切向分量之间的关系，可知

$$\mathbf{n} \times [(\mathbf{T}_1 - \nabla \Omega_1) - (\mathbf{T}_2 - \nabla \Omega_2)] = \mathbf{K} \tag{5-73}$$

考虑到 $T_{1t}=T_{2t}$，就有

$$\mathbf{n} \times (\nabla \Omega_2 - \nabla \Omega_1) = \mathbf{K} \tag{5-74}$$

或

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} = K \tag{5-75}$$

由此

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \int_0^P K dt \tag{5-76}$$

式中 0 点为 Ω 的参考点，P 为分界面上的任意点. 当电负荷 $K=0$ 时，式(5-75)和(5-76)就简化为

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \tag{5-77}$$

或

$$\Omega_1 = \Omega_2 \tag{5-78}$$

5-5 似恒电磁场解答的唯一性[5,12]

对似恒电磁场，若求解域内的介质为线性、均匀，即 μ=常值，σ=常值，则磁感强度 B 将满足

$$\text{rot rot}\mathbf{B} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5-79}$$

若 $\mathbf{B}$ 随时间正弦变化，$\mathbf{B}=\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{B}}e^{j\omega t})$，上式可改写成

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{B}}=-\ j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{B}} \tag{5-80}$$

可以证明（见附录 A），对于稳态正弦电磁场，若在求解域的边界上给定 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{H}}$，即给定磁场强度的切向分量 $\dot{\mathbf{H}}_t$，则 $\dot{\mathbf{B}}$ 的解答就是唯一的. 对于瞬态问题，除给定边值 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 外，还要给出 $t=0$ 时求解域内各点磁场强度的初值 $\mathbf{H}_0$，$\mathbf{B}$ 的解答才是唯一的.

对于电磁位 $\mathbf{A}$ 和 φ，采用库仑规范时，$\mathrm{div}\mathbf{A}=0$，此时将有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A}&=-\ \mu\sigma\left(\mathrm{grad}\varphi+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)\\ \nabla^2\varphi&=0\end{aligned}\right\} \tag{5-81}$$

若 $\mathbf{A}$ 和 φ 均随时间正弦变化，$\mathbf{A}=\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{A}}e^{j\omega t})$，$\varphi=\mathrm{Re}(\dot{\varphi}e^{j\omega t})$，上式可改写为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{A}}&=-\ \mu\sigma(\mathrm{grad}\dot{\varphi}+\ j\omega\dot{\mathbf{A}})\\ \nabla^2\dot{\varphi}&=0\end{aligned}\right\} \tag{5-82}$$

可以证明（见附录 A），对稳态正弦电磁场，为使标量电位 $\dot{\varphi}$ 的解为唯一，既可以在边界上给定电位值 $\dot{\Phi}$，亦可以给定向量磁位的法向分量 $\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{A}}$. 磁场的边值有两种给法，一种是给定边界上磁场强度的切向分量 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{H}}$（即 $\dot{\mathbf{H}}_t$），此时由式（5-82）解得的向量磁位 $\dot{\mathbf{A}}$、磁感强度 $\dot{\mathbf{B}}$ 均为唯一. 另一种是给定边界上向量磁位的切向分量 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}$（即 $\dot{\mathbf{A}}_t$），此时从数学角度看，$\dot{\mathbf{A}}$ 和 $\dot{\mathbf{B}}$ 的解答亦均为唯一；但从物理上看，由于 $\dot{\mathbf{A}}$ 为一计算量，因此很难断定所给的边值 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}$ 是否正确. 为此，在解出 $\dot{\mathbf{A}}$，$\dot{\varphi}$ 以后，应通过 $\dot{\mathbf{J}}=-\sigma(\mathrm{grad}\ \dot{\varphi}+j\omega\dot{\mathbf{A}})$ 进一步算出导电区内的 $\int_V\dot{\mathbf{J}}\cdot dV$ 值，并与原先给定的值核对（对于二维情况，就是核对算出的 $\int_S\dot{\mathbf{J}}\cdot d\mathbf{S}$ 值是否等于导体内给定的电流值）. 如果算出的 $\int_V\dot{\mathbf{J}}\cdot dV$ 值与给定的值不符，就要重新调整边值 $\dot{\mathbf{A}}_t$，再次求解，直到相符为止. 对于瞬态场，除边界条件外，还要给定 $t=0$ 时的初始条件.

5-6 电磁场的能量及其转化[1,4,13]

（一）坡印亭定理和能流向量

由向量分析可知，

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

把 $\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ 和 $\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ 代入上式，可得

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\ \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$$

再考虑到 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{J}}{\sigma}-\mathbf{E}^{(e)}$，于是

$$-\ \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\frac{\mathbf{J}^2}{\sigma}-\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}^{(e)}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) \tag{5-83}$$

把上式在空间任意体积 V 内进行体积分，并考虑到

$$\int_V \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dV = \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$$

式中 S 为包围 V 的曲面；则式(5-83)可进一步改写成

$$-\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma}dV - \int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}^{(e)}dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)dV \tag{5-84}$$

不难看出，上式中右端第一项就表示传导电流所产生的电阻损耗；第二项表示为克服局外电场 $\mathbf{E}^{(e)}$ 所消耗的功率；第三项表示体积 V 内电磁场储能随时间的增长率；左端项

$$-\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \Pi\cdot d\mathbf{S} \tag{5-85}$$

则代表每秒进入 S 面内的电磁能流（负号表示能流方向与 S 面的法线方向相反，即为进入 S 面的能流）；Π 称为坡印亭能流向量[①]

$$\Pi = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{5-86}$$

其含义为通过单位面积的电磁功率流，它表征了电磁能在空间的传递. 式(5-84)说明，进入 S 面的电磁功率流，部分消耗于传导电流所产生的电阻损耗，部分消耗于克服局外电场所需的功率，部分用于增加 V 内电磁场的储能. 式(5-84)这个电磁场中的能量关系称为坡印亭定理.

若 S 面内包含一个网络，如图 5-5 所示，则

$$-\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = u_1 i_1 + u_2 i_2 + \cdots = \sum_1^n u_k i_k \tag{5-87}$$

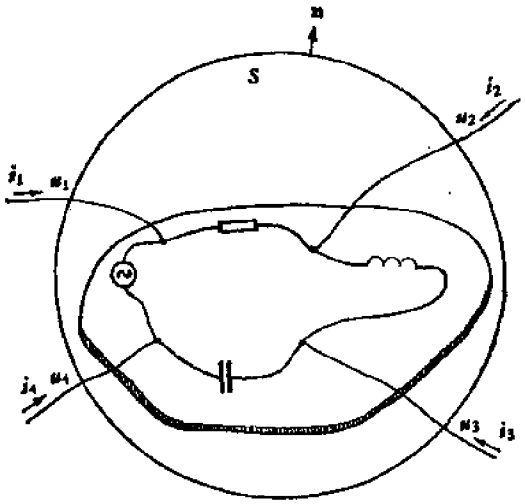


图 5-5　S 面内包含一个网络时

① 除坡印亭向量外，能流向量还可以有其他的表达形式；例如斯连潘(Slepian)向量 $\mathbf{S}_L$ 就是其中之一，$\mathbf{S}_L = \varphi\left(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) + \mathbf{H}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$，$\mathbf{S}_L \neq \Pi$，但 $\oint_S \mathbf{S}_L\cdot d\mathbf{S} = \oint_S \Pi\cdot d\mathbf{S}$.

式中 u_k 为第 k 个电路通过 S 面时，交点 k 与某固定点之间的电压.

（二）复玻印亭定理和复能流向量

对于随时间作正弦变化的时变电磁场，场向量可以用复量来表示，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z,t)&=\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{E}}\,e^{j\omega t})=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{E}}\,e^{j\omega t}+\dot{\mathbf{E}}^{*}e^{-j\omega t})\\ \mathbf{H}(x,y,z,t)&=\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{H}}\,e^{j\omega t})=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}}\,e^{j\omega t}+\dot{\mathbf{H}}^{*}e^{-j\omega t})\end{aligned}\right\}\tag{5-88}$$

式中 $\dot{\mathbf{E}}$ 和 $\dot{\mathbf{H}}$ 既是向量，又是相量，$\dot{\mathbf{E}}^{*}$ 和 $\dot{\mathbf{H}}^{*}$ 是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的共轭相量. 于是玻印亭向量的瞬时值为

$$\begin{aligned}\Pi(x,y,z,t)&=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\frac{1}{4}(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^{*}+\dot{\mathbf{E}}^{*}\times\dot{\mathbf{H}})+\frac{1}{4}(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}\,e^{j2\omega t}\\&\quad+\dot{\mathbf{E}}^{*}\times\dot{\mathbf{H}}^{*}e^{-j2\omega t})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^{*})+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}\,e^{j2\omega t})\end{aligned}\tag{5-89}$$

式中第一项为玻印亭向量在一个周波内的平均值；第二项为角频率等于 2ω 的正弦向量. 仿照电路中复数功率的概念，引入复能流向量 $\dot{\Pi}$，

$$\dot{\Pi}=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^{*})\tag{5-90}$$

$\dot{\Pi}$ 的实部等于能流向量 Π 的平均值，虚部代表对应点上无功功率的面密度. 由此即可导出复数形式的玻印亭定理.

根据向量分析，

$$\mathrm{div}(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^{*})=\dot{\mathbf{H}}^{*}\,\mathrm{rot}\mathbf{E}-\dot{\mathbf{E}}\cdot\mathrm{rot}\dot{\mathbf{H}}^{*}$$

把 $\mathrm{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\dot{\mathbf{B}}$，$\mathrm{rot}\dot{\mathbf{H}}^{*}=\dot{\mathbf{j}}^{*}-j\omega\dot{\mathbf{D}}^{*}$ 和 $\dot{\mathbf{E}}=\frac{\dot{\mathbf{j}}}{\sigma}-\dot{\mathbf{E}}^{(e)}$ 代入上式，可得

$$-\mathrm{div}\,\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^{*})=\frac{1}{2}\frac{\mathbf{J}^{2}}{\sigma}-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}^{(e)}\cdot\dot{\mathbf{j}}^{*}+\frac{1}{2}j\omega(\dot{\mathbf{H}}^{*}\cdot\dot{\mathbf{B}}-\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{D}}^{*})\tag{5-91}$$

这就是复玻印亭定理的微分形式. 对上式进行体积分，并用高斯定理把左端项从体积分化成面积分，可得

$$-\oint_{S}\dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{2}\int_{V}\frac{\mathbf{J}^{2}}{\sigma}dV-\frac{1}{2}\int_{V}\dot{\mathbf{E}}^{(e)}\cdot\dot{\mathbf{j}}^{*}dV+\frac{1}{2}j\omega\int_{V}(\dot{\mathbf{H}}^{*}\cdot\dot{\mathbf{B}}-\dot{\mathbf{H}}\cdot\dot{\mathbf{D}}^{*})dV\tag{5-92}$$

这就是复玻印亭定理的表达式.

把式(5-92)分成实部和虚部两个式子，可得

$$\left.\begin{aligned}-\mathrm{Re}\oint_{S}\dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}&=\frac{1}{2}\int_{V}\frac{\mathbf{J}^{2}}{\sigma}dV-\mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\int_{V}\dot{\mathbf{E}}^{(e)}\cdot\dot{\mathbf{j}}^{*}dV\\-\mathrm{Im}\oint_{S}\dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}&=2\omega(W_{m}-W_{e})-\mathrm{Im}\,\frac{1}{2}\int_{V}\dot{\mathbf{E}}^{(e)}\cdot\dot{\mathbf{j}}^{*}dV\end{aligned}\right\}\tag{5-93}$$

式中 $-\mathrm{Re}\oint_{S}\dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}$ 和 $-\mathrm{Im}\oint_{S}\dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}$ 分别表示进入 S 面的有功和无功功率，用 P、Q 表示；$-\mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\int_{V}\dot{\mathbf{E}}^{(e)}\cdot\dot{\mathbf{j}}^{*}dV$ 和 $-\mathrm{Im}\,\frac{1}{2}\int_{V}\dot{\mathbf{E}}^{(e)}\cdot\dot{\mathbf{j}}^{*}dV$ 表示为克服 V 内的局外电场所需的有功和

无功功率，用 $P^{(e)}$、$Q^{(e)}$ 表示；$\frac{1}{2}\int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma}dV$ 表示传导电流在 V 内的电阻损耗，用 p_R 表示；W_m 和 W_e 分别表示 V 内的磁场和电场储能，$W_m=\frac{1}{4}\int_V \dot{\mathbf{H}}^*\cdot\dot{\mathbf{B}}\,dV$，$W_e=\frac{1}{4}\int_V \dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{D}}^*dV$. 于是式(5-93)可以改写成

$$\left.\begin{aligned}-\mathrm{Re}\oint_S \dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}&=P=p_R+P^{(e)}\\ -\mathrm{Im}\oint_S \dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}&=Q=2\omega(W_m-W_e)+Q^{(e)}\end{aligned}\right\}\tag{5-94}$$

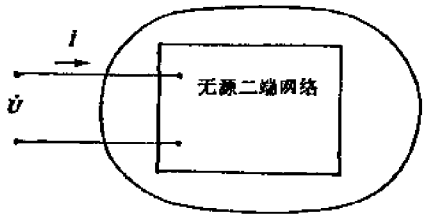


图 5-6　无源二端网络的输入电阻和电抗

若 S 面内的电磁系统为无源（即 $P^{(e)}=0$，$Q^{(e)}=0$），且可用一个二端网络来表示，如图 5-6 所示，则网络的输入电阻 R_i 和输入电抗 X_i 应为：

$$\left.\begin{aligned}R_i&=\frac{2P}{I_m^2}=\frac{-2\mathrm{Re}\oint_S \dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}}{I_m^2}\\ X_i&=\frac{4\omega(W_m-W_e)}{I_m^2}=\frac{-2\mathrm{Im}\oint_S \dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}}{I_m^2}\end{aligned}\right\}\tag{5-95}$$

式中 I_m 为正弦电流的幅值.

5-7　小　　结

麦克斯韦方程是安培环路定律、法拉第电磁感应定律和高斯定律的扩展，它是电磁场理论的基础. 麦克斯韦方程与介质的成分方程合在一起，组成了电磁场的完整方程组.

由于电源的频率较低，所以电机内的电磁场属于低频场，此时位移电流可以略去不计，成为似恒场. 似恒场的特点是，给定电密的分布，就可以用计算恒定磁场同样的办法来计算似恒磁场的分布；它与恒定场的差别在于，由于磁场变化引起的感应电场和感应电流，使导体内形成不均匀的电密分布和集肤效应. 因此总体来看，似恒场中磁场、电场和电密的分布仍然需要求解涡流方程才能确定.

在求解电磁场问题时，为便于计算，常常引入电磁位. 对似恒电磁场，常用的电磁位有 $\mathbf{A}$、φ 和 $\mathbf{T}$、Ω 两对，常用的规范有库仑规范和洛伦兹规范. 通过规范变换和对向量位 $\mathbf{A}$（或 $\mathbf{T}$）的散度作出适当的规定，可以使 $\mathbf{A}$、φ（或 $\mathbf{T}$、Ω）所满足的方程解耦并简化. 但应注意，引入电磁位只是一种手段，一般来说并不具有实际的物理意义；所以由电磁

位表述的方程所求得的解答，其正确性一方面要由电磁位边值问题本身的唯一性来检验；另外还要以由它们所确定的基本场量（**B**，**H**，**E** 和 **J**）的唯一性和是否满足给定的物理约束来确定.

对 **A**、φ这对电磁位，一般可以认为，**A** 主要由导体内的传导电密和边界影响所引起；φ则是由外施电压、导体的表面电荷和边界影响等因数所引起. 交界面处是否出现面电荷，取决于$\nabla\sigma\cdot\mathbf{E}$是否为零. 若$\nabla\sigma\cdot\mathbf{E}=0$，则可引入修正向量磁位 $\mathbf{A}^*$以使$\varphi^*=0$；此时从形式上看，标量电位被消去，但实质上 $\mathbf{A}^*$中已隐含了标量电位的作用.

标量电位的处理，在似恒电磁场中是一个重要而经常被忽视的问题. 标量电位一方面可以调节各个导体内的电密分布，以使各个导体内的$\int_V \mathbf{J}dV$（三维问题）和$\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$（二维问题）符合给定的实际值；同时能调整交界面处的电场强度和电流密度以满足交界面条件.

似恒电磁场的基本边界条件是对 **B**、**H**、**E** 和 **J** 四个实际场量导出的. 对于电磁位 **A**、φ和 **T**、Ω，由于规范变化和对 div**A** 或 div**T** 作出的不同规定，边界条件的表达式将发生相应的变化. 因此用电磁位表达时，必须注意边界条件是在哪种规范下导出的，否则可能出错. 边界条件的正确给定是十分重要的，否则边值问题就得不到唯一解或正确解. 对于三维电磁场，一般来说，需要同时给出 $\mathbf{A}_t$ 和 φ的边值；对于二维场，则仅需给出 A_z 的边值. 由于电磁位是一些计算量，所以对三维问题，除了一些几何形状和场图为对称以及 $\mu_{Fe}=\infty$或 $\sigma=\infty$的情况外，一般来讲，**A** 和 φ的边值常常较难给定. 为此有时需要利用已知的物理约束对边值进行多次调整.

最后，本章阐明了能流向量和电磁场中能量的传递. 和电磁位的情况相类似，能流向量亦不是唯一的；但是无论如何选择，能流向量在同一闭合曲面内的面积分值都应相同. 常用的能流向量是玻印亭向量，它在研究电机气隙中能量的流传以及计及涡流效应时参数的计算等问题中常常用到.

参 考 文 献

[1] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941.

[2] W. R. Smythe, Static and Dynamic Electricity, McGraw-Hill, 1950.

[3] K. Simonyi, Theoretische Electrotechnik, VEB Deutscher Verlag, 1956.

[4] R. M. Fano, L. J. Chu and R. B. Adler, Electromagnetic Fields, Energy and Forces, John Wiley & Sons, 1960.

[5] R. L. Stoll, The Analysis of Eddy Current, Clarendon Press, 1974.

[6] M. S. Sarma, Potential Functions in Electromagnetic Field Problems, IEEE Trans. on Magnetics, No. 3, 1970.

[7] C. J. Carpenter, Comparison of Alternative Formulation of 3-D Magnetic Field and Eddy Current Problems at Power Frequencies, Proc. IEE, No. 11, 1977.

[8] P. Hammond, Use of Potentials in the Calculation of Electromagnetic Fields, Proc. IEE, No. 2, 1982.

[9] T. Morisue, Magnetic Vector Potential and Electric Scalar Potential in 3D Problems, IEEE Trans. on Magnetics, No. 2, 1982.

[10] 谢德馨、宋志明、徐子宏，三维涡流计算中的矢量磁位与标量电位，沈阳工业大学学报，1989，No. 2.

[11] 许善椿，关于电磁场位函数的数学模型，大电机技术，1986.

[12] 陈伟华，三维正弦涡流场方程解答的唯一性，哈尔滨电工学院学报，1984，No. 2.

[13] J. Slepian, Energy Flow in Electric System, The VI Energy Flow Postulate, AIEE Trans., 1942.

第六章　正弦电磁场的解析解法

交流电机中的许多电磁场问题，例如铁心内的涡流损耗，槽内导体的电流集肤效应，实心转子感应电机内的涡流和参数等，都属于随时间作正弦变化的正弦电磁场问题. 本章主要研究静止导电介质中正弦电磁场的解法，研究时先设 μ_{Fe}=常值，然后考虑磁饱和的影响.

对导电介质，在工频情况下，位移电流可以略去不计，此时电磁场为似恒场并满足涡流方程. 用分离变量法求解涡流方程，并考虑到$\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$，再用给定的边界条件确定解答中的任意常数，即可得到具体问题的解答.

下面先从一维情况开始研究，然后进一步研究二维和三维情况.

6-1　半无限大导体内的正弦电磁场[1]

这是一种理想的最简单的情况. 设导体为半无限大，x 轴与导体表面垂直，y 轴与导体表面重合，如图 6-1 所示. 在导体内部磁感强度 **B** 仅有 y 分量，电场强度 **E** 仅有 z 分量，且 B_y 和 E_z 只随坐标 x 变化；即

$$\mathbf{B}=\mathrm{j}B_y(x),\quad \mathbf{E}=\mathbf{k}E_z(x)$$

此时涡流方程将简化为一维的标量方程：

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}=\mu\sigma\frac{\partial B_y}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu\sigma\frac{\partial E_z}{\partial t}\qquad (6\text{-}1)$$

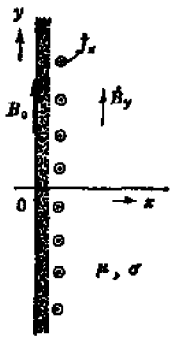


图 6-1　半无限大的导体

（一）导体内电磁场的分布

磁场分布　设正弦稳态下 B_y 的解答为

$$B_y=\mathrm{Re}[\dot{B}_y e^{j\omega t}]\qquad (6\text{-}2)$$

式中 $\dot{B}_y$ 为随 x 变化的相量. 把式(6-2)代入式(6-1)，可得

$$\frac{\partial^2 \dot{B}_y}{\partial x^2}=j\omega\mu\sigma\dot{B}_y=p^2\dot{B}_y\qquad (6\text{-}3)$$

上式的解答为

$$\dot{B}_y=\dot{A}_1e^{-px}+\dot{A}_2e^{px}\qquad (6\text{-}4)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}p&=\sqrt{j\omega\mu\sigma}=(1+j)k=\frac{1+j}{\Delta}\\ \Delta&=\frac{1}{k}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}5)$$

k 是电磁场的衰减因数；Δ 是透入深度；$\dot{A}_1$、$\dot{A}_2$ 为任意常数，可根据边界条件确定.

由于 $x\to\infty$ 时，$\dot{B}_y$ 为有限，故 $\dot{A}_2=0$. 设在导体表面处，$\dot{B}_{y(x=0)}=B_0$，则 $\dot{A}_1=B_0$. 于是式(6-4)可改写成

$$\dot{B}_y = B_0 e^{-\beta x} = B_0 e^{-(1+j)\frac{x}{\Delta}} \tag{6-6}$$

则

$$B_y = \mathrm{Re}[\dot{B}_y e^{j\omega t}] = B_0 e^{-\frac{x}{\Delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\Delta}\right) \tag{6-7}$$

图 6-2 表示不同瞬间磁感强度的分布情况.

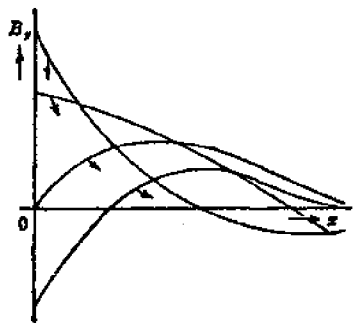


图 6-2　不同瞬间磁感强度的分布

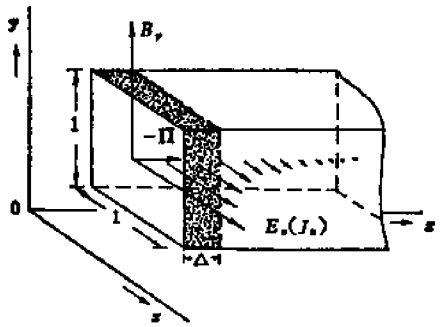


图 6-3　通过 1 米高度内的电流

电密分布　根据 rot**H**=**J** 并考虑到电密 **J** 只有 z 分量，可知

$$\dot{J}_z = \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = -\frac{B_0}{\mu}\frac{(1+j)}{\Delta} e^{-(1+j)\frac{x}{\Delta}}$$

$$= -J_0 e^{-\frac{x}{\Delta}} e^{-j\left(\frac{x}{\Delta}-45°\right)} \tag{6-8}$$

式中 J_0 为导体表面处的电流密度，$J_0=\dfrac{\sqrt{2}B_0}{\mu\Delta}$；而

$$J_z = \mathrm{Re}[\dot{J}_z e^{j\omega t}] = -J_0 e^{-\frac{x}{\Delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\Delta} + 45°\right) \tag{6-9}$$

通过单位高度、x 从 0→∞这样一层导体中的电流 $\dot{I}_m$ 应为（图 6-3）

$$\dot{I}_m = \int_0^\infty \dot{J}_z\, dx = -\int_0^\infty J_0 e^{-(1+j)\frac{x}{\Delta}} e^{j45°} dx$$

$$= -\frac{J_0 e^{j45°}}{(1+j)\frac{1}{\Delta}} = -\frac{J_0\Delta}{\sqrt{2}} \tag{6-10}$$

所以

$$i = -\frac{J_0\Delta}{\sqrt{2}}\cos\omega t = -I_m\cos\omega t \tag{6-11}$$

式中 $I_m=\dfrac{J_0\Delta}{\sqrt{2}}$. 注意，此处 I_m、J_0 等均为幅值.

透入深度　透入深度是指磁感强度(或电场强度)从导体的表面值 B_0 衰减到 $0.368B_0$ 处(即衰减到表面值的 e^{-1})的深度. 从式(6-5)可见，

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \qquad (6\text{-}12)$$

所以频率愈高、μ 和 σ 愈大时，透入深度将愈小. 对于铜

$$\Delta_{Cu} \approx \frac{6.62}{\sqrt{f}} \text{ cm}$$

图 6-4 表示铜和铝的透入深度随频率的变化情况. 引入透入深度的概念，可使损耗、有效电阻和电抗的计算得到一定的简化.

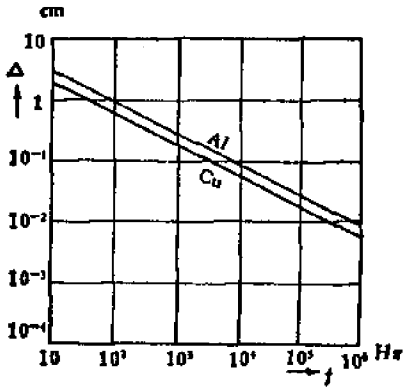


图 6-4 铜和铝的透入深度 Δ_{Cu}、$\Delta_{Al}=f(f)$

（二）涡流损耗和内阻抗

涡流损耗 由于 E_z 和 H_y 互相垂直，所以能流向量 Π 应与 x 轴平行. 进入导体表面处每单位面积的有功电磁功率 P 应为

$$P = -\operatorname{Re}\frac{1}{2}(\dot{E}_z\dot{H}_y^*)_{x=0} = \operatorname{Re}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma}J_0 e^{-\frac{x}{\Delta}} e^{-j\left(\frac{x}{\Delta}-45°\right)} \cdot \frac{B_0}{\mu}e^{-(1-j)\frac{x}{\Delta}}\right]_{x=0}$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{2}\rho J_0 e^{j45°}\frac{B_0}{\mu} = \frac{1}{4}\rho J_0^2\Delta \qquad (6\text{-}13)$$

式中 ρ 为导体的电阻率，$\rho=\frac{1}{\sigma}$. 由于没有局外电场，故 P 将全部消耗于涡流损耗.

涡流损耗亦可以从传导电流所产生的焦耳损耗直接求出. 对于单位面积、深度从 $x=0\to\infty$ 这一体积，焦耳损耗 p_R 应为

$$p_R = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_z^2}{\sigma}dx = \frac{1}{2}\rho\int_0^\infty (J_0 e^{-\frac{x}{\Delta}})^2 dx = \frac{1}{4}\rho J_0^2\Delta$$

即与式(6-13)相同.

等效电阻和内阻抗 上面已经导出，单位面积的损耗为

$$P = -\operatorname{Re}\frac{1}{2}(\dot{E}_z\dot{H}_y^*)_{x=0} = \frac{1}{4}\rho J_0^2\Delta$$

同理可以导出，单位面积的无功功率为

$$Q = -\operatorname{Im}\frac{1}{2}(\dot{E}_z\dot{H}_y^*)_{x=0} = \frac{1}{4}\rho J_0^2\Delta \qquad (6\text{-}14)$$

已知 $\operatorname{Im}=\frac{J_0\Delta}{\sqrt{2}}$，于是沿 z 向单位长度、沿 y 单位高度的立方体的等效电阻 $R_\sim$ 和内电抗 $X_\sim$ 就等于：

$$R_\sim = \frac{2P}{I_m^2} = \rho\frac{1}{\Delta}, \quad X_\sim = \frac{2Q}{I_m^2} = \rho\frac{1}{\Delta} \qquad (6\text{-}15)$$

上式说明：理想半无限大导体的等效电阻等于等效内电抗，计算等效电阻时，有效面积可按 $1\times\Delta$ 计算.

等效内阻抗亦可以用导体表面的电场强度 $\dot{E}_0$ 和电流 $\dot{I}_m$ 求出. 从图 6-3 可见，导体表面沿 z 方向单位长度的电位差应为 $\dot{E}_{z(x=0)}\times 1$，而电流为 $\dot{I}_m$，于是图 6-3 所示体积的内阻

抗为

$$R_{\sim}+jX_{\sim}=\frac{\dot{E}_{x(x=0)}}{\dot{I}_{m}}=\frac{\rho J_0 e^{j45^\circ}}{\frac{J_0\Delta}{\sqrt{2}}}=\rho\frac{1}{\Delta}(1+j)$$

即与式(6-15)相同.

6-2 双层半无限大导体内的正弦电磁场[1]

设半无限大的导体由两层组成，第一层的厚度为d_1，磁导率和电导率分别为μ_1、σ_1，第二层则为μ_2、σ_2，如图 6-5 所示.

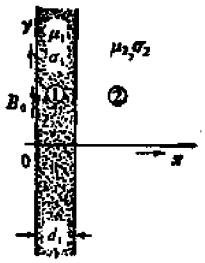


图 6-5 双层导体

(一) 导体内电磁场的分布

在第一层和第二层内，$\dot{B}_{y1}$和$\dot{B}_{y2}$分别满足

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\dot{B}_{y1}}{\partial x^2}&=j\omega\mu_1\sigma_1\dot{B}_{y1}\\ \frac{\partial^2\dot{B}_{y2}}{\partial x^2}&=j\omega\mu_2\sigma_2\dot{B}_{y2}\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}16)$$

式(6-16)的解答为

$$\left.\begin{aligned}\dot{B}_{y1}&=\dot{A}_1e^{-p_1x}+\dot{A}_2e^{p_1x},\qquad 0\leqslant x\leqslant d_1\\ \dot{B}_{y2}&=\dot{A}_3e^{-p_2x}+\dot{A}_4e^{p_2x},\qquad x\geqslant d_1\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}17)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}p_1&=\sqrt{j\omega\mu_1\sigma_1}=(1+j)k_1=\frac{1+j}{\Delta_1}\\ p_2&=\sqrt{j\omega\mu_2\sigma_2}=(1+j)k_2=\frac{1+j}{\Delta_2}\\ \Delta_1&=\frac{1}{k_1}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_1\sigma_1}},\quad \Delta_2=\frac{1}{k_2}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_2\sigma_2}}\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}18)$$

由于$x\to\infty$时，$\dot{B}_{y2}$为有限，故$\dot{A}_4=0$. 设$x=0$时，$\dot{B}_{y1}=B_0$，则

$$\dot{A}_1+\dot{A}_2=B_0\qquad(6\text{-}19)$$

第一层和第二层内的电场强度为

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_{x1}&=-\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial\dot{H}_{y1}}{\partial x}=\frac{p_1}{\sigma_1\mu_1}(\dot{A}_1e^{-p_1x}-\dot{A}_2e^{p_1x})\\ \dot{E}_{x2}&=-\frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial\dot{H}_{y2}}{\partial x}=\frac{p_2}{\sigma_2\mu_2}\dot{A}_3e^{-p_2x}\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}20)$$

在 1 和 2 的交界面$x=d$处，

$$\dot{E}_{x1}=\dot{E}_{x2},\qquad \dot{H}_{y1}=\dot{H}_{y2}\qquad(6\text{-}21)$$

于是

$$\frac{p_1}{\sigma_1\mu_1}(\dot{A}_1e^{-p_1d}-\dot{A}_2e^{p_1d})=\frac{p_2}{\sigma_2\mu_2}\dot{A}_3e^{-p_2d},\quad \frac{1}{\mu_1}(\dot{A}_1e^{-p_1d}+\dot{A}_2e^{p_1d})=\frac{1}{\mu_2}\dot{A}_3e^{-p_2d} \tag{6-22}$$

求解上式，可得

$$\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2}=\frac{k_2\sigma_1+k_1\sigma_2}{k_1\sigma_2-k_2\sigma_1}e^{2p_1d} \tag{6-23}$$

再联解式(6-19)和(6-23)，可得 $\dot{A}_1$ 和 $\dot{A}_2$；由式(6-22)可得 $\dot{A}_3$.

（二）内阻抗

双层导体的内阻抗亦可以用表面处电场强度和磁场强度求出：

$$Z_i=\frac{\dot{E}_0}{\dot{H}_0}=\frac{p_1}{\sigma_1}\frac{\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2}-1}{\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2}+1}=\frac{p_1}{\sigma_1}\frac{\mathrm{sh}p_1d+\frac{\sigma_1k_2}{\sigma_2k_1}\mathrm{ch}p_1d}{\mathrm{ch}p_1d+\frac{\sigma_1k_2}{\sigma_2k_1}\mathrm{sh}p_1d} \tag{6-24}$$

图 6-6 表示不同的 σ_1 和 σ_2 时，$\frac{R}{R_1}$、$\frac{X}{R_1}=f\left(\frac{d_1}{\Delta_1}\right)$，其中 R 和 X 为双层导体的有效电阻和电抗，R_1 为单层 μ_1、σ_1 时的有效电阻值．从图 6-6 和式(6-24)可见：当 $d_1\geqslant 2\Delta_1$ 时，$\frac{R}{R_1}\approx 1$；当 $d_1\ll\Delta_1$ 时，

$$\frac{Z_i}{R_1(1+j)}\approx\frac{\sigma_1k_2}{\sigma_2k_1}=\sqrt{\frac{\mu_2\sigma_1}{\mu_1\sigma_2}} \tag{6-25}$$

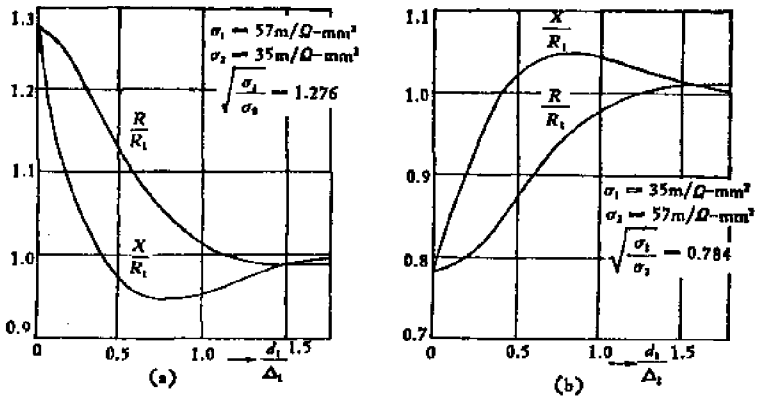


图 6-6　不同的 σ_1、σ_2 时 $\frac{R}{R_1}$ 和 $\frac{X}{R_1}=f\left(\frac{d_1}{\Delta_1}\right)$

6-3　薄长金属片中的正弦电磁场[1—3]

薄钢板中正弦磁场的集肤效应和涡流损耗，薄长铜排中电流的集肤效应等都属于这一类问题．由于金属片是薄长的，因此磁场或电场仅有一个分量，并可认为仅是一个坐标的函数，于是问题简化为一维问题.

（一）薄钢板中磁场的集肤效应和涡流损耗

电机的铁心通常由硅钢片或钢板叠成．当铁心内的磁通随时间交变时，就有磁滞和涡流损耗．磁滞损耗由实验确定，涡流损耗可由理论计算或实验确定．若铁心内的磁感强度为均匀分布，叠片内的涡流损耗可由电磁感应定律和欧姆定律求出．如果进一步考虑到磁场的集肤效应，则叠片内的涡流和涡流损耗需用求解涡流方程的办法来解决．

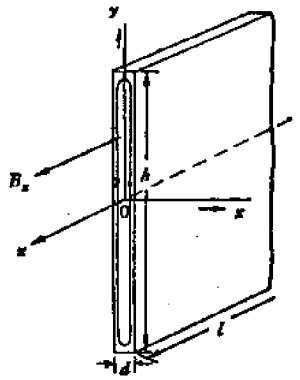


图 6-7　薄长钢板

薄钢板中磁场的分布　设钢板为薄长，$h \gg d$，磁场与 z 轴平行，电场（电密）仅有 y 分量，且 B_z 和 E_y 仅为坐标 x 的函数，如图 6-7 所示；则当磁感强度 B_z 随时间正弦变化时

$$B_z = B_y(x)\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}[\dot{B}_z e^{j\omega t}] \tag{6-26}$$

涡流方程将为

$$\frac{\partial^2 \dot{B}_z}{\partial x^2} = j\omega\mu\sigma\dot{B}_z = p^2\dot{B}_z \tag{6-27}$$

上式的解答为

$$\dot{B}_z = \dot{A}_1 \mathrm{sh}px + \dot{A}_2 \mathrm{ch}px \tag{6-28}$$

其中

$$p = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)k = \frac{1+j}{\Delta} \tag{6-29}$$

Δ 为透入深度，$\Delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}}$，$k = \dfrac{1}{\Delta}$；$\dot{A}_1$ 和 $\dot{A}_2$ 为任意常数，由边界条件确定．

设在钢板两侧边界 $x = \pm\dfrac{d}{2}$ 处，$\dot{B}_z = B_0$，则

$$\dot{A}_1 = 0, \quad \dot{A}_2 = \frac{B_0}{\mathrm{ch}p\dfrac{d}{2}} \tag{6-30}$$

于是

$$\dot{B}_z = B_0 \frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{ch}p\dfrac{d}{2}} \tag{6-31}$$

$$B_z = \mathrm{Re}\left[B_0 \frac{\mathrm{ch}(1+j)kx}{\mathrm{ch}(1+j)k\dfrac{d}{2}} e^{j\omega t}\right] \tag{6-32}$$

电场强度和电密则为

$$\dot{E}_y = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = -\frac{B_0(1+j)}{\mu\sigma\Delta}\frac{\mathrm{sh}(1+j)kx}{\mathrm{ch}(1+j)k\dfrac{d}{2}}$$

$$= \dot{E}_0 \frac{\mathrm{sh}(1+j)kx}{\mathrm{sh}(1+j)k\dfrac{d}{2}} \tag{6-33}$$

$$\dot{J}_y = \sigma\dot{E}_y = \dot{J}_0 \frac{\mathrm{sh}(1+j)kx}{\mathrm{sh}(1+j)k\frac{d}{2}} \tag{6-34}$$

式中 $\dot{E}_0$ 和 $\dot{J}_0$ 分别表示钢板表面 $x=\frac{d}{2}$ 处的电场强度和电密；

$$\dot{E}_0 = -\frac{B_0(1+j)}{\mu\sigma\Delta}\mathrm{th}(1+j)k\frac{d}{2}, \qquad \dot{J}_0 = \sigma\dot{E}_0 \tag{6-35}$$

图 6-8 表示钢板内磁场和涡流电密的分布. 从图可见，由于涡流的作用，钢板内的磁场产生了集肤效应，使钢板表面的磁密增高而中心处则削弱；kd 愈大，集肤效应就显著，如图 6-9 所示.

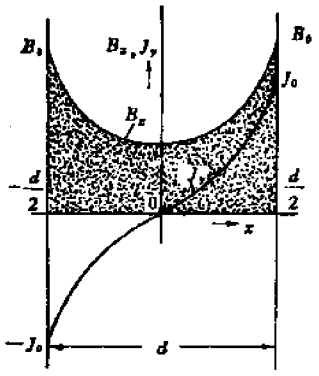


图 6-8 薄钢板中的磁场分布

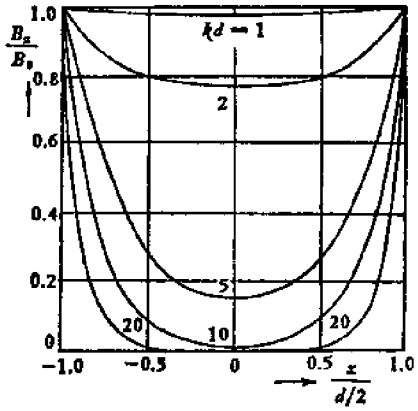


图 6-9 $\frac{B_z}{B_0}=f\left(\frac{x}{d/2}\right)$

沿 y 轴方向单位长度钢板中的磁通量 Φ 为

$$\dot{\Phi} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \dot{B}_z dx = \frac{2B_0\Delta}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}\mathrm{th}(1+j)k\frac{d}{2} \tag{6-36}$$

$$|\Phi| = \frac{2B_0\Delta}{\sqrt{2}}\left|\mathrm{th}(1+j)k\frac{d}{2}\right| = \frac{2B_0\Delta}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\xi-\cos\xi}{\mathrm{ch}\xi+\cos\xi}} \tag{6-37}$$

式中 $\xi=kd$. 钢板中的平均磁密 B_{av} 为

$$B_{av} = \frac{\Phi}{d} = \sqrt{2}B_0\left[\frac{1}{\xi}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\xi-\cos\xi}{\mathrm{ch}\xi+\cos\xi}}\right] \tag{6-38}$$

涡流损耗 单位体积的涡流损耗可用能流向量算出. 复能流向量 $\dot{\Pi}$ 为

$$\dot{\Pi}_{(x=\pm\frac{d}{2})} = \frac{1}{2}(\dot{E}_y\dot{H}_z^*)_{x=\pm\frac{d}{2}} = \pm\frac{1}{2}\dot{E}_0H_0$$

$$= \mp\frac{1}{2}\left(\frac{B_0}{\mu}\right)^2\frac{1+j}{\sigma\Delta}\mathrm{th}(1+j)k\frac{d}{2} \tag{6-39}$$

所以

$$\frac{P_e}{V}=\frac{-\operatorname{Re}\oint\dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}}{lhd}=\frac{-lh\operatorname{Re}\left[\dot{\Pi}_{x=\frac{d}{2}}-\dot{\Pi}_{x=-\frac{d}{2}}\right]}{lhd}$$

$$=\left(\frac{B_0}{\mu}\right)^2\frac{1}{\sigma\Delta d}\operatorname{Re}\left[(1+j)\operatorname{th}(1+j)k\frac{d}{2}\right] \tag{6-40}$$

考虑到

$$\operatorname{th}(1+j)k\frac{d}{2}=\frac{\operatorname{sh}kd+j\sin kd}{\operatorname{ch}kd+\cos kd}=\frac{\operatorname{sh}\xi+j\sin\xi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\xi}$$

于是式（6-40）可改写成

$$\frac{P_e}{V}=\left(\frac{B_0}{\mu}\right)^2\frac{1}{\sigma\Delta d}\frac{\operatorname{sh}\xi-\sin\xi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\xi}=\frac{\omega}{4\mu}B_{av}^2\xi\frac{\operatorname{sh}\xi-\sin\xi}{\operatorname{ch}\xi-\cos\xi}$$

$$=\frac{1}{24}\sigma\omega^2d^2B_{av}^2\cdot F(\xi) \tag{6-41}$$

式中

$$F(\xi)=\frac{3}{\xi}\frac{\operatorname{sh}\xi-\sin\xi}{\operatorname{ch}\xi-\cos\xi} \tag{6-42}$$

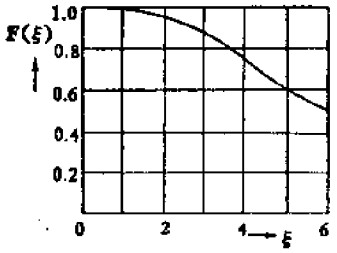


图 6-10　$F(\xi)$的变化

图 6-10 表示不同的 ξ 时 $F(\xi)$的值. 从图可见，当频率较低时，$\xi\leqslant1$，涡流的作用很小，此时 $F(\xi)\approx1$，

$$\frac{P_e}{V}\approx\frac{1}{24}\sigma\omega^2d^2B_{av}^2 \tag{6-43}$$

涡流损耗与片厚 d 的平方、频率 f 的平方成正比. 当频率较高（$\xi\geqslant4$）时，集肤效应显著，$F(\xi)\approx\frac{3}{\xi}$，此时

$$\frac{P_e}{V}\approx\frac{1}{24}\sigma\omega^2d^2B_{av}^2\frac{3}{kd}$$

$$\approx\frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}\omega^{1.5}d^2B_{av}^2 \tag{6-44}$$

此时涡流损耗与片厚 d 成正比，与频率的 1.5 次方成正比.

涡流损耗亦可由焦耳损耗求出. 从式(6-34)可知

$$|\dot{J}_y|=\left|-\frac{B_0(1+j)}{\mu\Delta}\frac{\operatorname{sh}(1+j)kx}{\operatorname{ch}(1+j)k\frac{d}{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}B_0}{\mu\Delta}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2kx-\cos2kx}{\operatorname{ch}kd+\cos kd}}$$

于是单位体积内的涡流损耗为

$$\frac{P_e}{V}=\frac{\frac{1}{2}lh\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\frac{J_y^2}{\sigma}dx}{lhd}$$

$$=\left(\frac{B_0}{\mu}\right)^2\frac{1}{\sigma d\Delta^2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\xi+\cos\xi}\right)\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}(\operatorname{ch}2kx-\cos2kx)dx$$

$$= \left(\frac{B_0}{\mu}\right)^2 \frac{1}{\sigma d\Delta} \frac{\mathrm{sh}\xi - \sin\xi}{\mathrm{ch}\xi + \cos\xi}$$

即与式(6-41)相同.

（二）薄长铜排中电流的集肤效应

对于图 6-11 所示薄长汇流排，若电密随时间正弦变化，并认为 $\dot{J}_z$ 仅随 x 而变化，则电密 $\dot{J}_z$ 应满足

$$\frac{\partial^2 \dot{J}_z}{\partial x^2} = j\omega\mu\sigma\dot{J}_z \tag{6-45}$$

设在 $x=\pm\frac{d}{2}$ 处，$\dot{J}_z=\dot{J}_0$，则式(6-45)的解答应为

$$\dot{J}_z = J_0 \frac{\mathrm{ch}(1+j)kx}{\mathrm{ch}(1+j)k\frac{d}{2}} \tag{6-46}$$

汇流排中的总电流 $\dot{I}_m$（幅值相量）为

$$\dot{I}_m = h\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \dot{J}_z dx = \frac{2hJ_0}{(1+j)k} \frac{\mathrm{sh}(1+j)k\frac{d}{2}}{\mathrm{ch}(1+j)k\frac{d}{2}}$$

$$= \sqrt{2}J_0 h\Delta\, e^{-j45^\circ}\mathrm{th}(1+j)k\frac{d}{2} \tag{6-47}$$

于是

$$J_0 = \frac{\dot{I}_m e^{j45^\circ}}{\sqrt{2}h\Delta}\mathrm{cth}(1+j)k\frac{d}{2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}h\Delta}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\xi+\cos\xi}{\mathrm{ch}\xi-\cos\xi}} \tag{6-48}$$

其中 $\xi=kd$.

磁场强度可根据 rotH=J 算出. 由于磁场只有 y 分量，且 $\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial y}=\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}=0$，所以 $\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}=\dot{J}_z$；于是

$$\dot{H}_y = \int \dot{J}_x dx + C$$

$$= \frac{J_0\Delta}{1+j}\frac{\mathrm{sh}(1+j)kx}{\mathrm{ch}(1+j)k\frac{d}{2}} + C \tag{6-49}$$

考虑到 $x=0$ 处，$\dot{H}_y=0$，所以 $C=0$，这样

$$\dot{H}_y = \frac{J_0\Delta}{1+j}\frac{\mathrm{sh}(1+j)kx}{\mathrm{ch}(1+j)k\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{\dot{I}_m}{2h}\frac{\mathrm{sh}(1+j)kx}{\mathrm{sh}(1+j)k\frac{d}{2}} = \dot{H}_0\frac{\mathrm{sh}(1+j)kx}{\mathrm{sh}(1+j)k\frac{d}{2}} \tag{6-50}$$

式中 $\dot{H}_0$ 为导体表面 $x=\frac{d}{2}$ 处的磁场强度，$\dot{H}_0=\frac{\dot{I}_m}{2h}$.

把式(6-46)、(6-50)与式(6-31)、(6-34)相比较，不难看出，此时电密的分布恰好与薄钢板中磁感强度的分布相对应；磁场分布则与薄钢板中电密的分布相对应(图 6-12).

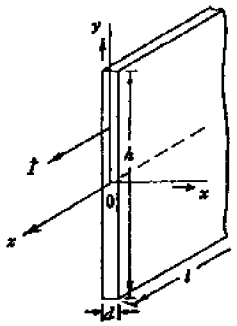


图 6-11　薄长铜排

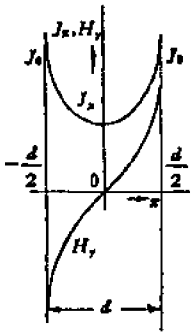


图 6-12　薄铜排中电密的分布

6-4　矩形开口槽内导体的电流集肤效应[1]

交流电机定子绕组中的电流和槽内漏磁场都是交变的. 导体处于交变电磁场中时，除了负载电流之外，导体内还有涡流. 涡流使导体上部的电密增大，下部减小甚至反向，形成电流集肤效应，使导体的铜耗、有效电阻变大. 在感应电机中，利用转子导条的集肤效应，可以设计出起动性能较好的深槽鼠笼电机. 这些问题都要用正弦电磁场的理论来研究.

图 6-13 表示一台交流电机的定子槽，槽形为矩形口开槽. 设槽内有 n 根导体，每根导体中的电流为 $i=I_m\cos\omega t$. 现用涡流方程求解导体内的电密分布，并求出导体的交流电阻和漏抗.

(一) 槽内漏磁场和导体内电密的分布

严格来讲，这是一个具有两种介质(导体、空气)的二维正弦电磁场问题，需要求解分区联立的涡流方程. 为使问题得到合理简化，假定：

(1) 磁力线水平地通过槽内；

(2) 磁场强度 $\dot{H}_x$ 仅是坐标 y 的函数；

(3) $\mu_{Fe}=\infty$，因而铁心的磁压降可以忽略不计.

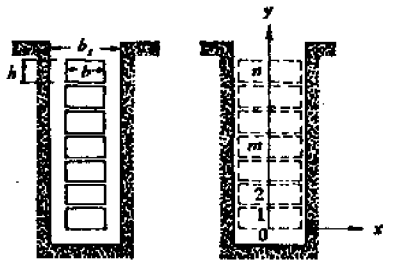


图 6-13　矩形开口槽内的导体

在上述假定下，宽度为 b、电密为 $\dot{J}_z$ 的实际导体所产生的漏磁场将与宽度与 b_1、电密为 $\frac{b}{b_1}\dot{J}_z$ 的导体所产生的漏磁场等效；于是

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{rot}\dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{k}\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = \mathbf{k}\frac{b}{b_t}\dot{j}_x \\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{i}\left(-\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}\right) = \mathbf{i}(-j\omega \dot{B}_x)\end{aligned}\right\} \tag{6-51}$$

这样，仅需求解下列 $\dot{H}_x$ 的一维复涡流方程

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial y^2} = j\omega \frac{b}{b_s}\mu_0\sigma \dot{H}_x = p^2 \dot{H}_x \tag{6-52}$$

上式的解答为

$$\dot{H}_x = \dot{A}_1 e^{-py} + \dot{A}_2 e^{py} \tag{6-53}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}p &= \sqrt{j\frac{b}{b_s}\omega\mu_0\sigma} = (1+j)k = \frac{1+j}{\Delta} \\ \Delta &= \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{b_s}{b}\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}\end{aligned}\right\} \tag{6-54}$$

Δ 为透入深度；$\dot{A}_1$ 和 $\dot{A}_2$ 为任意常数，由边界条件确定.

由安培环路定律可知，当

$$\left.\begin{aligned}&y = (m-1)h \text{ 时}, \quad \dot{H}_x = \frac{(m-1)\dot{I}_m}{b_s} \\ &y = mh \text{ 时}, \quad \dot{H}_x = \frac{m\dot{I}_m}{b_s}\end{aligned}\right\} \tag{6-55}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}\frac{m-1}{b_s}\dot{I}_m &= \dot{A}_1 e^{-p(m-1)h} + \dot{A}_2 e^{p(m-1)h} \\ \frac{m}{b_s}\dot{I}_m &= \dot{A}_1 e^{-pmh} + \dot{A}_2 e^{pmh}\end{aligned}\right\} \tag{6-56}$$

联解这两个式子，可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \frac{\dot{I}_m}{2b_s}\frac{e^{pmh}}{\mathrm{sh}ph}[(m-1) - me^{-ph}] \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\dot{I}_m}{2b_s}\frac{e^{-pmh}}{\mathrm{sh}ph}[(m-1) - me^{ph}]\end{aligned}\right\} \tag{6-57}$$

把 $\dot{A}_1$、$\dot{A}_2$ 代入式 (6-53)，可得

$$\dot{H}_x = \frac{I\dot{I}_m}{b_s\mathrm{sh}ph}[(m-1)\mathrm{sh}p(mh-y) - m\mathrm{sh}p(mh-h-y)] \tag{6-58}$$

$$\dot{J}_x = \frac{b_s}{b}\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = \frac{\dot{I}_m p}{b_s\mathrm{sh}ph}[m\mathrm{ch}p(mh-h-y) - (m-1)\mathrm{ch}p(mh-y)] \tag{6-59}$$

根据式(6-58)和(6-59)，即可得到任一导体内的电密分布，并求出其交流电阻和电抗. 下面分成槽内有一根导体和 n 根导体两种情况来讨论.

（二）槽内仅有一根导体时

深槽感应电机的转子导条就属于这种情况．此时，$m=1$，式(6-58)和(6-59)简化为

$$\dot{H}_x=\frac{\dot{I}_m}{b_s}\frac{\mathrm{sh}py}{\mathrm{sh}ph},\quad \dot{J}_z=\frac{\dot{I}_m p}{b_s}\frac{\mathrm{ch}py}{\mathrm{sh}ph},\quad \dot{E}_z=\frac{1}{\sigma}\dot{J}_z \tag{6-60}$$

图 6-14 表示 $h=5.6$ cm，$\frac{b}{b_s}=0.8$，$\sigma=5\times10^7\ \frac{1}{\Omega\text{-m}}$，$f=50$Hz 时导条内电密和漏磁的分布情况．

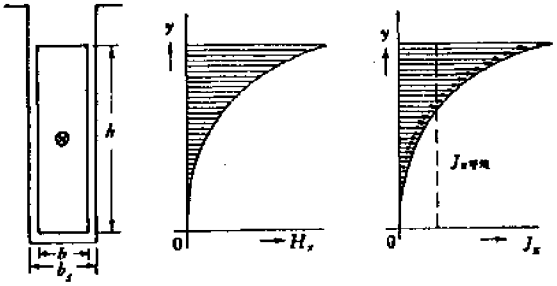


图 6-14　深槽转子导条内的电密和磁场分布

进入导条内的复能流为

$$\begin{aligned}\oint_S \dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}&=\frac{1}{2}b_s l[\dot{E}_z\dot{H}^*_{x(y=h)}-\dot{E}_z\dot{H}_{x(y=0)}]\\&=\frac{1}{2}I_m^2\frac{l}{\sigma b}\frac{p}{|\mathrm{sh}ph|^2}\mathrm{ch}ph\cdot\mathrm{sh}p^*h\\&=\frac{1}{2}I_m^2\frac{lk}{\sigma b}\left[\frac{\mathrm{sh}2\xi+\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi}+j\frac{\mathrm{sh}2\xi-\sin\xi 2}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi}\right]\\&=P+jQ\end{aligned} \tag{6-61}$$

其中

$$\xi=kh=\sqrt{\frac{b}{b_s}\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}h \tag{6-62}$$

由此即可求出导条的交流电阻和漏抗为

$$R_\sim=\frac{2P}{I_m^2}=\frac{lk}{\sigma b}\frac{\mathrm{sh}2\xi+\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi},\qquad X_\sim=\frac{2Q}{I_m^2}=\frac{lk}{\sigma b}\frac{\mathrm{sh}2\xi-\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi} \tag{6-63}$$

交、直电阻之比和电感之比分别为

$$\left.\begin{aligned}k_r&=\frac{R_\sim}{R_=}=\xi\frac{\mathrm{sh}2\xi+\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi}=\varphi(\xi)\\k_x&=\frac{L_\sim}{L_=}=\frac{X_\sim}{\omega\mu_0\frac{h}{3b_s}l}=\frac{3}{2\xi}\frac{\mathrm{sh}2\xi-\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi}=\lambda(\xi)\end{aligned}\right\} \tag{6-64}$$

图 6-15 分别表示 k_r、$k_x=f(\xi)$.

对于一般深槽鼠笼感应电机，$\frac{b}{b_s}=1$，起动时转子频率为 50Hz，$\sigma_{Cu}\approx5\times10^7\ \frac{1}{\Omega\text{-m}}$，$\mu_0$

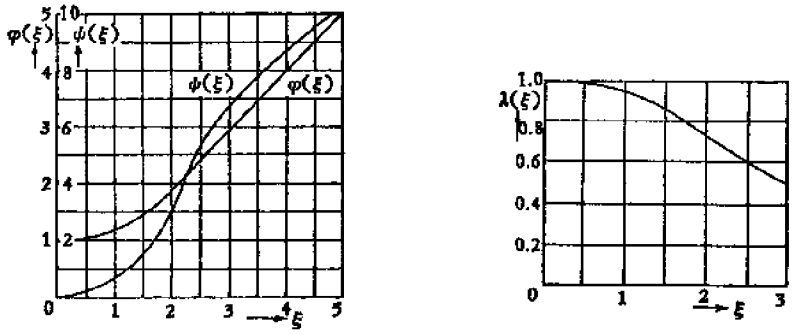


图 6-15　$\varphi(\xi)$,$\psi(\xi)$,和 $\lambda(\xi)$

$=4\pi\times10^{-7}$H/m，于是

$$\xi=\sqrt{\frac{b}{b_s}\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}h\approx\sqrt{\frac{100\pi\times4\pi\times10^{-7}\times5\times10^{7}}{2}}h$$

$$\approx100h(h\text{ 以 m 计})\approx h(h\text{ 以 cm 计}) \tag{6-65}$$

从图 6-15 可见，当 $\xi>1$ 时，$k_r\approx\xi$，所以当导条高度 $h>1$ cm 时，k_r 值就近似等于以厘米计算时的 h 值；即

$$k_r\approx h(\text{以 cm 计}),\qquad \text{当 } h>1\text{ cm 时} \tag{6-66}$$

（三）槽内有 n 根导体时

导体电流均为同相位时　图 6-16 表示 $n=2$ 时导体内的电密分布．图中上层导体的上部电密较大，下部电密亦较大，但相位已近 180°（即电流实际为反向流动）．

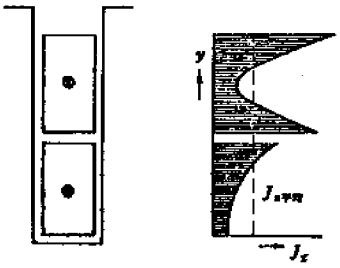


图 6-16　槽内有两根导体时电密的分布

第 m 根导体的交流电阻 $R_{\sim m}$ 为

$$R_{\sim m}=\frac{b_s l}{I_m^2}\mathrm{Re}\left[(\dot{E}_x\dot{H}_x^*)_{y=mh}-(\dot{E}_x\dot{H}_x^*)_{y=(m-1)h}\right]$$

$$=\frac{l}{\sigma b_s}\mathrm{Re}\left\{\frac{p}{|\mathrm{sh}ph|^2}\left[(2m^2-2m-1)\mathrm{ch}ph\cdot\mathrm{sh}p^*h-2m(m-1)\mathrm{sh}p^*h\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sigma}\frac{l}{bh}\left[\xi\frac{\mathrm{sh}2\xi+\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi}+m(m-1)2\xi\frac{\mathrm{sh}\xi-\sin\xi}{\mathrm{ch}\xi+\cos2\xi}\right] \tag{6-67}$$

电阻增大系数 k_{rm} 为

$$k_{rm}=\frac{R_{\sim m}}{R_{=}}=\xi\frac{\mathrm{sh}2\xi+\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi}+m(m-1)2\xi\frac{\mathrm{sh}\xi-\sin\xi}{\mathrm{ch}\xi+\cos\xi}$$
$$=\varphi(\xi)+m(m-1)\psi(\xi) \tag{6-68}$$

式中

$$\varphi(\xi)=\xi\frac{\mathrm{sh}2\xi+\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi},\quad \psi(\xi)=2\xi\frac{\mathrm{sh}\xi-\sin\xi}{\mathrm{ch}\xi+\cos\xi} \tag{6-69}$$

n 根导体的平均电阻增大系数 k_r 为

$$k_r=\frac{1}{n}\sum_1^n k_{rm}=\frac{1}{n}\left[n\varphi(\xi)+\varphi(\xi)\sum_1^n m(m-1)\right]$$
$$=\varphi(\xi)+\frac{n^2-1}{3}\psi(\xi) \tag{6-70}$$

$\varphi(\xi)$和 $\psi(\xi)$如图 6-15 所示.

同理可以求出 n 根导体的平均电抗减小系数 k_x 为：

$$k_x=\frac{1}{n^2}\lambda(\xi)+\frac{n^2-1}{n^2}\mu(\xi) \tag{6-71}$$

式中

$$\lambda(\xi)=\frac{3}{2\xi}\frac{\mathrm{sh}2\xi-\sin2\xi}{\mathrm{ch}2\xi-\cos2\xi},\quad \mu(\xi)=\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{ch}\xi+\sin\xi}{\mathrm{ch}\xi+\cos\xi} \tag{6-72}$$

对大型交流电机的定子绕组，导体为铜线，$\xi\approx h$，当 $h<1$ cm 时，$\xi<1$，此时

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\xi)\approx1+\frac{4}{45}\xi^4,\qquad \varphi(\xi)\approx\frac{1}{3}\xi^4\\&\lambda(\xi)\approx1,\qquad\qquad \mu(\xi)\approx1\end{aligned}\right\} \tag{6-73}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&k_r\approx1+\frac{4}{45}\xi^4+\frac{n^2-1}{3}\frac{1}{3}\xi^4=1+\frac{n^2-0.2}{9}\xi^4\\&\quad\approx1+\left(\frac{\pi f\mu_0\sigma nbh^2}{3b_s}\right)^2\\&k_x\approx1\end{aligned}\right\} \tag{6-74}$$

设 $\frac{b}{b_s}=0.8$，$f=50$Hz，在保持铜线总高 $nh=5.6$cm 的条件下，依次使 $n=1$，2，3，5，…，分别计算单根导体和总的平均电阻增大系数，可得表 6-1. 计算表明，同一槽内，顶层导体的 k_{rm}最大；为减少涡流损耗，可将导体适当分层.

表 6-1　槽内导体分层时 k_r 和 k_{rm}的变化

n	$k_{rm(\max)}$	k_r	备　注
1	5.00	5.00	
2	12.74	7.61	
3	14.02	7.08	
5	7.48	3.64	$nh=5.6$cm
10	2.84	1.69	
15	1.87	1.31	
20	1.49	1.17	

部分槽为异相槽时 若线圈为短距，则一个相带内除了同相槽外还有异相槽. 对同相槽，

$$k_{r(\text{同相})}=\varphi(\xi)+\frac{n^2-1}{3}\psi(\xi) \tag{6-75}$$

对异相槽，可以证明

$$k_{r(\text{异相})}=\varphi(\xi)+\left[\frac{n^2-1}{3}-\frac{n^2}{8}(1-\cos\theta)\right]\psi(\xi) \tag{6-76}$$

式中 θ 为异相槽中上层导体的电流超前下层导体电流的相位角.

实用的交流定子绕组都是三相 60°相带绕组，且相对节距 $\frac{2}{3}<\beta<1\left(\beta=\frac{y_1}{\tau}\right)$，此时 $\cos\theta=\cos60°=0.5$. 对整数槽绕组，一个相带的 q 个槽中，同相槽数为 $q(3\beta-2)$，异相槽数为 $3q(1-\beta)$；于是

$$\begin{aligned}k_r&=\frac{q(3\beta-2)k_{r(\text{同相})}+3q(1-\beta)k_{r(\text{异相})}}{q}\\&=\varphi(\xi)+\left[\frac{n^2-1}{3}-\frac{3(1-\beta)n^2}{16}\right]\psi(\xi)\end{aligned} \tag{6-77}$$

在 $\xi\leqslant1$ 的情况下，上式可简化为

$$\begin{aligned}k_r&\approx1+\frac{(0.4375+0.5625\beta)n^2-0.2}{9}\xi^4\\&\approx1+\left(\frac{\pi f\mu_0\sigma nbh^2}{3b_s}\right)^2k_\beta\end{aligned} \tag{6-78}$$

其中

$$k_\beta=0.4375+0.5625\beta \tag{6-79}$$

式(6-78)说明，短距时 k_r 将比全距时略小；系数 k_β 只与相对节距 β 有关，而与导线尺寸无关.

6-5 槽内空心导体中的电流集肤效应[4—6]

在水冷电机中，导体为空心. 设导体的形状不影响槽内漏磁场的结构，仍用上节假定简化分析.

(一) 磁场和电场分布

如图 6-17 所示，把第 m 根空心导线分成 a、b、c 三部分，则每部分的磁场和电场强度应为：

$$\left.\begin{aligned}\dot H_{xa}&=\frac{1}{b_s\operatorname{sh}ph''}[\dot I_1\operatorname{sh}py-\dot I_2\operatorname{sh}p(y-h'')]\\\dot E_{xa}&=\frac{p}{b\sigma\operatorname{sh}ph''}[\dot I_1\operatorname{ch}py-\dot I_2\operatorname{ch}p(y-h'')]\end{aligned}\right\} \tag{6-80}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot H_{xb}&=\frac{1}{b_s\operatorname{sh}p'h'}[\dot I_2\operatorname{sh}p'(y-h'')-\dot I_1\operatorname{ch}p'(y-h''-h')]\\\dot E_{xb}&=\frac{p'}{(1-\varepsilon)b\sigma\operatorname{sh}p'h'}[\dot I_2\operatorname{ch}p'(y-h'')-\dot I_1\operatorname{ch}p'(y-h''-h')]\end{aligned}\right\} \tag{6-81}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{H}_{zc}&=\frac{1}{b_z\mathrm{sh}ph''}[(\dot{I}_m+\dot{I}_\Sigma)\mathrm{sh}p(y-h''-h')-\dot{I}_2\mathrm{sh}p(y-2h''-h')]\\ \dot{E}_{zc}&=\frac{p}{b\sigma\mathrm{sh}ph''}[(\dot{I}_m+\dot{I}_\Sigma)\mathrm{ch}p(y-h''-h')-\dot{I}I_2\mathrm{ch}p(y-2h''-h')]\end{aligned}\right\}\tag{6-82}$$

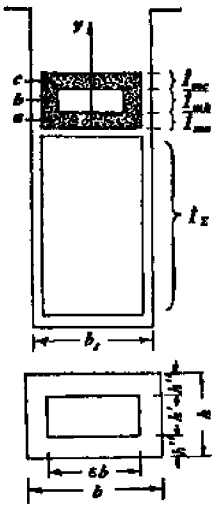


图 6-17 空心导线

式中

$$\dot{I}_1=\dot{I}_{ma}+\dot{I}_\Sigma,\quad \dot{I}_2=\dot{I}_{ma}+\dot{I}_{mb}+\dot{I}_\Sigma \tag{6-83}$$

$\dot{I}_{ma}$、$\dot{I}_{mb}$、$\dot{I}_{mc}$为 a、b、c 三部分内的电流，$\dot{I}_\Sigma$ 则是第 m 根导体以下的全部电流值（均为幅值）；

$$\left.\begin{aligned}p&=\sqrt{j\frac{b}{b_z}\omega\mu_0\sigma}=(1+j)k,\quad k=\sqrt{\frac{b}{b_z}\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\\ p'&=\sqrt{1-\varepsilon}\,p=(1+j)k',\quad k'=\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)b}{b_z}\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\end{aligned}\right\}\tag{6-84}$$

（二）损耗和电阻增大系数

a、b、c 三部分的损耗分别为：

$$P_{ma}=\frac{l}{2\sigma bh''}\{I_{ma}^2\varphi(\xi)+[I_\Sigma^2+\mathrm{Re}(\dot{I}_{ma}\dot{I}_\Sigma^*)]\psi(\xi)\}\tag{6-85}$$

$$P_{mb}=\frac{l}{2\sigma(1-\varepsilon)bh'}\{I_{mb}^2\varphi(\xi')+[I_1^2+\mathrm{Re}(\dot{I}_{mb}\dot{I}_1^*)]\psi(\xi')\}\tag{6-86}$$

$$P_{mc}=\frac{l}{2\sigma bh''}\{I_{mc}^2\varphi(\xi)+[I_2^2+\mathrm{Re}(\dot{I}_{mc}\dot{I}_2^*)]\psi(\xi)\}\tag{6-87}$$

式中

$$\xi=kh'',\quad \xi'=k'h'\tag{6-88}$$

第 m 根导体的总损耗为

$$\begin{aligned}P_m&=P_{ma}+P_{mb}+P_{mc}\\&=\frac{l}{\sigma bh''}\{(I_{ma}^2+I_{mc}^2)\varphi(\xi)+[I_\Sigma^2+I_2^2+\mathrm{Re}(\dot{I}_{ma}\dot{I}_\Sigma^*+\dot{I}_{mc}\dot{I}_2^*)]\psi(\xi)\}\\&\quad+\frac{1}{\sigma(1-\varepsilon)bh'}\{I_{mb}^2\varphi(\xi')+[I_1^2+\mathrm{Re}(\dot{I}_{mb}\dot{I}_1^*)]\psi(\xi')\}\end{aligned}\tag{6-89}$$

由分界处电场强度的连续条件

$$\dot{E}_{za(y=h'')}=\dot{E}_{zb(y=h'')},\quad \dot{E}_{zb(y=h''+h')}=\dot{E}_{zc(y=h''+h')}$$

可以解出 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 为

$$\dot{I}_1=\dot{G}\dot{I}_\Sigma+\frac{\dot{G}-\dot{F}}{2}\dot{I}_m,\qquad \dot{I}_2=\dot{G}\dot{I}_\Sigma+\frac{\dot{G}+\dot{F}}{2}\dot{I}_m\tag{6-90}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\dot{G}&=\frac{\sqrt{1-\epsilon}}{\mathrm{sh}ph''\,\mathrm{th}\,\frac{1}{2}p'h'+\sqrt{1-\epsilon}\,\mathrm{ch}ph''}\\ \dot{F}&=\frac{\sqrt{1-\epsilon}}{\mathrm{sh}ph''\,\mathrm{cth}\,\frac{1}{2}p'h'+\sqrt{1-\epsilon}\,\mathrm{ch}ph''}\end{aligned}\right\}\tag{6-91}$$

对于全距绕组，上、下层电流为同相，$\dot{I}_z=(m-1)\dot{I}_m$，所以

$$\left.\begin{aligned}&\dot{I}_1=\left[(m-1)\dot{G}+\frac{1}{2}(\dot{G}-\dot{F})\right]\dot{I}_m,\qquad \dot{I}_2=\left[(m-1)\dot{G}+\frac{1}{2}(\dot{G}+\dot{F})\right]\dot{I}_m,\\ &\dot{I}_{ma}=\left[(m-1)(\dot{G}-1)-\frac{1}{2}(\dot{G}-\dot{F})-(m-1)\right]\dot{I}_m,\quad \dot{I}_{mb}=\dot{F}\,\dot{I}_m,\\ &\dot{I}_{mc}=\left[1-(m-1)(\dot{G}-1)-\frac{1}{2}(\dot{G}+\dot{F})\right]\dot{I}_m.\end{aligned}\right\}\tag{6-92}$$

将这些关系代入式(6-89)，经整理后可得

$$\begin{aligned}k_r&=\frac{1}{n}\sum_1^n k_{rm}=\frac{1}{n}\sum_1^n\frac{2P_m}{I_m^2R_-}\\&=\frac{1-\lambda\epsilon}{1-\lambda}\left\{\frac{4n^2-1}{3}[1+G^2-2\mathrm{Re}\,\dot{G}]+[1+F^2-2\mathrm{Re}\dot{F}]\right\}\varphi(\xi)\\&\quad+\frac{1-\lambda\epsilon}{1-\lambda}\left\{\frac{4n^2-1}{3}\mathrm{Re}\,\dot{G}+\mathrm{Re}\dot{F}\right\}\psi(\xi)\\&\quad+\frac{1-\lambda\epsilon}{\lambda(1-\epsilon)}\left\{F^2\varphi(\xi')+\left[\frac{4n^2-1}{12}G^2-\frac{1}{4}F^2\right]\psi(\xi')\right\}\end{aligned}\tag{6-93}$$

在导线高度 $h\leqslant 1$cm，频率 $f=50$Hz 时，$\xi<1$，$\xi'<1$，此时

$$\mathrm{sh}\xi\approx\xi+\frac{1}{6}\xi^3,\qquad \sin\xi\approx\xi-\frac{1}{6}\xi^3$$

$$\mathrm{ch}\xi\approx 1+\frac{1}{2}\xi^2,\qquad \cos\xi\approx 1-\frac{1}{2}\xi^2$$

$$\dot{G}\approx 1-j\xi^2\frac{1+\lambda}{1-\lambda},\quad \mathrm{Re}\dot{F}\approx\frac{\lambda(1-\epsilon)}{1-\lambda\epsilon},\quad F^2\approx\left[\frac{\lambda(1-\epsilon)}{1-\lambda\epsilon}\right]^2$$

$$\varphi(\xi)\approx 1,\quad \psi(\xi)\approx\frac{1}{3}\xi^4,\quad \varphi(\xi')\approx 1,\quad \psi(\xi')\approx\frac{1}{3}\xi'^4$$

把这些关系代入式(6-93)，在 $n\geqslant 4$ 的条件下，经整理得

$$\begin{aligned}k_r&\approx 1+\frac{n^2-0.25}{9}\left(\frac{b}{b_z}\pi f\mu_0\sigma h^2\right)^2(1-\lambda\epsilon)(1-\lambda^3\epsilon)\\&\approx 1+\frac{n^2}{9}\left(\frac{b}{b_z}\pi f\mu_0\sigma h^2\right)^2k_0\end{aligned}\tag{6-94}$$

式中 k_0 称为空心系数，$k_0=(1-\lambda\epsilon)(1-\lambda^3\epsilon)$，$\lambda=\frac{h'}{h}$. 如果绕组为短距，则上式右端第二项中除 k_0 外还应乘上 k_β.

6-6 矩形-梯形组合槽内导体的电流集肤效应[7]

矩形-梯形组合槽是一种起动性能较好的鼠笼转子槽形. 由于槽形比较复杂，为简化分析，假定：

(1) 槽漏磁水平地通过槽内；

(2) 导条电流随时间正弦变化，电密 $\dot{J}_z$ 和磁场 $\dot{H}_x$ 仅为坐标 y 的函数；

(3) $\mu_{Fe}=\infty$，铁心内的磁压降忽略不计.

(一) 漏磁场和电密的分布

把 $y=0$ 取在矩形和梯形交界处，则在梯形部分的任一横断面上，根据安培环路定律和电磁感应定律可得

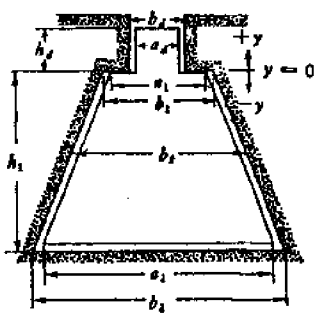


图 6-18 矩形-梯形组合槽

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{B}_{xt}b_t)&=\mu_0\cdot\dot{J}_{zt}a_t\\ \frac{\partial \dot{J}_{zt}}{\partial y}&=j\omega\sigma\dot{B}_{xt}\end{aligned}\right\}\tag{6-95}$$

式中 a_t 和 b_t 分别表示一 y 处导条和槽形的宽度. 把上式中的第二式代入第一式，消去 $\dot{B}_{xt}$，可得

$$\frac{\partial^2\dot{J}_{zt}}{\partial y^2}+\left(\frac{1}{b_t}\frac{db_t}{dy}\right)\frac{\partial \dot{J}_{zt}}{\partial y}-j\omega\mu_0\sigma\frac{a_t}{b_t}\dot{J}_{zt}=0\tag{6-96}$$

设 $\beta=\frac{b_1}{b_2}$，$h_0=-h_1\frac{\beta}{1-\beta}$，则

$$b_t=b_2\left(\beta-\frac{1-\beta}{h_1}y\right),\qquad \frac{1}{b_t}\frac{db_t}{dy}=\frac{1}{y+h_0}\tag{6-97}$$

于是式(6-96)可改写成

$$\frac{\partial^2\dot{J}_{zt}}{\partial y^2}+\frac{1}{y+h_0}\frac{\partial \dot{J}_{zt}}{\partial y}-j\omega\mu_0\sigma\frac{a_t}{b_t}\dot{J}_{zt}=0\tag{6-98}$$

近似地认为任一水平断面处的 $\frac{a_t}{b_t}$=常值，则上式的解答为：

$$\dot{J}_{zt}=\dot{A}_t J_0[p_t(y+h_0)]+\dot{B}_t H_0^{(1)}[p_t(y+h_0)]\tag{6-99}$$

式中 $\dot{A}_t$ 和 $\dot{B}_t$ 为任意常数；J_0 和 $H_0^{(1)}$ 为零阶贝塞尔和汉格尔函数；p_t 和 k_t 等于

$$\left.\begin{aligned}p_t&=\sqrt{-j\omega\mu_0\sigma\frac{a_t}{b_t}}=(1-j)k_t\\ k_t&=\sqrt{\frac{a_t}{b_t}\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\end{aligned}\right\}\tag{6-100}$$

对矩形部分，

$$\frac{\partial^2\dot{J}_{zd}}{\partial y^2}-j\omega\mu_0\sigma\frac{a_d}{b_d}\dot{J}_{zd}=0\tag{6-101}$$

上式的解答为

$$\dot{J}_{zd} = \dot{A}_d \operatorname{ch} p_d y + \dot{B}_d \operatorname{sh} p_d y \tag{6-102}$$

其中 $\dot{A}_d$ 和 $\dot{B}_d$ 为任意常数；p_d 和 k_d 等于

$$\left.\begin{aligned} p_d &= \sqrt{j\omega\mu_0\sigma\frac{a_d}{b_d}} = (1+j)k_d \\ k_d &= \sqrt{\frac{a_d}{b_d}\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{6-103}$$

本题的边界条件为：

1. 在导体底部，磁场强度为零；即

$$\frac{\partial \dot{J}_{zt}}{\partial y}_{(y=-h_1)} = 0 \tag{6-104}$$

2. 在导体顶部，磁场强度 $\dot{H}_{xt}=\frac{\dot{I}_m}{b_d}$；即

$$b_d \frac{\partial \dot{J}_{zd}}{\partial y}_{(y=h_d)} = j\omega\mu_0\sigma\dot{I}_m \tag{6-105}$$

3. 在矩形和梯形交界处，电密为连续；即

$$\dot{J}_{zd(y=0)} = \dot{J}_{zt(y=0)} \tag{6-106}$$

4. 在矩形和梯形交界面，磁场强度发生突变，其比例为$\frac{b_1}{b_d}$；即

$$\left(\frac{\partial \dot{J}_{zd}}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{b_1}{b_d}\left(\frac{\partial \dot{J}_{zt}}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{6-107}$$

根据上述条件，可以得到

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_t &= -\dot{B}_t \frac{H_1^{(1)}[p_t(h_0-h_1)]}{J_1[p_t(h_0-h_1)]}, \\ \dot{A}_d \operatorname{sh} p_d h_d &+ \dot{B}_d \operatorname{ch} p_d h_d = \frac{j\omega\mu_0\sigma\dot{I}_m}{b_d p_d}, \\ \dot{A}_d &= \dot{B}_t\left\{H_0^{(1)}(p_t h_0) - \frac{H_1^{(1)}[p_t(h_0-h_1)]}{J_1[p_t(h_0-h_1)]}J_0(p_t h_0)\right\}, \\ \dot{B}_d &= \frac{b_1 b_t}{b_d p_d}B_t\left\{\frac{H_1^{(1)}[p_t(h_0-h_1)]}{J_1[p_t(h_0-h_1)]}J_1(p_t h_0) - H_1^{(1)}(p_t h_0)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{6-108}$$

由此即可解出 $\dot{A}_t$、$\dot{B}_t$、$\dot{A}_d$、$\dot{B}_d$.

（二）导条的交流电阻和漏抗

在导体顶部，长度 l 内的感应电压为

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x(y=h_d)}l &= \frac{l}{\sigma}(\dot{A}_d \operatorname{ch} p_d h_d + \dot{B}_d \operatorname{sh} p_d h_d) \\ &= \dot{I}_m(R_\sim + jX_\sim) \end{aligned} \tag{6-109}$$

所以

$$R_{\sim}+jX_{\sim}=\frac{l}{\sigma}\frac{\dot{A}_d\,\mathrm{ch}p_dh_d+\dot{B}_d\,\mathrm{sh}p_dh_d}{\dot{I}_m}$$

$$=\frac{j\omega\mu_0\sigma}{b_dp_d}\frac{l}{\sigma}\frac{\dot{A}_d\mathrm{ch}p_dh_d+\dot{B}_d\mathrm{sh}p_dh_d}{\dot{A}_d\mathrm{sh}p_dh_d+\dot{B}_d\mathrm{ch}p_dh_d}$$

$$=\frac{l}{\sigma a_d}p_d\frac{\frac{\dot{A}_d}{\dot{B}_d}\mathrm{ch}p_dh_d+\mathrm{sh}p_dh_d}{\frac{\dot{A}_d}{\dot{B}_d}\mathrm{sh}p_dh_d+\mathrm{ch}p_dh_d} \tag{6-110}$$

式中

$$\frac{\dot{A}_d}{\dot{B}_d}=j\frac{b_d}{b_1}\sqrt{\frac{a_db_t}{b_da_t}}\frac{J_1[p_t(h_0-h_1)]H_0^{(1)}(p_th_0)-H_1^{(1)}[p_t(h_0-h_1)]J_0(p_th_0)}{H_1^{(1)}[p_t(h_0-h_1)]J_1(p_th_0)-H_1^{(1)}(p_th_0)J_1[p_t(h_0-h_1)]} \tag{6-111}$$

对纯梯形槽，$h_d=0$，$b_d=b_1$，$a_d=a_1$，$\frac{b_d}{a_d}=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_t}{a_t}$，所以

$$R_{\sim}+jX_{\sim}=\frac{l}{\sigma a_d}p_d\frac{A_d}{B_d}$$

$$=\frac{l}{\sigma a_d}(1-j)k_t\frac{H_1^{(1)}[p_t(h_0-h_1)]J_0(p_th_0)-J_1[p_t(h_0-h_1)]H_0^{(1)}(p_th_0)}{H_1^{(1)}[p_t(h_0-h_1)]J_1(p_th_0)-J_1[p_t(h_0-h_1)]H_1^{(1)}(p_th_0)} \tag{6-112}$$

图 6-19 表示 k_r，k_x 与 ξ 的关系，$\xi=\sqrt{\frac{a_t}{b_t}\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}h_d$.

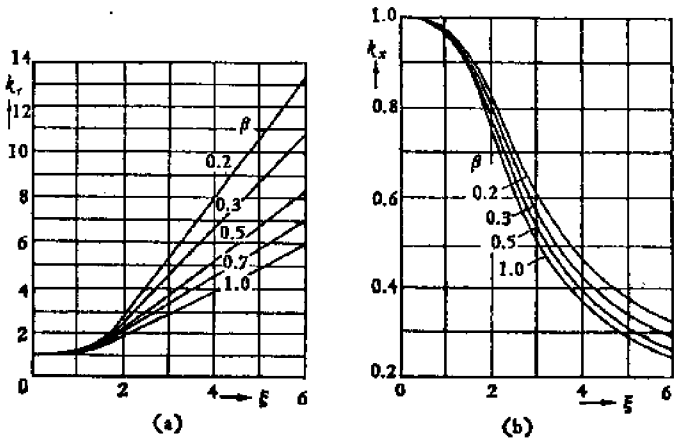


图 6-19 k_r、k_x 与 ξ 的关系

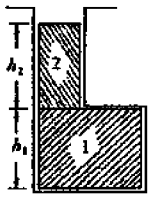


图 6-20 L 形槽

（三）L 形或倒 T 形槽

对 L 形或倒 T 形槽，可以认为$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$，$p_1=p_2=p=(1+j)k$，$k=\sqrt{\frac{a_1}{b_1}\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$，

$$\left.\begin{aligned}\dot{J}_{x1}&=\dot{A}_1\mathrm{ch}py+\dot{B}_1\mathrm{sh}py\\ \dot{J}_{x2}&=\dot{A}_2\mathrm{ch}py+\dot{B}_2\mathrm{sh}py\end{aligned}\right\}\tag{6-113}$$

根据边界条件可知，$\dot{A}_1=\dot{A}_2$，$\dot{B}_1=\dot{A}_1\,\mathrm{th}ph_1$，$\dot{B}_2=\frac{b}{b_2}\dot{A}_1\,\mathrm{th}kh_1$，所以

$$R_{\sim}+jX_{\sim}=\frac{l}{\sigma a_2}p\,\frac{b_1\mathrm{sh}ph_1\mathrm{sh}ph_2+b_2\mathrm{ch}ph_1\mathrm{ch}ph_2}{b_2\mathrm{ch}ph_1\mathrm{sh}ph_2+b_1\mathrm{sh}ph_1\mathrm{ch}ph_2}\tag{6-114}$$

实际计算表明，对于具有同样截面积、同样高度的矩形、梯形和矩形-梯形组合导条，以组合导条的起动性能最好（见表 6-2）.

表 6-2　各种导条的 k_r 和 k_x 值

导条形式	k_r	k_x	备　注
	7.2	0.49	
	4.7	0.38	导条高度均为 3.55 cm，面积为 3.74 cm²
	5.3	0.44	
	3.6	0.40	

6-7　叠片铁心的片间涡流[8]

对叠片铁心，除片内存在涡流，片与片间亦有涡流. 当然，由于片间的电导率要比顺着钢片的电导率小很多，所以片间涡流并不太大.

（一）基本方程和边界条件

考虑片间涡流时，需解二维涡流方程. 设铁心内的磁场随时间正弦变化，$\dot{H}$的方向与 z 轴平行；如图 6-21 所示，即 $\dot{\mathbf{H}}=\mathbf{k}\dot{H}_z$，$\dot{H}_z=\dot{H}_z(x,y)$. 此时电场强度有 $\dot{E}_x$ 和 $\dot{E}_y$ 两个分量，这两个分量亦是 x,y 的函数. 于是 $\mathrm{rot}\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{J}}$ 的分量为

$$\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y}=\dot{J}_x,\qquad\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x}=-\dot{J}_y\tag{6-115}$$

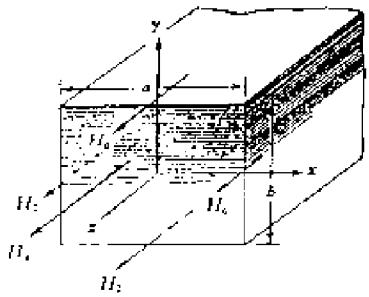


图 6-21　叠片铁心

$\mathrm{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\dot{\mathbf{B}}$的分量为

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y}=-j\omega\mu\dot{H}_z \tag{6-116}$$

由于电导率为各向异性，$\sigma_x\neq\sigma_y$，所以 σ 是一个张量，

$$\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix} \tag{6-117}$$

于是

$$\dot{J}_x=\sigma_x\dot{E}_x,\quad \dot{J}_y=\sigma_y\dot{E}_y \tag{6-118}$$

把式(6-118)和(6-115)代入式(6-116)，可得

$$\sigma_x\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial x^2}+\sigma_y\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial y^2}=j\omega\mu\,\sigma_x\sigma_y\dot{H}_z \tag{6-119}$$

本问题的边界条件为：在铁心四周，设 $\dot{H}_z=H_0$；即

$$\left.\begin{aligned}x=\pm\frac{a}{2}\text{ 时},\quad \dot{H}_z=H_0;\\ y=\pm\frac{b}{2}\text{ 时},\quad \dot{H}_z=H_0.\end{aligned}\right\} \tag{6-120}$$

（二）二维涡流方程的两种解法

解法一　设 $\dot{H}_z$ 的解答由 $\dot{H}_{z1}$和 $\dot{H}_{z2}$两部分组成，$\dot{H}_{z1}$和 $\dot{H}_{z2}$都是涡流方程(6-119)的解，其中 $\dot{H}_{z1}$满足 $\dot{H}_{z1(x=\pm\frac{a}{2})}=H_0$，$\dot{H}_{z1(y=\pm\frac{b}{2})}=0$ 这一组边界条件；$\dot{H}_{z2}$则满足 $\dot{H}_{z2(x=\pm\frac{a}{2})}=0$，$\dot{H}_{z2(y=\pm\frac{b}{2})}=H_0$ 这一边界条件；这样 $\dot{H}_z=\dot{H}_{z1}+\dot{H}_{z2}$将满足全部边界条件.

设 $\dot{H}_{z1}$和 $\dot{H}_{z2}$的试解为

$$\dot{H}_{z1}=\dot{A}\,\mathrm{ch}\,qx\cos\alpha y,\quad \dot{H}_{z2}=\dot{B}\,\mathrm{ch}\,\gamma y\cos\beta x \tag{6-121}$$

根据 $\dot{H}_{z1}$的边界条件，可知

$$\dot{A}\,\mathrm{ch}\,qx\cos\alpha\frac{b}{2}=0$$

所以

$$\alpha=n\frac{\pi}{b},\quad n=1,3,5,\cdots \tag{6-122}$$

再把 $\dot{H}_{z1}$的试解代入式(6-119)，可知

$$\sigma_x q^2\dot{H}_{z1}-\sigma_y\alpha^2\dot{H}_{z1}=j\omega\mu\sigma_x\sigma_y\dot{H}_{z1}$$

故

$$q_n=\sqrt{j\omega\mu\sigma_y+\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(n\frac{\pi}{b}\right)^2} \tag{6-123}$$

同理，根据 $\dot{H}_{z2}$的边界条件和式(6-119)可知，

$$\beta=n\frac{\pi}{a},\quad n=1,3,5,\cdots \tag{6-124}$$

$$\gamma_n=\sqrt{j\omega\mu\sigma_x+\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2} \tag{6-125}$$

把所有的特解线性叠加，可得 $\dot{H}_{z1}$ 和 $\dot{H}_{z2}$ 的通解为

$$\left.\begin{aligned}\dot{H}_{z1}&=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{A}_n\mathrm{ch}q_nx\cos n\frac{\pi}{b}y\\ \dot{H}_{z2}&=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{B}_n\mathrm{ch}\gamma_ny\cos n\frac{\pi}{a}x\end{aligned}\right\}\tag{6-126}$$

常数 $\dot{A}_n$ 和 $\dot{B}_n$ 可由另外一组边界条件来确定. 把 $x=\pm\frac{a}{2}$ 代入 $\dot{H}_{z1}$，$y=\pm\frac{b}{2}$ 代入 $\dot{H}_{z2}$，可得

$$\left.\begin{aligned}H_0&=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{A}_n\mathrm{ch}q_n\frac{a}{2}\cos n\frac{\pi}{b}y\\ H_0&=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{B}_n\mathrm{ch}\gamma_n\frac{a}{2}\cos n\frac{\pi}{a}x\end{aligned}\right\}\tag{6-127}$$

由此即可求出上述级数中的系数 $\dot{A}_n$ 和 $\dot{B}_n$，

$$\dot{A}_n=\frac{1}{n}\frac{4}{\pi}H_0\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\mathrm{ch}q_n\frac{a}{2}},\qquad \dot{B}_n=\frac{1}{n}\frac{4}{\pi}H_0\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\mathrm{ch}\gamma_n\frac{b}{2}}\tag{6-128}$$

把 $\dot{A}_n$ 和 $\dot{B}_n$ 代入式(6-126)，可得 $\dot{H}_z$ 为

$$\begin{aligned}\dot{H}_z&=\dot{H}_{z1}+\dot{H}_{z2}\\ &=\frac{4}{\pi}H_0\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\left[\frac{\mathrm{ch}q_nx}{\mathrm{ch}q_n\frac{a}{2}}\cos n\frac{\pi}{b}y+\frac{\mathrm{ch}\gamma_ny}{\mathrm{ch}\gamma_n\frac{b}{2}}\cos n\frac{\pi}{a}x\right]\end{aligned}\tag{6-129}$$

电场强度则为

$$\begin{aligned}\dot{E}_x&=\frac{1}{\sigma_x}\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y}\\ &=\frac{4}{\pi}\frac{H_0}{\sigma_x}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\left[-n\frac{\pi}{b}\frac{\mathrm{ch}q_nx}{\mathrm{ch}q_n\frac{a}{2}}\sin n\frac{\pi}{b}y+\gamma_n\frac{\mathrm{sh}\gamma_ny}{\mathrm{ch}\gamma_n\frac{b}{2}}\cos n\frac{\pi}{a}x\right]\end{aligned}\tag{6-130}$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_y&=-\frac{1}{\sigma_y}\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x}\\ &=-\frac{4}{\pi}\frac{H_0}{\sigma_y}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\left[q_n\frac{\mathrm{sh}q_nx}{\mathrm{ch}q_n\frac{a}{2}}\cos n\frac{\pi}{b}y-n\frac{\pi}{a}\frac{\mathrm{ch}\gamma_ny}{\mathrm{ch}\gamma_n\frac{b}{2}}\sin n\frac{\pi}{a}x\right]\end{aligned}\tag{6-131}$$

进入铁心的能流为

$$\begin{aligned}\oint\dot{H}\cdot d\mathbf{S}&=4\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\dot{E}_{x\left(y=\frac{b}{2}\right)}H_0ldx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{b}{2}}\dot{E}_{y\left(x=\frac{a}{2}\right)}H_0ldy\right]\\ &=\frac{8}{\pi}\frac{H_0^2l}{\sigma_x}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{-n\frac{\pi}{b}}{q_n}\mathrm{th}q_n\frac{a}{2}+\frac{\gamma_n}{n\frac{\pi}{a}}\mathrm{th}\gamma_n\frac{b}{2}\right]\end{aligned}$$

$$+\frac{8}{\pi}\frac{H_0^2 l}{\sigma_y}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{q_n}{n\frac{\pi}{b}}\mathrm{th}q_n\frac{a}{2}-\frac{n\frac{\pi}{a}}{\gamma_n}\mathrm{th}\gamma_n\frac{b}{2}\right]$$

$$=j\omega\frac{4}{\pi^2}H_0^2\mu l\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{ab}{n^2}\left[\frac{\mathrm{th}\,q_n\frac{a}{2}}{q_n\frac{a}{2}}+\frac{\mathrm{th}\gamma_n\frac{b}{2}}{\gamma_n\frac{b}{2}}\right] \tag{6-132}$$

于是，单位体积的涡流损耗为

$$\frac{P_e}{V}=\frac{\mathrm{Re}\oint\dot{\Pi}\cdot d\mathbf{S}}{V}=-\frac{4}{\pi^2}\omega\mu H_0^2\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{th}\,q_n\frac{a}{2}}{q_n\frac{a}{2}}+\frac{\mathrm{th}\gamma_n\frac{b}{2}}{\gamma_n\frac{b}{2}}\right] \tag{6-133}$$

解法二 第二种解法是设 $\dot{H}_z=\dot{H}_{z1}+\dot{H}_{z2}$，其中 $\dot{H}_{z1}$ 满足

$$\frac{\partial^2\dot{H}_{z1}}{\partial x^2}=j\omega\mu\sigma_y\dot{H}_{z1} \tag{6-134}$$

和边界条件

$$\dot{H}_{z1}\left(x=\pm\frac{a}{2}\right)=H_0 \tag{6-135}$$

$\dot{H}_{z2}$则满足

$$\sigma_x\frac{\partial^2\dot{H}_{z2}}{\partial x^2}+\sigma_y\frac{\partial^2\dot{H}_{z2}}{\partial y^2}=j\omega\mu\sigma_x\sigma_y\dot{H}_{z2} \tag{6-136}$$

和余下的边界条件

$$\dot{H}_{z2}\left(x=\pm\frac{a}{2}\right)=0,\quad\left[\dot{H}_{z1}+\dot{H}_{z2}\right]\left(y=\pm\frac{b}{2}\right)=H_0 \tag{6-137}$$

对于 $\dot{H}_{z1}$，求解的是一维方程，其解答为

$$\dot{H}_{z1}=H_0\frac{\mathrm{ch}p_y x}{\mathrm{ch}p_y\frac{a}{2}} \tag{6-138}$$

其中

$$p_y=\sqrt{j\omega\mu\sigma_y}=(1+j)k_y=\frac{1+j}{\Delta_y},\quad\Delta_y=\frac{1}{k_y}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_y}} \tag{6-139}$$

对于 $\dot{H}_{z2}$，设试解为

$$\dot{H}_{z2}=\dot{C}\,\mathrm{ch}\gamma y\cos\beta x \tag{6-140}$$

根据 $\dot{H}_{z2}\left(x=\pm\frac{a}{2}\right)=0$，可知

$$\beta_n=n\frac{\pi}{a},\quad n=1,3,5,\cdots \tag{6-141}$$

把式(6-140)代入式(6-136)，可知

$$\gamma_n=\sqrt{j\omega\mu\sigma_x+\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2} \tag{6-142}$$

由此

$$\dot{H}_{z2}=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{C}_n \mathrm{ch}\gamma_n y \cos n\frac{\pi}{a}x \tag{6-143}$$

常数 $\dot{C}_n$ 可根据边界条件 $[\dot{H}_{z1}+\dot{H}_{z2}]_{y=\pm\frac{b}{2}}=H_0$ 来确定：

$$H_0=H_0\frac{\mathrm{ch}p_y x}{\mathrm{ch}p_y\frac{a}{2}}+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{C}_n\mathrm{ch}\gamma_n\frac{b}{2}\cos n\frac{\pi}{a}x \tag{6-144}$$

由此可得，级数中的系数为

$$\dot{C}_n\mathrm{ch}\gamma_n\frac{b}{2}=\frac{2}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}H_0\left[1-\frac{\mathrm{ch}p_y x}{\mathrm{ch}p_y\frac{a}{2}}\right]\cos n\frac{\pi}{a}x dx$$

$$=\frac{4H_0}{n\pi}\sin\frac{\pi}{2}\frac{j\omega\mu\sigma_x}{j\omega\mu\sigma_x+\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2} \tag{6-145}$$

故

$$\dot{C}_n=\frac{4H_0}{n\pi}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\mathrm{ch}\gamma_n\frac{b}{2}}\frac{j\omega\mu}{j\omega\mu+\frac{1}{\sigma_y}\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2} \tag{6-145}$$

最后可得

$$\dot{H}_z=\dot{H}_{z1}+\dot{H}_{z2}$$

$$=H_0\left[\frac{\mathrm{ch}p_y x}{\mathrm{ch}p_y\frac{a}{2}}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\frac{j\omega\mu}{j\omega\mu+\frac{1}{\sigma_y}\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2}\frac{\mathrm{ch}\gamma_n y}{\mathrm{ch}\gamma_n\frac{b}{2}}\cos n\frac{\pi}{a}x\right] \tag{6-146}$$

可以证明，采用第二种解法时

$$\frac{P_e}{V}=-\frac{1}{2}\omega\mu H_0^2\,\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{th}p_y\frac{a}{2}}{p_y\frac{a}{2}}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{j\omega\mu}{j\omega\mu+\frac{1}{\sigma_y}\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2}\frac{\mathrm{th}\gamma_n\frac{b}{2}}{\gamma_n\frac{b}{2}}\right] \tag{6-147}$$

当 $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}>1000$ 时，上式近似等于

$$\frac{P_e}{V}\approx-\frac{1}{2}\omega\mu H_0^2\ \ \mathrm{Im}\frac{\mathrm{th}p_y\frac{a}{2}}{p_y\frac{a}{2}}=-\frac{1}{2}\omega\mu H_0^2\frac{1}{\xi}\frac{\sin\xi-\mathrm{sh}\xi}{\mathrm{ch}\xi+\cos\xi} \tag{6-148}$$

式中 $\xi=k_y a$.

当频率较低，使 $\xi\leqslant 1$ 时，$\frac{1}{\xi}\frac{\sin\xi-\mathrm{sh}\xi}{\mathrm{ch}\xi+\cos\xi}\approx-\frac{\xi^2}{31}$，此时

$$\frac{P_e}{V}\approx\frac{1}{12}\omega\mu H_0^2\xi^2=\frac{1}{24}\omega^2\mu^2\sigma_y H_0^2 a^2 \tag{6-149}$$

6-8 处于二维正弦磁场中矩形导体内的涡流[9,10]

变压器负载时，原、副线圈的导体即处于线圈所产生的漏磁场中. 当漏磁场随时间正弦变化时，导体内就会感生涡流，并产生涡流损耗. 如果不计线圈的曲率，并认为漏

磁场近似为二维平行平面磁场，则此问题可以简化成二维正弦涡流场问题，如图 6-22 所示.

设导体长度方向为 z 方向，导体电流随时间正弦变化，其幅值相量为 $\dot{I}_m$，导体四周的切向磁场强度给定为 $\dot{H}_{x1}$、$\dot{H}_{x2}$，$\dot{H}_{y1}$、$\dot{H}_{y2}$（幅值相量）；下面来求导体内部的磁场、电密分布和涡流损耗.

（一）向量磁位 $\dot{A}_z$ 的二维复涡流方程及其解答

若导体内的电密为 z 方向，则向量磁位亦是 z 方向，即 $\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{k}\dot{A}_z$；所以本题用 $\dot{\mathbf{A}}$ 来求解较为简便. 在正弦稳态情况下，$\dot{A}_z$ 满足二维复涡流方程

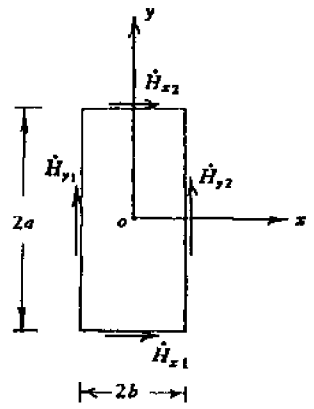


图 6-22　二维正弦磁场中的矩形导体

$$\frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial y^2}=j\omega\mu\sigma\dot{A}_z \tag{6-150}$$

导体的边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{H}_{x(y=-a)}=\dot{H}_{x1},\ \dot{H}_{x(y=a)}=\dot{H}_{x2};\\&\dot{H}_{y(x=-b)}=\dot{H}_{y1},\ \dot{H}_{y(x=b)}=\dot{H}_{y2}.\end{aligned}\right\} \tag{6-151}$$

把 $\dot{A}_z$ 的解答分成 $\dot{A}_{z1}$和 $\dot{A}_{z2}$两部分，其中 $\dot{A}_{z1}$仅是 x 的函数，$\dot{A}_{z2}$仅是 y 的函数；即

$$\dot{A}_z=\dot{A}_{z1}(x)+\dot{A}_{z2}(y) \tag{6-152}$$

把上式代入式（6-150）并进行变量分离，可知

$$\frac{\partial^2\dot{A}_{z1}}{\partial x^2}=j\omega\mu\sigma\dot{A}_{z1},\quad \frac{\partial^2\dot{A}_{z2}}{\partial y^2}=j\omega\mu\sigma\dot{A}_{z2} \tag{6-153}$$

由此可得 $\dot{A}_{z1}$和 $\dot{A}_{z2}$的解答为

$$\left.\begin{aligned}\dot{A}_{z1}&=C_1\mathrm{sh}px+C_2\mathrm{ch}px\\\dot{A}_{z2}&=D_1\mathrm{sh}py+D_2\mathrm{ch}py\end{aligned}\right\} \tag{6-154}$$

其中

$$p=\sqrt{j\omega\mu\sigma}=(1+j)k,\quad k=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{6-155}$$

C_1、C_2、D_1、D_2 为任意常数，可由边界条件确定.

导体内的磁场为

$$\left.\begin{aligned}\dot{B}_x&=\frac{\partial\dot{A}_z}{\partial y}=D_1p\mathrm{ch}py+D_2p\mathrm{sh}py\\\dot{B}_y&=-\frac{\partial\dot{A}_z}{\partial x}=-(C_1p\mathrm{ch}px+C_2p\mathrm{sh}px)\end{aligned}\right\} \tag{6-156}$$

把边界条件代入上式，即可确定

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\mu_0 \frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2p\mathrm{ch}pb}, \quad C_2 = -\mu_0 \frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2p\mathrm{sh}pb} \\ D_1 &= \mu_0 \frac{\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}}{2p\mathrm{ch}pa}, \quad D_2 = \mu_0 \frac{\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}}{2p\mathrm{sh}pa}. \end{aligned}\right\} \tag{6-157}$$

由此可得 $\dot{A}_z$、$\dot{H}_x$ 和 $\dot{H}_y$ 的解答为

$$\begin{aligned} \dot{A}_z = &-\mu_0\left(\frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2p}\frac{\mathrm{sh}px}{\mathrm{ch}pb}+\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2p}\frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{sh}pb}\right) \\ &+\mu_0\left(\frac{\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}}{2p}\frac{\mathrm{sh}py}{\mathrm{ch}pa}+\frac{\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}}{2p}\frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{sh}pa}\right) \end{aligned} \tag{6-158}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_x &= \frac{\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}}{2}\frac{\mathrm{ch}py}{\mathrm{ch}pa}+\frac{\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}}{2}\frac{\mathrm{sh}py}{\mathrm{sh}pb}. \\ \dot{H}_y &= \frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2}\frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{ch}pb}+\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}\frac{\mathrm{sh}px}{\mathrm{sh}pb} \end{aligned}\right\} \tag{6-159}$$

导体内的电流密度 $\dot{J}_z$ 为

$$\begin{aligned} \dot{J}_z = \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= \frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2}p\frac{\mathrm{sh}px}{\mathrm{ch}pb}+\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}p\frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{sh}pb} \\ &-\left(\frac{\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}}{2}p\frac{\mathrm{sh}py}{\mathrm{ch}pa}+\frac{\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}}{2}p\frac{\mathrm{ch}py}{\mathrm{sh}pa}\right) \end{aligned} \tag{6-160}$$

导体内的磁场和电密亦可以通过求解 $\dot{H}_x$ 和 $\dot{H}_y$ 的二维涡流方程来得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial y^2} &= j\omega\mu\sigma\dot{H}_x \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial y^2} &= j\omega\mu\sigma\dot{H}_y \end{aligned}\right\} \tag{6-161}$$

不难证明，所得结果是相同的.

（二）导体内的涡流损耗

普遍情况 单位长度导体内的焦耳损耗为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\dot{J}_z\dot{J}_z^*\,dxdy = \frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \dot{H}_y^*}{\partial x}-\frac{\partial \dot{H}_x^*}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}\frac{\partial \dot{H}_y^*}{\partial x}+\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}\frac{\partial \dot{H}_x^*}{\partial y}-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}\frac{\partial \dot{H}_x^*}{\partial y}-\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}\frac{\partial \dot{H}_y^*}{\partial x}\right)dxdy \end{aligned} \tag{6-162}$$

上式中的第一项经过运算和整理，其结果为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}\frac{\partial \dot{H}_y^*}{\partial x}dxdy &= \frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2}p\frac{\mathrm{sh}px}{\mathrm{ch}pb}+\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}p\frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{sh}pb}\right) \\ &\quad\times\left(\frac{\dot{H}_{y2}+\dot{H}_{y1}}{2}p\frac{\mathrm{sh}px}{\mathrm{ch}pb}+\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}p\frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{sh}pb}\right)^*dxdy \\ &= \frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left|\frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2}\right|^2|p|^2\left|\frac{\mathrm{sh}px}{\mathrm{ch}pb}\right|^2\right. \end{aligned}$$

$$+\left|\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}\right|^2|p|^2\left|\frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{sh}pb}\right|^2$$
$$+\left(\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}\right)\left(\frac{\dot{H}^*_{y1}+\dot{H}^*_{y2}}{2}\right)|p|^2\frac{\mathrm{ch}px\,\mathrm{sh}p^*x}{\mathrm{sh}pb\,\mathrm{ch}p^*b}$$
$$+\left(\frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2}\right)\left(\frac{\dot{H}^*_{y2}-\dot{H}^*_{y1}}{2}\right)|p|^2\frac{\mathrm{sh}px\,\mathrm{ch}p^*x}{\mathrm{ch}pb\,\mathrm{sh}p^*b}\Big]dxdy$$
$$=\frac{ak}{2\sigma}\Big[|\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}|^2\frac{\mathrm{sh}2kb-\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb+\cos 2kb}$$
$$+|\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}|^2\frac{\mathrm{sh}2kb+\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb-\cos 2kb}\Big]$$

同理，第二项为

$$\frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{\partial\dot{H}_x}{\partial y}\frac{\partial\dot{H}^*_x}{\partial y}dxdy=\frac{bk}{2\sigma}\Big[|\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}|^2\frac{\mathrm{sh}2ka-\sin 2ka}{\mathrm{ch}2ka+\cos 2ka}$$
$$+|\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}|^2\frac{\mathrm{sh}2ka+\sin 2ka}{\mathrm{ch}2ka-\cos 2ka}\Big]$$

第三项为

$$\frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial x}\frac{\partial\dot{H}^*_x}{\partial y}dxdy=\frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2}p\frac{\mathrm{sh}px}{\mathrm{ch}pb}+\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}p\frac{\mathrm{ch}px}{\mathrm{sh}pb}\right)$$
$$\times\left(\frac{\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}}{2}p\frac{\mathrm{sh}py}{\mathrm{ch}pa}+\frac{\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}}{2}p\frac{\mathrm{ch}py}{\mathrm{sh}pa}\right)^*dxdy$$
$$=\frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Big[\left(\frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2}\right)\left(\frac{\dot{H}^*_{x1}+\dot{H}^*_{x2}}{2}\right)|p|^2\frac{\mathrm{sh}px\,\mathrm{sh}p^*y}{\mathrm{ch}pb\,\mathrm{ch}p^*a}$$
$$+\left(\frac{\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}}{2}\right)\left(\frac{\dot{H}^*_{x2}-\dot{H}^*_{x1}}{2}\right)|p|^2\frac{\mathrm{sh}px\,\mathrm{ch}p^*y}{\mathrm{ch}pb\,\mathrm{sh}p^*a}$$
$$+\left(\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}\right)\left(\frac{\dot{H}^*_{x1}+\dot{H}^*_{x2}}{2}\right)|p|^2\frac{\mathrm{sh}p^*y\,\mathrm{ch}px}{\mathrm{sh}pb\,\mathrm{ch}p^*a}$$
$$+\left(\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}\right)\left(\frac{\dot{H}^*_{x2}-\dot{H}^*_{x1}}{2}\right)|p|^2\frac{\mathrm{ch}px\,\mathrm{ch}p^*y}{\mathrm{sh}pb\,\mathrm{sh}p^*a}\Big]dxdy$$
$$=\frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\frac{\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}}{2}\right)\left(\frac{\dot{H}^*_{x2}-\dot{H}^*_{x1}}{2}\right)|p|^2\frac{\mathrm{ch}px\,\mathrm{ch}p^*y}{\mathrm{sh}pb\,\mathrm{sh}p^*a}dxdy$$
$$=\frac{1}{2\sigma}(\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1})(\dot{H}^*_{x2}-\dot{H}^*_{x1})$$

同理，第四项为

$$\frac{1}{2\sigma}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{\partial\dot{H}_x}{\partial y}\frac{\partial\dot{H}^*_y}{\partial x}dxdy=\frac{1}{2\sigma}(\dot{H}^*_{y2}-\dot{H}^*_{y1})(\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1})$$

于是

$$P=\frac{ak}{2\sigma}\Big[|\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}|^2\frac{\mathrm{sh}2kb-\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb+\cos 2kb}+|\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}|^2\frac{\mathrm{sh}2kb+\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb-\cos 2kb}\Big]$$
$$-\frac{1}{2\sigma}[(\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1})(\dot{H}^*_{x2}-\dot{H}^*_{x1})+(\dot{H}^*_{y2}-\dot{H}^*_{y1})(\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1})]$$

$$+\frac{bk}{2\sigma}\left[|\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}|^2\frac{\mathrm{sh}2ka-\sin 2ka}{\mathrm{ch}2ka+\cos 2ka}+|\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}|^2\frac{\mathrm{sh}2ka+\sin 2ka}{\mathrm{ch}2ka-\cos 2ka}\right] \tag{6-163}$$

根据安培环路定律，

$$\dot{I}_m=2a(\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1})+2b(\dot{H}_{x1}-\dot{H}_{x2}) \tag{6-164}$$

所以电密均匀分布时，单位长度的焦耳损耗为

$$\frac{1}{2}I_m^2R_{=}=\frac{1}{8ab\sigma}\dot{I}_m\dot{I}_m^*=\frac{a}{2b\sigma}|\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}|^2-\frac{1}{2\sigma}(\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1})(\dot{H}_{x2}^*-\dot{H}_{x1}^*)$$
$$-\frac{1}{2\sigma}(\dot{H}_{y2}^*-\dot{H}_{y1}^*)(\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1})+\frac{b}{2a\sigma}|\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}|^2 \tag{6-165}$$

式中 $R_{=}$表示单位长度时导体的直流电阻，$R_{=}=\frac{1}{4ab\sigma}$. 考虑到式(6-165)，式(6-163)可改写为

$$\begin{aligned}P=&\frac{1}{2}I_m^2R_{=}+\frac{a}{2b\sigma}\left\{|\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}|^2kb\frac{\mathrm{sh}2kb-\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb+\cos 2kb}\right.\\&\left.+|\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}|^2\left(kb\frac{\mathrm{sh}2kb+\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb-\cos 2kb}-1\right)\right\}\\&+\frac{b}{2a\sigma}\left\{|\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}|^2ka\frac{\mathrm{sh}2ka-\sin 2ka}{\mathrm{ch}2ka+\cos 2ka}\right.\\&\left.+|\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}|^2\left(ka\frac{\mathrm{sh}2ka+\sin 2ka}{\mathrm{ch}2ka-\cos 2ka}-1\right)\right\}\\=&\frac{1}{2}I_m^2R_{=}+\frac{a}{2b\sigma}\{|\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}|^2\eta(kb)+|\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}|^2[\varphi(kb)-1]\}\\&+\frac{b}{2a\sigma}\{|\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}|^2\eta(ka)+|\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}|^2[\varphi(ka)-1]\}\end{aligned} \tag{6-166}$$

式中

$$\eta(kb)=kb\frac{\mathrm{sh}2kb-\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb+\cos 2kb},\quad \varphi(kb)=kb\frac{\mathrm{sh}2kb+\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb-\cos 2kb} \tag{6-167}$$

若 $\dot{H}_{y1}=H_{y1}\theta_{y1}$，$\dot{H}_{y2}=H_{y2}\theta_{y2}$，$\dot{H}_{x1}=H_{x1}\theta_{x1}$，$\dot{H}_{x2}=H_{x2}\theta_{x2}$，则

$$\left.\begin{aligned}|\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}|^2&=H_{y1}^2+H_{y2}^2+2H_{y1}H_{y2}\cos\theta_y\\|\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}|^2&=H_{y1}^2+H_{y2}^2-2H_{y1}H_{y2}\cos\theta_y\end{aligned}\right\} \tag{6-168}$$

式中 $\theta_y=\theta_{y1}-\theta_{y2}$. 对$|\dot{H}_{x1}+\dot{H}_{x2}|^2$和$|\dot{H}_{x2}-\dot{H}_{x1}|^2$亦有类似的关系.

$\dot{H}_{x1}$和$\dot{H}_{x2}$同相，$\dot{H}_{y1}$和$\dot{H}_{y2}$同相时 若$\dot{H}_{x1}$与$\dot{H}_{x2}$同相，$\dot{H}_{y1}$与$\dot{H}_{y2}$同相，则

$$|\dot{H}_{y1}+\dot{H}_{y2}|^2=(H_{y1}+H_{y2})^2,\quad |\dot{H}_{y2}-\dot{H}_{y1}|^2=(H_{y2}-H_{y1})^2$$

此时，经过一系列运算和整理，式(6-166)可化成下列形式：

$$\begin{aligned}P=&\frac{1}{2}I_m^2R_{=}+\frac{a}{2b\sigma}\left\{(H_{y2}-H_{y1})^2\left(2kb\frac{\mathrm{sh}4kb+\sin 4kb}{\mathrm{ch}4kb-\cos 4kb}-1\right)\right.\\&\left.+H_{y1}H_{y2}4kb\frac{\mathrm{sh}2kb-\sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb+\cos 2kb}\right\}+\frac{b}{2a\sigma}\left\{(H_{x2}-H_{x1})^2\left(2ka\frac{\mathrm{sh}4ka+\sin 4ka}{\mathrm{ch}4ka-\cos 4ka}-1\right)\right.\\&\left.+H_{x1}H_{x2}4ka\frac{\mathrm{sh}2ka-\sin 2ka}{\mathrm{ch}2ka+\cos 2ka}\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}I_m^2 R_{\sim} + \frac{a}{2b\sigma}\{(H_{y2}-H_{y1})^2[\varphi(2kb)-1] + H_{y1}H_{y2}\psi(2kb)\}$$

$$+ \frac{b}{2a\sigma}\{(H_{x2}-H_{x1})^2[\varphi(2ka)-1] + H_{x1}H_{x2}\psi(2ka)\} \tag{6-169}$$

式中

$$\psi(2kb) = 4kb\,\frac{\mathrm{sh}2kb - \sin 2kb}{\mathrm{ch}2kb + \cos 2kb} \tag{6-170}$$

不难看出，式（6-169）中的第二项和第三项分别为 y 轴和 x 轴磁场在导体内所产生的涡流损耗. 由此可知，当长直导体处于既有平行分量 $\dot{H}_y$、又有正交分量 $\dot{H}_x$ 的正弦时变磁场中时，导体中的总涡流损耗应为平行和正交分量磁场分别引起的涡流损耗之和.

导体绝缘的影响 通常导体外部均包有绝缘，考虑绝缘影响时，可对 k 值作如下修正：

$$k_x = \sqrt{\frac{a}{a'}\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{a}{a'}}k, \qquad k_y = \sqrt{\frac{b}{b'}\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{b}{b'}}k \tag{6-171}$$

式中 a'、b' 为计及绝缘时导体的外形尺寸. 此时式(6-169)应改为

$$P = \frac{1}{2}I_m^2 R_{\sim} + \frac{a'^2}{2ab\sigma}\{(H_{y2}-H_{y1})^2[\varphi(2k_x b)-1] + H_{y1}H_{y2}\varphi(2k_x b)\}$$

$$+ \frac{b'^2}{2ab\sigma}\{(H_{x2}-H_{x1})^2[\varphi(2k_y a)-1] + H_{x1}H_{x2}\psi(2k_y a)\} \tag{6-172}$$

（三）导体边界条件的确定

在上面的推导中，认为导体四周的边界条件已经给定. 事实上，由于导体处于整个线圈所产生的漏磁场中，所以必须求出整个漏磁场的分布. 考虑到导体内部涡流对边界条件的影响很小，故可用导体电密均匀分布时所算出的整体漏磁场来确定每根导体的边界条件，并由此算出每根导体的总损耗.

6-9 圆形半闭口槽内导体的电流集肤效应[11,12]

圆形半闭口槽是一种常用的鼠笼或阻尼笼槽形. 设槽开口的角度为 $\theta=2\epsilon$，导条的半径为 R_0，导条紧靠槽壁，其间的间隙可略去不计.

（一）电密的二维复涡流方程及其解答

设导条的长度方向为 z 方向，电密随时间正弦变化，$\dot{J}_z=\dot{J}_z(r,\theta)$，则 $\dot{J}_z$ 将满足极坐标系中的复涡流方程：

$$\frac{\partial^2 \dot{J}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{J}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{J}_z}{\partial \theta^2} = j\omega\mu\sigma\dot{J}_z \tag{6-173}$$

用分离变量法求解上式，设

$$\dot{J}_z = \dot{R}(r)\cdot\dot{\Theta}(\theta) \tag{6-174}$$

把上式代入式(6-173)，可得

$$r^2\frac{\dot{R}''}{\dot{R}}+r\frac{\dot{R}'}{\dot{R}}+\frac{\dot{\Theta}''}{H\dot{\Theta}}=j\omega\mu\sigma r^2 \tag{6-175}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\dot{\Theta}''}{\dot{\Theta}}=-n^2\\&R''+\frac{1}{r}\dot{R}'-\left(p^2+\frac{n^2}{r^2}\right)\dot{R}=0\end{aligned}\right\} \tag{6-176}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&p=\sqrt{j\omega\mu\sigma}=(1+j)k\\&k=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{6-177}$$

式(6-176)的解答为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\Theta}_n=\dot{A}_n\cos n\theta+\dot{B}_n\sin n\theta\\&\dot{R}_n=\dot{C}_nI_n(pr)+\dot{D}_nK_n(pr)\end{aligned}\right\} \tag{6-178}$$

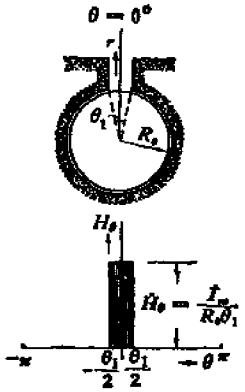


图 6-23 圆形半闭口槽

式中 I_n 和 K_n 为第一种和第二种变样的贝塞尔函数.

根据图形的对称性，$\dot{J}_z(r,\theta)=\dot{J}_z(r,-\theta)$，故 $\dot{B}_n=0$. 又当 $r=0$ 时，电密为有限值，故 $\dot{D}_n=0$. 于是

$$\dot{J}_z=\sum_{n=0}^{\infty}\dot{F}_nI_n(pr)\cos n\theta \tag{6-179}$$

常数 $\dot{F}_n$ 可根据边界条件确定.

近似地认为，在导体表面 $r=R_0$ 处的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{H}_\theta=\frac{\dot{I}_m}{R_0\theta_1},\quad -\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\varepsilon\\&\dot{H}_\theta=0,\quad \varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{6-180}$$

把上式展成傅氏级数

$$\dot{H}_{\theta(r=R_0)}=\frac{\dot{I}_m}{2\pi R_0}+\frac{\dot{I}_m}{\pi R_0}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\cos n\theta \tag{6-181}$$

再通过 $\frac{\partial\dot{J}_z}{\partial r}=j\omega\mu\sigma\,\dot{H}_\theta$，以求出导体表面处的 $\dot{H}_\theta$，并与式（6-181）相比较，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\dot{J}_z}{\partial r}_{(r=R_0)}&=\sum_{n=0,1,2,\cdots}^{\infty}\dot{F}_npI_n'(pR_0)\cos n\theta\\&=p^2\left(\frac{\dot{I}_m}{2\pi R_0}+\frac{\dot{I}_m}{\pi R_0}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\cos n\theta\right)\end{aligned} \tag{6-182}$$

由此可确定

$$\dot{F}_0=\frac{p\dot{I}_m}{2\pi R_0}\frac{1}{I_0'(pR_0)},\quad \dot{F}_n=\frac{p\dot{I}_m}{\pi R_0}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\frac{1}{I_n'(pR_0)} \tag{6-183}$$

把 $\dot{F}_0$ 和 $\dot{F}_n$ 代回到式(6-179)，可得

$$\dot{J}_z = \frac{p\dot{I}_m}{2\pi R_0}\frac{I_0(pr)}{I_0(pr_{0_0})} + \frac{p\dot{I}_m}{\pi R_0}\sum_1^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\frac{I_n(pr)}{I_n(pR_0)}\cos n\theta \tag{6-184}$$

（二）交流电阻和漏抗

在导体顶部，长度 l 的导体内的电压为

$$\dot{E}_{z(r=R_0,\theta=0^\circ)}l = \frac{l}{\sigma}\left[\frac{p\dot{I}_m}{2\pi R_0}\frac{I_0(pR_0)}{I_0(pR_0)} + \frac{p\dot{I}_m}{\pi R_0}\sum_1^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\frac{I_n(pR_0)}{I_n(pR_0)}\right]$$

$$= \dot{I}_m(R_\sim + jX_\sim) \tag{6-185}$$

于是导体的交流电阻和漏抗（不包括槽开口处的漏抗）为

$$R_\sim + jX_\sim = \frac{lp}{\sigma 2\pi R_0}\left[\frac{I_0(pR_0)}{I_0(pR_0)} + 2\sum_1^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\frac{I_n(pR_0)}{I_n(pR_0)}\right] \tag{6-186}$$

电阻增大系数 k_r 为

$$k_r = \frac{R_\sim}{R_=} = \mathrm{Re}\left\{\frac{pR_0}{2}\left[\frac{I_0(pR_0)}{I_0(pR_0)} + 2\sum_1^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\frac{I_n(pR_0)}{I_n(pR_0)}\right]\right\} \tag{6-187}$$

6-10 用叠加法计算涡流损耗[13]

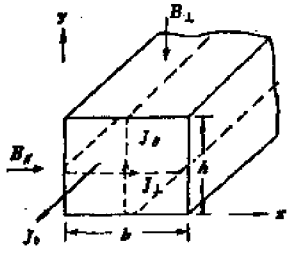
当载流导体处于对其高度 h 来讲既有平行、又有正交分量的正弦交变电磁场中时，导体中的焦耳损耗可以认为是三部分的叠加：一是直流电阻损耗；二是平行磁场所产生的涡流损耗；三是正交磁场所产生的涡流损耗．证明如下．

（一）叠加法的证明

设导体中的总电流密度为 J_z

$$J_z = J_0 + J_\parallel + J_\perp \tag{6-188}$$

其中 J_0 为不考虑涡流作用时的电密；$J_\parallel$ 和 $J_\perp$ 分别为平行和正交磁场所产生的电密；如图 6-24 所示．再设 $J_\parallel$ 仅为一个坐标（例如坐标 y）的函数，$J_\perp$ 则为另一个坐标（例如坐标 x）的函数．则沿 z 轴单位长度中导体的焦耳损耗 P_R 应为：



6-24 把电密分成 J_0、$J_\parallel$、$J_\perp$三部分

$$P_R = \frac{1}{\sigma}\int_0^b\int_0^h J_z^2 dxdy = \frac{1}{\sigma}\int_0^b\int_0^h (J_0 + J_\parallel + J_\perp)^2 dxdy$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[J_0^2 hb + \int_0^b\int_0^h J_\parallel^2 dxdy + \int_0^b\int_0^h J_\perp^2 dxdy\right.$$

$$+ 2J_0\int_0^b\int_0^h J_\parallel dxdy + 2J_0\int_0^b\int_0^h J_\perp dxdy$$

$$\left. + 2\int_0^b\int_0^h J_\parallel J_\perp dxdy\right] \tag{6-189}$$

由于 $J_\parallel$ 和 $J_\perp$ 为涡流电密，所以

$$\int_0^h J_\parallel dy = 0, \quad \int_0^b J_\perp dx = 0 \tag{6-190}$$

于是式(6-189)简化为

$$P_R = \frac{1}{\sigma}J_0^2hb + \int_0^b\int_0^h \frac{J_{\parallel}^2}{\sigma}dxdy + \int_0^b\int_0^h \frac{J_{\perp}^2}{\sigma}dxdy \tag{6-191}$$

不难看出，上式中第一部分为 J_0 产生的损耗，第二和第三部分分别为 $J_{\parallel}$ 和 $J_{\perp}$ 所产生的损耗.

下面来研究三种常见的情况.

（二）截面为矩形或圆形的导体置于均匀分布的横向正弦磁场内

矩形导体 设外磁场 $\dot{B}_0$ 为均匀分布的正弦磁场，$\dot{B}_0$ 与导体的高度 h 垂直，如图 6-25 所示；则围绕着 $y=0$ 的中性面，导体内将感生涡流. 根据电磁感应定律，y 处的感应电

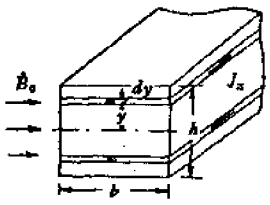


图 6-25 矩形导体置放在横向正弦磁场中

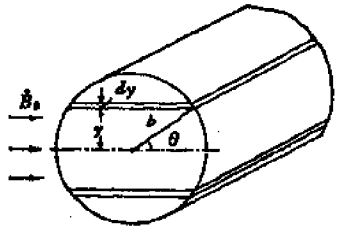


图 6-26 圆形导体置于横向正弦磁场内

场强度 E_z 应为

$$E_z = \omega B_0 y \tag{6-192}$$

于是电密 J_z 为

$$J_z = \sigma E_z = \omega\sigma B_0 y \tag{6-193}$$

沿 z 方向单位长度的涡流损耗 P_e（单位 W/m）为

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{J_z^2}{\sigma}bdy = \frac{b}{2\sigma}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\omega\sigma B_0 y)^2 dy$$

$$= \frac{1}{24}\sigma\omega^2 bh^3 B_0^2 = \frac{1}{24}\sigma h^2\omega^2 B_0^2 S \tag{6-194}$$

式中 $S=bh$ 为导体的截面积，B_0 为外磁场的幅值.

圆形导体 若导体截面为圆形，则感应电密 J_z 为

$$J_z = \omega\sigma B_0 y \tag{6-195}$$

每单位轴向长度的涡流损耗为

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} \frac{J_x^2}{\sigma} 2\sqrt{b^2 - y^2}dy$$

$$= 2\sigma\omega^2 B_0^2 \int_0^b y^2\sqrt{b^2 - y^2}dy \tag{6-196}$$

设 $y = b\sin\theta$， $dy = b\cos\theta d\theta$， $\sqrt{b^2 - y^2} = b\cos\theta$ (6-197)

则式(6-196)可改写为

$$P_e = 2\sigma\omega^2 B_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^4 \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{8}\sigma b^4\omega^2 B_0^2$$

$$= \frac{1}{32}\sigma(2b)^2\omega^2 B_0^2 S \tag{6-198}$$

式中 $S=\pi b^2$.

（三）矩形导体在直线分布的正弦磁场内

设磁场 $\dot{B}_x$ 沿导体高度方向作直线分布，如图 6-27 所示；

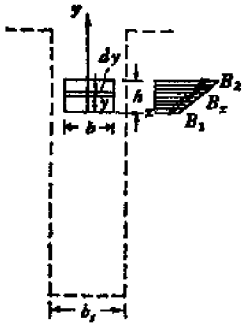


图 6-27　矩形导体在直线分布的正弦磁场内

$$\dot{B}_x=\dot{B}_1+(\dot{B}_2-\dot{B}_1)\frac{y}{h} \tag{6-199}$$

则由 $\mathrm{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\dot{\mathbf{B}}$ 可知，

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}=-j\omega\dot{B}_x \tag{6-200}$$

故
$$\dot{J}_z=\sigma\dot{E}_z=-j\omega\sigma\int\dot{B}_x\,dy$$
$$=-j\omega\sigma\int\left[\dot{B}_1+(\dot{B}_2-\dot{B}_1)\frac{y}{h}\right]dy$$
$$=-j\omega\sigma\left[\dot{B}_1y+(\dot{B}_2-\dot{B}_1)\frac{y^2}{2h}+\dot{C}\right] \tag{6-201}$$

常数 C 可根据

$$\int_0^h\dot{J}_z b\,dy=0 \tag{6-202}$$

来确定，由此可知

$$\dot{C}=-\frac{h}{2}\left(\dot{B}_1+\frac{\dot{B}_2-\dot{B}_1}{3}\right) \tag{6-203}$$

于是

$$\dot{J}_z=-j\omega\sigma\left[\dot{B}_1y+(\dot{B}_2-\dot{B}_1)\frac{y^2}{2h}-\frac{h}{2}\left(\dot{B}_1+\frac{\dot{B}_2-\dot{B}_1}{3}\right)\right] \tag{6-204}$$

沿 z 方向单位长度的损耗 P_z（单位 W/m）为

$$P_z=\frac{1}{2}\int_0^h\frac{J_z^2}{\sigma}b\,dy=\frac{\sigma b\omega^2}{2}\int_0^h\left[B_1y+(B_2-B_1)\frac{y^2}{2h}-\frac{h}{2}\left(B_1+\frac{B_2-B_1}{3}\right)\right]^2dy$$
$$=\frac{1}{24}\sigma\omega^2bh^3\left[B_1B_2+\frac{4}{15}(B_2-B_1)^2\right] \tag{6-205}$$

若该导体为电机槽中的第 m 根串联导体，则

$$B_1=\mu_0\frac{(m-1)I_m}{b_s},\qquad B_2=\mu_0\frac{mI_m}{b_s} \tag{6-206}$$

于是

$$P_{z(m)}=\frac{1}{24}\sigma\omega^2bh^3\left(\frac{\mu_0}{b_s}\right)^2\left[\frac{4}{15}+m(m-1)\right]I_m^2 \tag{6-207}$$

各根导体的平均涡流损耗为

$$P_{z(av)}=\frac{1}{n}\sum_1^\infty P_{z(m)}=\frac{1}{24}\sigma\omega^2bh^3\left(\frac{\mu_0}{b_s}\right)^2\left[\frac{4}{15}+\frac{n^2-1}{3}\right]I_m^2$$
$$\approx\frac{1}{24}\sigma\omega^2bh^3\left(\frac{\mu_0}{b_s}\right)^2\frac{n^2}{3}I_m^2 \tag{6-208}$$

平均电阻增大系数 k_r 为

$$k_r = 1 + \frac{2P_e}{I_m^2 R_=} \approx 1 + \left(\frac{\sigma\pi f b \mu_0 h^2 n}{3b_s}\right)^2 \tag{6-209}$$

即和式(6-74)一致.

(四) 近邻效应

导体内的电密分布受到邻近同频电流所生磁场的影响,称为近邻效应.

设有一单相平行线路,导线间的距离为 r,如图 6-28 所示;则由近邻效应所产生的涡流损耗应为:

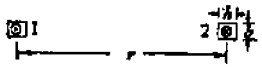


图 6-28 近邻效应

$$P_e = \frac{1}{24}\sigma h^2 \omega^2 B_0^2 S \tag{6-210}$$

式中 B_0 为导线 1 在导线 2 处所产生的磁感强度(幅值)

$$B_0 \approx \frac{\mu_0 I_m}{2\pi r} \tag{6-211}$$

把 B_0 代入式(6-210),可得

$$P_e \approx \frac{1}{24}\sigma h^2 \omega^2 S\left(\frac{\mu_0 I_m}{2\pi r}\right)^2 \tag{6-212}$$

由近邻效应所引起的电阻增大系数为

$$\frac{R_\sim}{R_=} = 1 + \frac{2P_e}{\frac{1}{\sigma S} I_m^2} = 1 + \frac{\mu_0^2}{48\pi^2}\sigma^2\omega^2\frac{h^2 S^2}{r^2} \tag{6-213}$$

考虑到 $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$,所以

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_\sim}{R_=} &\approx 1 + \frac{1}{12\pi^2}\frac{b^2 h^4}{r^2\Delta^4} \quad \text{(矩形导线)} \\ &\approx 1 + \frac{1}{4}\frac{b^6}{r^2\Delta^4} \quad \text{(圆形导线)} \end{aligned}\right\} \tag{6-214}$$

一般来讲,导线内常常既有集肤效应、又有邻近效应,此时可近似地把两个电阻增加系数相乘以计及这两种效应.

6-11 行波磁场作用在导电平板上时平板内的涡流[14]

直线电机内的电磁场和电磁力,同步电机极靴表面的涡流和表面损耗,汽轮发电机压板上的涡流和涡流损耗等问题,经过一定的简化,都可以化为本节所研究的行波磁场作用在导电平板上的问题.

图 6-29 表示一个四个区域的二维模型. 区域 1 为定子铁心,其磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$,电导率 $\sigma_1=0$;区域 2 为气隙,宽度为 δ,磁导率 $\mu_2=\mu_0$,电导率 $\sigma_2=0$;区域 3 为导电平板,厚度为 d,磁导率为 μ_3,电导率为 σ_3;区域 4 为空气,$\mu_4=\mu_0$,$\sigma_4=0$. 设定子表面有一正弦行波电流片,其电负荷 $\mathbf{K}$ 为

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}\, K_s \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right) = \mathbf{k}\,\mathrm{Re}\left[K_s e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right)}\right] \tag{6-215}$$

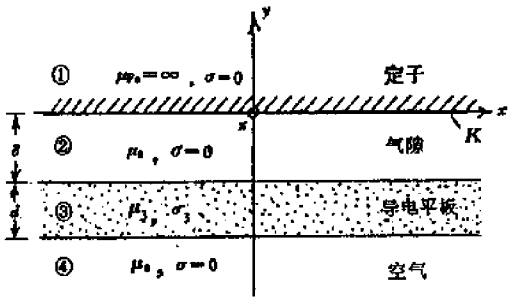


图 6-29　正弦分布的行波磁场作用在导电平板上时

式中 K_z 为电负荷的幅值；若 K_z 由对称三相电流产生，则 $K_z=\dfrac{3\sqrt{2}N_1k_{w1}I}{p_0\tau}$，其中 N_1 为每相匝数，k_{w1} 为基波绕组因数，p_0 为极对数，τ 为极距，I 为相电流的有效值. 下面来求区域 2、3、4 内的磁场和平板内的涡流.

（一）基本方程及其通解

把问题作为二维平面电磁场问题来处理. 由于 K 为 z 方向，所以各个区域内的向量磁位亦是 z 方向，

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{A}(x,y,t)=\mathbf{k}A_z\\&A_z=A_z(y)\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{\tau}x-\varphi\right)=\mathrm{Re}\left[\dot{A}_z e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}x\right)}\right]\end{aligned}\right\}\tag{6-216}$$

在正弦稳态情况下，$\dfrac{\partial}{\partial t}=j\omega$，$\dfrac{\partial}{\partial x}=-j\dfrac{\pi}{\tau}$.

在区域 2（气隙区）内，$\sigma_2=0$，向量磁位 $\dot{A}_{z2}$ 满足二维拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2\dot{A}_{z2}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{A}_{z2}}{\partial y^2}=0\tag{6-217}$$

考虑到 $\dfrac{\partial^2\dot{A}_{z2}}{\partial x^2}=\left(-j\dfrac{\pi}{\tau}\right)^2\dot{A}_{z2}$，所以上式可改写成

$$\frac{\partial^2\dot{A}_{z2}}{\partial y^2}-\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\dot{A}_{z2}=0\tag{6-218}$$

上式的解答为

$$\dot{A}_{z2}=C_2\mathrm{sh}\frac{\pi}{\tau}y+D_2\mathrm{ch}\frac{\pi}{\tau}y\tag{6-219}$$

在区域 3（导电平板区）内，$\dot{A}_{z3}$ 满足二维复涡流方程：

$$\frac{\partial^2\dot{A}_{z3}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{A}_{z3}}{\partial y^2}=j\omega\mu\sigma\dot{A}_{z3}\tag{6-220}$$

考虑到 $\dfrac{\partial^2\dot{A}_{z3}}{\partial x^2}=\left(-j\dfrac{\pi}{\tau}\right)^2\dot{A}_{z3}$，上式可改写成

$$\frac{\partial^2\dot{A}_{z3}}{\partial y^2}-\left[\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2+j\omega\mu\sigma\right]\dot{A}_{z3}=0\tag{6-221}$$

上式的解答为

$$\dot{A}_{z3}=C_3\mathrm{sh}\beta y+D_3\mathrm{ch}\beta y\tag{6-222}$$

其中

$$\beta=\sqrt{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2+j\omega\mu\sigma}\tag{6-223}$$

在区域4（空气区）内，$\dot{A}_{z4}$满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_{z4}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_{z4}}{\partial y^2} = 0 \tag{6-224}$$

或

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_{z4}}{\partial y^2} - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \dot{A}_{z4} = 0 \tag{6-225}$$

上式的解答为

$$\dot{A}_{z4} = C_4 e^{\frac{\pi}{\tau}y} + D_4 e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \tag{6-226}$$

（二）边界条件和任意常数的确定

本问题的边界条件为

1. 区域2的边界条件　由于$\mu_{Fe}=\infty$，铁心内的磁场强度为0，故在铁心表面处，场强的切向分量就等于该处的电负荷值；即

$$\dot{H}_{x2(y=0)} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \dot{A}_{z2}}{\partial y}_{(y=0)} = K_z \tag{6-227}$$

由此可以确定

$$C_2 = \mu_0 \frac{\pi}{\tau} K_z \tag{6-228}$$

故

$$\dot{A}_{z2} = \mu_0 \frac{\pi}{\tau} K_z \mathrm{sh}\frac{\pi}{\tau}y + D_2 \mathrm{ch}\frac{\pi}{\tau}y \tag{6-229}$$

2. 区域4的边界条件　对区域4，当$y\to-\infty$时，$\dot{A}_{z4}$为有限．由此可知$D_4=0$．于是

$$\dot{A}_{z4} = C_4 e^{\frac{\pi}{\tau}y} \tag{6-230}$$

3. 区域2和3的交界面条件　在区域2和3的交界面处，磁感强度的法向分量应当连续，磁场强度的切向分量应当连续；即$y=-\delta$时，

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_{z2} &= \dot{A}_{z3} \\ \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \dot{A}_{z2}}{\partial y} &= \frac{1}{\mu_3}\frac{\partial \dot{A}_{z3}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{6-231}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} -\mu_0 \frac{\tau}{\pi} K_z \mathrm{sh}\frac{\pi}{\tau}\delta + D_2 \mathrm{ch}\frac{\pi}{\tau}\delta &= -C_3 \mathrm{sh}\beta\delta + D_3 \mathrm{ch}\beta\delta \\ \frac{1}{\mu_0}\left(\mu_0 K_z \mathrm{ch}\frac{\pi}{\tau}\delta - D_2\frac{\pi}{\tau}\mathrm{sh}\frac{\pi}{\tau}\delta\right) &= \frac{1}{\mu_3}(C_3\beta\,\mathrm{ch}\beta\delta - D_3\beta\,\mathrm{sh}\beta\delta) \end{aligned}\right\} \tag{6-232}$$

4. 区域3和4的交界面条件　在3和4的交界面处，交界面条件为$y=-(\delta+d)$时，

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_{z3} &= \dot{A}_{z4} \\ \frac{1}{\mu_3}\frac{\partial \dot{A}_{z3}}{\partial y} &= \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \dot{A}_{z4}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{6-233}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} &-C_3\mathrm{sh}\beta(d+\delta)+D_3\mathrm{ch}\beta(d+\delta)=C_4e^{-\frac{\pi}{\tau}(d+\delta)}\\ &\frac{1}{\mu_3}[C_3\beta\,\mathrm{ch}\beta(d+\delta)-D_3\beta\,\mathrm{sh}\beta(d+\delta)]=\frac{1}{\mu_0}C_4\frac{\pi}{\tau}e^{-\frac{\pi}{\tau}(d+\delta)}\end{aligned}\right\} \tag{6-234}$$

联解式(6-232)和(6-234)，即可确定 C_3、C_4、D_2 和 D_3 四个常数为

$$C_3=\frac{\mu_0K_x}{\frac{\pi}{\tau}\mathrm{ch}\frac{\pi}{\tau}\delta\,\mathrm{ch}\beta\delta}\cdot\frac{1+\gamma\mathrm{th}\beta(d+\delta)}{[1+\gamma\mathrm{th}\beta(d+\delta)]\left(\gamma-\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta\,\mathrm{th}\beta\delta\right)+[\gamma+\mathrm{th}\beta(d+\delta)]\left(\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta-\gamma\mathrm{th}\beta\delta\right)} \tag{6-235}$$

$$D_3=\frac{\mu_0K_x}{\frac{\pi}{\tau}\mathrm{ch}\frac{\pi}{\tau}\delta\,\mathrm{ch}\beta\delta}\cdot\frac{\gamma+\mathrm{th}\beta(d+\delta)}{[1+\gamma\mathrm{th}(\beta+\delta)]\left(\gamma-\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta\,\mathrm{th}\beta\delta\right)+[\gamma+\mathrm{th}\beta(d+\delta)]\left(\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta-\gamma\mathrm{th}\beta\delta\right)} \tag{6-236}$$

$$D_2=\mu_0\frac{\tau}{\pi}K_x\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta+\frac{\mu_0K_x}{\frac{\pi}{\tau}\mathrm{ch}^2\frac{\pi}{\tau}\delta}\cdot\frac{\gamma+\mathrm{th}\beta(d+\delta)-\mathrm{th}\beta\delta[1+\gamma\mathrm{th}\beta(d+\delta)]}{[1+\gamma\mathrm{th}(\beta+\delta)]\left(\gamma-\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta\,\mathrm{th}\beta\delta\right)+[\gamma+\mathrm{th}\beta(d+\delta)]\left(\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta-\gamma\mathrm{th}\beta\delta\right)} \tag{6-237}$$

$$C_4=\frac{\mu_0\gamma K_xe^{\frac{\pi}{\tau}(d+\delta)}}{\frac{\pi}{\tau}\mathrm{ch}\frac{\pi}{\tau}\delta\,\mathrm{ch}\beta\delta\,\mathrm{ch}\beta(d+\delta)}\cdot\frac{1}{[1+\gamma\mathrm{th}(\beta+\delta)]\left(\gamma-\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta\,\mathrm{th}\beta\delta\right)+[\gamma+\mathrm{th}\beta(d+\delta)]\left(\mathrm{th}\frac{\pi}{\tau}\delta-\gamma\mathrm{th}\beta\delta\right)} \tag{6-238}$$

式中

$$\gamma=\frac{\mu_0}{\mu_3}\frac{\tau}{\pi}\beta \tag{6-239}$$

平板内的磁感强度和电流密度为

$$\left.\begin{aligned} \dot{B}_{x3}&=\frac{\partial\dot{A}_{x3}}{\partial y}=\beta(C_3\mathrm{ch}\beta y+D_3\mathrm{sh}\beta y)\\ \dot{B}_{y3}&=-\frac{\partial\dot{A}_{x3}}{\partial x}=j\frac{\pi}{\tau}\dot{A}_{x3}=j\frac{\pi}{\tau}(C_3\mathrm{sh}\beta y+D_3\mathrm{ch}\beta y)\end{aligned}\right\} \tag{6-240}$$

$$\dot{J}_{x3}=-j\omega\sigma\dot{A}_{x3}=-j\omega\sigma(C_3\mathrm{sh}\beta y+D_3\mathrm{ch}\beta y) \tag{6-241}$$

而

$$\left.\begin{aligned} &B_{x3}=\mathrm{Re}\left[\dot{B}_{x3}e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{\tau}x\right)}\right],\quad B_{y3}=\mathrm{Re}\left[\dot{B}_{y3}e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{\tau}x\right)}\right]\\ &J_{x3}=\mathrm{Re}\left[\dot{J}_{x3}e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{\tau}x\right)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{6-242}$$

6-12 计及涡流反应时正弦行波电流片的镜像[2,14]

第二章中研究了恒定磁场中的镜像. 现在来研究导电区中存在涡流反应时，正弦行波电流片的镜像.

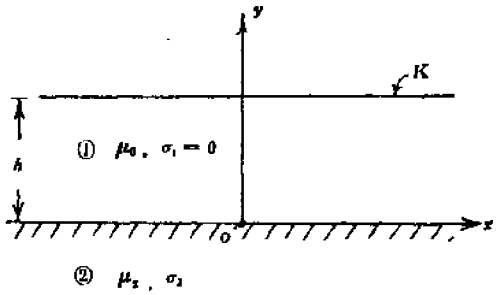


图 6-30 置于半无限大导电区上的正弦电流片

图 6-30 表示一个电流为 z 方向的沿 x 正弦分布的行波电流片 **K** 置于半无限大的导电区上的情况. 图中区域 1（$0\leqslant y\leqslant\infty$）为空气，$\mu_1=\mu_0$，$\sigma_1=0$；区域 2（$-\infty\leqslant y\leqslant 0$）为导电区，磁导率为 μ_2，电导率为 σ_2. 电流片 **K** 的表达式为

$$\mathbf{K}=\mathbf{k}\,K_z\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{\tau}x\right)=\mathbf{k}\,\mathrm{Re}\left[K_z e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{\tau}x\right)}\right] \tag{6-243}$$

下面来计算区域 1 和 2 中的磁场.

（一）向量磁位的解答

这是一个二维正弦行波场问题. 由于电流片为 z 方向，向量磁位亦为 z 方向，故用 $\dot{A}_z$ 来求解较为方便. 稳态时，$\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$，$\frac{\partial}{\partial x}=-j\frac{\pi}{\tau}$.

区域 1 区域 1 内的向量磁位 $\dot{A}_{z1}$ 由两部分组成：第一部分是电流片 $\dot{K}_z$ 在无界空间中所产生的磁位 $\dot{A}'_{z1}$，第二部分是导电区的影响 $\dot{A}''_{z1}$. 对于 $0\leqslant y\leqslant h$ 这一段，$\dot{A}'_{z1}$ 满足拉普拉斯方程，且在电流片表面处满足边界条件 $\dot{H}_{x1(y=h)}=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \dot{A}'_{z1}}{\partial y}_{(y=h)}=\frac{1}{2}K_z$. 由此可得

$$\dot{A}'_{z1}=\frac{\mu_0 K_z}{2\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{\pi}{\tau}(h-y)}\qquad 0\leqslant y\leqslant h \tag{6-244}$$

$\dot{A}''_{z1}$ 是拉普拉斯方程的解，且随着 y 的增加而衰减，所以 $\dot{A}''_{z1}$ 中仅含有 y 的负指数项，即

$$\dot{A}''_{z1}=D_1 e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \tag{6-245}$$

由此可得

$$\dot{A}_{z1}=\dot{A}'_{z1}+\dot{A}''_{z1}=\frac{\mu_0 K_z}{2\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{\pi}{\tau}(h-y)}+D_1 e^{-\frac{\pi}{\tau}y}\qquad 0\leqslant y\leqslant h \tag{6-246}$$

式中 D_1 为待定的任意常数. 对于 $y\geqslant h$ 这一段，电流片表面的边界条件为 $-\dot{H}'_{x1(y=h)}=\frac{1}{2}K_x$，因此

$$\dot{A}'_{x1}=\frac{\mu_0 K_x}{2\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{\pi}{\tau}(y-h)} \qquad y\geqslant h \tag{6-247}$$

而

$$\dot{A}_{x1}=\dot{A}'_{x1}+\dot{A}''_{x1}=\frac{\mu_0 J_x}{2\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{\pi}{\tau}(y-h)}+D_1 e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \qquad y\geqslant h \tag{6-248}$$

区域 2 区域 2 内向量磁位 $\dot{A}_{x2}$ 满足二维复涡流方程，$\dot{A}_{x2}$ 的解答为

$$\dot{A}_{x2}=C_2 e^{\beta y}+D_2 e^{-\beta y} \tag{6-249}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\beta=\sqrt{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2+j\omega\mu_2\sigma_2}=\frac{\pi}{\tau}\sqrt{1+jr^2}\\&r=\frac{\sqrt{2}\,\tau}{\pi\Delta},\quad \Delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_2\sigma_2}}\end{aligned}\right\} \tag{6-250}$$

由于 $y=-\infty$ 时，$\dot{A}_{x2}=0$，故 $D_2=0$. 于是

$$\dot{A}_{x2}=C_2 e^{\beta y} \tag{6-251}$$

再根据区域 1 和 2 之间的交界面条件，即 $y=0$ 处

$$\left.\begin{aligned}&\dot{A}_{x1}=\dot{A}_{x2},\\&\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\dot{A}_{x1}}{\partial y}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial\dot{A}_{x2}}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{6-252}$$

即可得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mu_0 K_x}{2\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{\pi}{\tau}h}+D_1=C_2\\&\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 K_x}{2}e^{-\frac{\pi}{\tau}h}-\frac{\pi}{\tau}D_1\right)=\frac{1}{\mu_2}C_2\beta\end{aligned}\right\} \tag{6-253}$$

由此可解出 D_1 和 C_2 为

$$\left.\begin{aligned}D_1&=\frac{\mu_0 K_x}{2\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{\pi}{\tau}h}\frac{\frac{\mu_2}{\mu_0}-\lambda}{\frac{\mu_2}{\mu_0}+\lambda}\\C_2&=\frac{\mu_0 K_x}{2\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{\pi}{\tau}h}\frac{2\frac{\mu_2}{\mu_0}}{\frac{\mu_2}{\mu_0}+\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{6-254}$$

其中

$$\lambda=\frac{\tau}{\pi}\beta=\sqrt{1+jr^2} \tag{6-255}$$

把 D_1 和 C_2 分别代入式(6-246)和(6-251)，最后可得

$$\dot{A}_{z1}=\frac{\mu_0 K_z}{2\frac{\pi}{\tau}}\left[e^{-\frac{\pi}{\tau}(h-y)}+\frac{\frac{\mu_2}{\mu_0}-\lambda}{\frac{\mu_2}{\mu_0}+\lambda}e^{-\frac{\pi}{\tau}(h+y)}\right]\qquad 0\leqslant y\leqslant h \tag{6-256}$$

$$\dot{A}_{z1}=\frac{\mu_0 K_z}{2\frac{\pi}{\tau}}\left[e^{-\frac{\pi}{\tau}(y-h)}+\frac{\frac{\mu_2}{\mu_0}-\lambda}{\frac{\mu_2}{\mu_0}+\lambda}e^{-\frac{\pi}{\tau}(y+h)}\right]\qquad y\geqslant h \tag{6-257}$$

$$\dot{A}_{z2}=\frac{\mu_0 K_z}{2\frac{\pi}{\tau}}\frac{2\frac{\mu_2}{\mu_0}}{\frac{\mu_2}{\mu_0}+\lambda}e^{\frac{\pi}{\tau}(y-h)} \tag{6-258}$$

（二）正弦电流片的镜像

从式(6-256)和(6-257)可见，导电区对区域 1 内 $\dot{A}_{z1}$ 的影响与位于 $y=-h$ 处镜像电流片 $\frac{\frac{\mu_2}{\mu_0}-\lambda}{\frac{\mu_2}{\mu_0}+\lambda}K_z$ 的作用相同．由此可得，镜像系数 k 为

$$k=\frac{\frac{\mu_2}{\mu_0}-\lambda}{\frac{\mu_2}{\mu_0}+\lambda} \tag{6-259}$$

当 $\frac{\mu_2}{\mu_0}\gg r$ 时，$k\approx 1$，此时的镜像近似与恒定磁场、$\mu_2=\infty$ 时的镜像相同．当 $r\gg\frac{\mu_2}{\mu_0}$ 时，$k\approx -1$，此时的镜像与边界为超导（$\sigma_2=\infty$）或“零磁导率”（$\mu_2=0$）时的镜像相同．普遍而言，k 是个复数，即镜像是个复镜像．

通常情况下，$r^2\gg 1\left(\text{即}\frac{\tau}{\Delta}\gg 1\right)$，此时

$$k\approx\frac{\frac{\mu_2}{\mu_0}-(1+j)\frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{\mu_2}{\mu_0}+(1+j)\frac{r}{\sqrt{2}}}=\frac{(\alpha^2-1)-j\sqrt{2}\alpha}{\alpha^2+\sqrt{2}\alpha+1}=|k|e^{j\theta} \tag{6-260}$$

式中 $\alpha=\frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{1}{r}$．表 6-3 列出了不同 α 时的 $|k|$ 和 θ 值．

表 6-3　不同 α 时的 k 值

$\alpha=\frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{1}{r}$	$\lvert k\rvert$	θ
0.01	0.99	−179°
0.1	0.87	−172°
1	0.42	−90°
10	0.87	−8°
100	0.99	−1°

以上分析仅对行波电流片成立．对于其他形式的源电流，不一定能找到合适的镜像．但是对 $r\gg\frac{\mu_2}{\mu_0}$ 的情况（即 σ_2 极高的情况），$k\approx -1$，此时任何形式的源电流都可以找到相应的电磁镜像．$k=-1$ 时，在导电区表面处，合成磁场的法向分量为零，切向分

量则将增加一倍.

6-13 实心转子感应电动机中的行波涡流场[15—20]

实心转子感应电机的电磁转矩，是由气隙行波磁场和转子内的感应涡流相互作用产生的. 为计算电机的运行性能，需要较准确地算出转子内的涡流和气隙内的磁场分布，为此需用正弦电磁场的理论来分析、求解.

(一) 分析方法

为简化分析，通常设转子为无限长，把问题作为二维涡流问题来研究. 若转子上无端环或者转子长度较短时，则应作为三维问题来分析.

实心转子感应电机的三维分析，通常有两种方法. 第一种方法，把定子载流绕组在铁心长度范围内作为沿周向正弦分布的轴向行波电流片；到定子铁心两端，根据 $\mathrm{div}\mathbf{J}=0$ 的要求，轴向电流片转化为沿周向正弦分布的线电流. 为便于分析，设想沿电机轴向有无限多个具有相反极性的虚拟电机连续地排列着. 这样，定子的轴向电流片和周向线电流就可以沿轴向展成傅氏级数，从而使向量磁位的解答亦成为沿轴向的傅氏级数. 具体求解时，定子铁心的磁导率设为 $\mu_{Fe}=\infty$，电导率 $\sigma=0$；把定子内圆和转子内缘作为边界，求解域包括气隙和实心转子两个区域，如图 6-31 所示. 由于每个区域内向量磁位有 x、y、z 三个分量，两个区域共有六个微分方程和六组解答，每组解答中又有一系列待定的任意常数，所以求解起来十分复杂. 为使任意常数能够确定，通常假定气隙和转子内磁位只有 x 和 z 分量，y 分量（径向分量）为零，这样方程和解答减少到四组，待定常数的数目相应减少. 这样，通过定子内圆和转子内缘处的边界条件和气隙、转子表面处的交界面条件，即可确定这些任意常数，并进一步得到两个区域内的 A 和 B. 这种方法的缺点是：(1) 由于定子绕组端部简化成紧贴于定子铁心两端的周向线电流，端部空间又被虚拟电机的铁心所填满，所以算出的转子端面磁场将比实际情况大很多；(2) 由于忽略了 $\dot{A}_y$，致使转子磁场和涡流的计算不很准确.

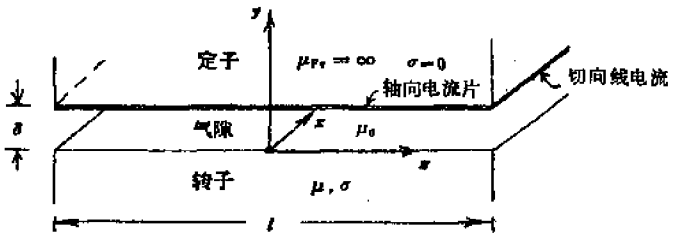


图 6-31 实心转子三维计算的第一种模型

第二种方法仅以实心转子为求解域，边界面为转子表面、转子内缘和前、后两个侧面. 转子表面的边界条件，是利用定子的行波电流片通过气隙方程给出；端面的边界条

件，根据实测结果近似认为端面上 $B_x \approx 0$. 由于只解转子一个区域，所以无需假定 A_y 为零，而是求解 $\dot{A}_x$、$\dot{A}_y$、$\dot{A}_z$ 三个微分方程. 另外，由于定、转子端部介质仍是空气，故解出的转子端区磁场比较接近实际. 最后，经过简化，转子中 $\dot{\mathbf{A}}$ 和 $\dot{\mathbf{B}}$ 的解答可用闭式来表达，有利于实际计算. 这些都是此法的优点. 下面将用这种方法来进行分析和计算.

（二）基本假定和坐标系

基本假定 为便于分析，作以下假定：

1. 转子表面为光滑.
2. 转子的磁导率和电导率为均匀，μ 和 σ 为常值；磁饱和和磁滞忽略不计.
3. 不计曲率，定、转子铁心展开成半无限厚的平行导磁体.
4. 定子三相绕组作为正弦分布的轴向电流片，磁势的空间谐波忽略不计.
5. 定子铁心的 $\mu_{Fe}=\infty$，$\sigma_{Fe}=0$.

以上这五个假定是分析实心转子感应电机常用的假定. 下面两个假定则是采用此法分析时的附加假定：

6. 转子侧面上的法向磁感强度为零.
7. 通过气隙时，径向磁场 B_y 的值保持不变.

假定 6 是一个近似，在小型电机上所进行的实测表明，此假定所引起的误差较小. 假定 7 是为了利用气隙方程，用定子表面的电流片，越过气隙来建立转子表面的边界条件所需要的假定. 这样做可使气隙不再作为一个求解区. 当 $\frac{\delta}{\tau}$ 很小时，这样做所引起的误差很小.

坐标系 设 x、y、z 为固定于转子的坐标系，x_1、y_1、z_1 为固定于定子的坐标系，原点位于转子表面中点处，如图 6-32 所示. 把 z 方向取为轴向，y 取为径向，x 和 x_1 取为

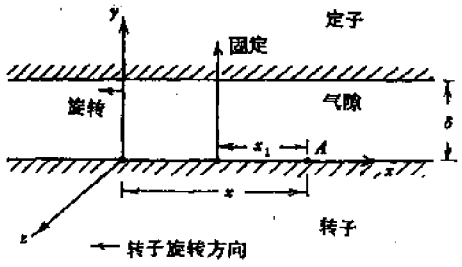


图 6-32 定、转子的坐标系

周向；$t=0$ 时，两个坐标系为重合. 当定子行波磁场向负 x 方向以同步速度推移，转子以转差率为 s 的转速旋转时，x_1 与 x 的关系应为

$$\frac{\pi}{\tau}x_1 = \frac{\pi}{\tau}x - (1-s)\omega t \tag{6-261}$$

或

$$\frac{\pi}{\tau}x_1 + \omega t = \frac{\pi}{\tau}x + s\omega t \tag{6-262}$$

式中 ω 为电源的角频率. 定子对称三相电流所形成的基波轴向电流片 K_z 为

$$K_z = \frac{3N_1 k_{w1} I_m}{p_0 \tau}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{\tau}x_1\right) = \mathrm{Re}\left[\dot{K}_z e^{j(\omega t + \frac{\pi}{\tau}x_1)}\right] \tag{6-263}$$

式中 $\dot{K}_z = \frac{3N_1 k_{w1} I_m}{p_0 \tau}$；$p_0$ 为极对数，I_m 为相电流的幅值.

（三）气隙磁场为行波场时转子三维涡流方程的解答

三维涡流方程 在直角坐标系中，向量磁位 A 的三维涡流方程为：

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2} = \mu\sigma\frac{\partial A_i}{\partial t} \qquad i = x, y, z \tag{6-264}$$

另外，设 divA=0，则

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \tag{6-265}$$

当气隙磁场为正弦分布、以基波频率变化的行波磁场时，在转子坐标中描述时，转子的感应电密和向量磁位将是正弦分布、以转差频率变化的行波场；即

$$A_i = \mathrm{Re}\left[\dot{A}_i e^{j(\omega t + \frac{\pi}{\tau}z)}\right] \qquad i = x, y, z \tag{6-266}$$

在稳态情况下，$\frac{\partial}{\partial t} = js\omega$，$\frac{\partial}{\partial x} = j\frac{\pi}{\tau}$，式（6-264）可改写成

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_i}{\partial z^2} = \left[\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + p^2\right]\dot{A}_i \tag{6-267}$$

式中 $p = \sqrt{js\omega\mu\sigma}$. 从上式可见，对于行波场，$\dot{A}_i$ 沿 x 方向的变化规律为已知，故 $\dot{A}_i$ 仅是 y 和 z 的未知函数；工程上通常称这类问题为“准三维问题”，以区别于 $\dot{A}_i$ 是 x、y 和 z 的函数的真正三维问题.

$\dot{A}_i$ 的解答 先求解 $\dot{A}_x$. 设 $\dot{A}_x$ 的解答由 $\dot{A}'_x$ 和 $\dot{A}''_x$ 两部分组成，$\dot{A}'_x$ 沿电机轴向为 z 的傅氏级数，$\dot{A}''_x$ 为 z 的指数函数；即

$$\dot{A}'_x = \sum_{k=1,2,3,\cdots}^{\infty}\left[f_k(y)\left(C_k \sin k\frac{\pi}{l}z + D_k \cos k\frac{\pi}{l}z\right)\right] \tag{6-268}$$

把上式代入式(6-267)，可知 $f_k(y)$ 满足下列方程：

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} - \left[\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + p^2 + \left(k\frac{\pi}{l}\right)^2\right]f_k = 0 \tag{6-269}$$

或

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} - q_k^2 f_k = 0 \tag{6-270}$$

由此可以解出

$$f_k(y) = A_k e^{q_k y} + B_k e^{-q_k y} \tag{6-271}$$

式中

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + p^2 + \left(k\frac{\pi}{l}\right)^2} \tag{6-272}$$

把 $f_k(y)$ 代入式(6-268)，可得

$$\dot{A}_z' = \sum_{k=1,2,3,\cdots}^{\infty} (A_k e^{q_k y} + B_k e^{-q_k y}) \left(C_k \sin k \frac{\pi}{l} z + D_k \cos k \frac{\pi}{l} z \right) \tag{6-273}$$

其次，设 $\dot{A}_z''$ 为

$$\dot{A}_z'' = f(y)(C \operatorname{sh} pz + D \operatorname{ch} pz) \tag{6-274}$$

把上式代入式(6-267)，可知

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 f = 0 \tag{6-275}$$

上式的解答为

$$f(y) = A e^{\frac{\pi}{\tau} y} + B e^{-\frac{\pi}{\tau} y} \tag{6-276}$$

于是

$$\dot{A}_z'' = \left(A e^{\frac{\pi}{\tau} y} + B e^{-\frac{\pi}{\tau} y} \right) (C \operatorname{sh} pz + D \operatorname{ch} pz) \tag{6-277}$$

把 $\dot{A}_z'$ 和 $+\dot{A}_z''$ 叠加，可得 $\dot{A}_z$ 的通解为

$$\dot{A}_z = \dot{A}_z' + \dot{A}_z'' = \sum_{k=1,2,3,\cdots}^{\infty} (A_k e^{q_k y} + B_k e^{-q_k y}) \left(C_k \sin k \frac{\pi}{l} z + D_k \cos k \frac{\pi}{l} z \right) + \left(A e^{\frac{\pi}{\tau} y} + B e^{-\frac{\pi}{\tau} y} \right) (C \operatorname{sh} pz + D \operatorname{ch} pz) \tag{6-278}$$

同理可得

$$\dot{A}_y = \sum_{k=1,2,3,\cdots}^{\infty} (A_k' e^{q_k y} + B_k' e^{-q_k y}) \left(C_k' \sin k \frac{\pi}{l} z + D_k' \cos k \frac{\pi}{l} z \right) + \left(A' e^{\frac{\pi}{\tau} y} + B' e^{-\frac{\pi}{\tau} y} \right) (C' \operatorname{sh} pz + D' \operatorname{ch} pz) \tag{6-279}$$

$$\dot{A}_x = \sum_{k=1,2,3,\cdots}^{\infty} (A_k'' e^{q_k y} + B_k'' e^{-q_k y}) \left(C_k' \sin k \frac{\pi}{l} z + D_k'' \cos k \frac{\pi}{l} z \right) + \left(A'' e^{\frac{\pi}{\tau} y} + B'' e^{-\frac{\pi}{\tau} y} \right) (C'' \operatorname{sh} pz + D'' \operatorname{ch} pz) \tag{6-280}$$

（四）边界条件，对称条件和任意常数的确定

边界条件和对称条件 本问题的边界条件和对称条件为：

1. 在转子内部 $y=-\infty$ 处，磁场和向量磁位应等于零，即

$$y = -\infty \text{ 时}, \quad \dot{A}_x = \dot{A}_y = \dot{A}_z = 0, \quad \dot{B}_x = \dot{B}_y = \dot{B}_z = 0 \tag{6-281}$$

2. 由于整个电机对 $z=0$ 的平面对称，故转子向量磁位应满足下列对称条件：

$$\dot{A}_x(z) = \dot{A}_x(-z), \quad \dot{A}_y(z) = -\dot{A}_y(-z), \quad \dot{A}_y(z) = -\dot{A}_y(-z) \tag{6-282}$$

3. 在转子的前、后端面处，电密的轴向分量为零，即

$$z = \pm \frac{l}{2} \text{ 时}, \quad \dot{J}_z = 0 \text{ (或 } \dot{A}_z = \dot{E}_z = 0) \tag{6-283}$$

4. 在转子的前、后端面处，磁感强度的轴向分量假设为零；即

$$z = \pm \frac{l}{2} \text{ 时}, \quad \dot{B}_z = 0 \tag{6-284}$$

5. 在转子表面处，电密的径向分量为零；即

$$y = 0 \text{ 时}, \quad \dot{J}_y = 0 \text{ (或 } \dot{A}_y = \dot{E}_y = 0) \tag{6-285}$$

6. 在气隙各处，设 $\dot{B}_y$ 不随 y 而变化；由此根据气隙方程，可得

$$\left(\dot{H}_x+\frac{\delta}{\mu_0}\frac{\partial \dot{B}_y}{\partial x}\right)_{y=0}=\dot{K}_x \tag{6-286}$$

$$\left(\dot{H}_z+\frac{\delta}{\mu_0}\frac{\partial \dot{B}_y}{\partial z}\right)_{y=0}=\dot{K}_z=0 \tag{6-287}$$

式中 δ 为气隙.

利用这些条件，即可确定解答中的各个任意常数.

任意常数的确定 先看 $\dot{A}_z$. 根据条件 1，可知式(6-278)中的 $B_k=B=0$. 根据条件 2 中的第一式，可知 $\dot{A}_z$ 是 z 的偶函数，由此可得 $C_k=C=0$. 根据条件 3，可知式(6-278)中的 k 为奇数(用 n 表示)，另外 $D=0$. 因此 $\dot{A}_z$ 可简化成

$$\dot{A}_z=\sum_{k=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{a}_n e^{q_n y}\cos n\frac{\pi}{l}z \tag{6-288}$$

再看 $\dot{A}_x$. 根据条件 1，可知式(6-280)中的 $B_k''=B''=0$. 根据条件 2 中的第二式，可知 $\dot{A}_x$ 为 z 的奇函数，于是 $D_k'=D''=0$. 再把 k 分成奇、偶两个数列（分别用 n 和 m 表示)，$\dot{A}_x$ 可简化成

$$\dot{A}_x=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{b}_n e^{q_n y}\sin n\frac{\pi}{l}z+\sum_{m=2,4,6,\cdots}^{\infty}\dot{b}_m e^{q_m y}\sin m\frac{\pi}{l}z+\dot{G}e^{\frac{\pi}{\tau}y}\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}} \tag{6-289}$$

再看 $\dot{A}_y$，根据条件 1，可知式 (6-279) 中的 $B_k'=B'=0$. 根据条件 2 中的第三式，可知 $\dot{A}_y$ 是 z 的奇函数，于是 $D_k'=D'=0$. 这样 $\dot{A}_y$ 可简化为

$$\dot{A}_y=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dot{c}_n e^{q_n y}\sin n\frac{\pi}{l}z+\sum_{m=2,4,6,\cdots}^{\infty}\dot{c}_m e^{q_m y}\sin m\frac{\pi}{l}z+\dot{F}e^{\frac{\pi}{\tau}y}\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}} \tag{6-290}$$

再根据 $\mathrm{div}\dot{\mathbf{A}}=0$ 这一约束，可知

$$\left.\begin{aligned}&\dot{F}=-j\dot{G},\qquad \dot{c}_m=-j\frac{\pi}{\tau}\frac{\dot{b}_m}{q_m}\\&j\frac{\pi}{\tau}\dot{b}_n+q_n\dot{c}_n=n\frac{\pi}{l}\dot{a}_n\end{aligned}\right\} \tag{6-291}$$

根据条件 1 可知

$$\left(\frac{\partial \dot{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{A}_x}{\partial y}\right)_{z=\frac{l}{2}}=0$$

由此可得

$$j\frac{\pi}{\tau}\dot{c}_n=\dot{b}_n q_n \tag{6-292}$$

联解式(6-291)中的第三式和式(6-292)，可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{b}_n &= j\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\frac{l}{\tau}\\ \dot{c}_n &= -\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\frac{lq_n}{\pi}\end{aligned}\right\} \tag{6-293}$$

把求出的 $\dot{F}$，$\dot{c}_m$，$\dot{b}_n$ 和 $\dot{c}_n$ 代回到式(6-289)、(6-290)，可得

$$\dot{A}_x=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} j\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\frac{l}{\tau}e^{q_n y}\sin n\frac{\pi}{l}z + \sum_{m=2,4,6,\cdots}^{\infty}\dot{b}_m e^{q_m y}\sin m\frac{\pi}{l}z+\dot{G}e^{\frac{\pi}{\tau}y}\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}} \tag{6-294}$$

$$\dot{A}_y=\sum_{k=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\frac{lq_n}{\pi}e^{q_n y}\sin n\frac{\pi}{l}z - \sum_{m=2,4,5,\cdots}^{\infty} j\frac{\pi}{\tau}\frac{\dot{b}_m}{q_m}e^{q_m z}\sin m\frac{\pi}{l}z - j\dot{G}e^{\frac{\pi}{\tau}y}\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}} \tag{6-295}$$

剩下的三组常数 $\dot{a}_n$，$\dot{b}_m$ 和 $\dot{G}$可由条件 5 和 6 来确定.

（五）近似解

近似解 用条件 5 和 6 来确定 $\dot{a}_n$，$\dot{b}_m$ 和 $\dot{G}$，从理论上看是可行的，但实际做来却十分复杂和困难. 为此作以下简化：由于除转差率 s 为非常小的情况之外，通常有

$$|p^2|\gg\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \tag{6-296}$$

此外，除了 s 非常小和 k 很大时以外，通常有

$$|p^2|\gg\left(k\frac{\pi}{l}\right)^2 \tag{6-297}$$

因此可以认为

$$q_n\approx p,\qquad q_m\approx p. \tag{6-298}$$

由于 $\dot{A}_x$、$\dot{A}_y$ 和 $\dot{A}_z$ 的级数解收敛很快，这样做不会引起明显的误差. 这样，式(6-288)、(6-294)和(6-295)将简化为

$$\dot{A}_x\approx j\frac{l}{\tau}e^{py}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\sin n\frac{\pi}{l}z + e^{py}\sum_{m=2,4,6,\cdots}\dot{b}_m\sin m\frac{\pi}{l}z+\dot{G}e^{\frac{\pi}{\tau}y}\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}} \tag{6-299}$$

$$\dot{A}_y\approx\frac{lp}{\pi}e^{py}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\sin n\frac{\pi}{l}z$$

$$-j\frac{\pi}{\tau p}e^{py}\sum_{m=2,4,6,\cdots}\dot{b}_m\sin m\frac{\pi}{l}z-j\dot{G}\,e^{\frac{\pi}{\tau}y}\frac{\mathrm{sh}\,pz}{\mathrm{sh}\,\frac{pl}{2}} \tag{6-300}$$

$$\dot{A}_x\approx e^{py}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\dot{a}_n\cos n\frac{\pi}{l}z \tag{6-301}$$

磁感强度的近似表达式则为

$$\dot{B}_x\approx\frac{l^2p^3}{\pi^2}e^{py}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\cos n\frac{\pi}{l}z$$

$$+j\frac{\pi^2}{pl\tau}e^{py}\sum_{m=2,4,6,\cdots}m\dot{b}_m\cos m\frac{\pi}{l}z+j\dot{G}\,pe^{\frac{\pi}{\tau}y}\frac{\mathrm{ch}\,pz}{\mathrm{sh}\,\frac{pl}{2}} \tag{6-302}$$

$$\dot{B}_y\approx-j\frac{l^2p^2}{\pi\tau}e^{py}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\cos n\frac{\pi}{l}z$$

$$+\frac{\pi}{l}e^{py}\sum_{m=2,4,6,\cdots}m\dot{b}_m\cos m\frac{\pi}{l}z+\dot{G}\,pe^{\frac{\pi}{\tau}y}\frac{\mathrm{ch}\,pz}{\mathrm{sh}\,\frac{pl}{2}} \tag{6-303}$$

$$\dot{B}_z\approx-\frac{\pi^2}{l^2p}e^{py}\sum_{m=2,4,6,\cdots}\dot{b}_m\left[m^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2\right]\sin m\frac{\pi}{l}z \tag{6-304}$$

下面在近似解的基础上来确定 $\dot{a}_n$ 和 $\dot{b}_m$.

根据边界条件 5 可知，

$$0=\frac{lp}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\sin n\frac{\pi}{l}z$$

$$-j\frac{\pi}{\tau p}\sum_{m=2,4,6,\cdots}\dot{b}_m\sin m\frac{\pi}{l}z-j\dot{G}\frac{\mathrm{sh}\,py}{\mathrm{sh}\,\frac{pl}{2}} \tag{6-305}$$

根据条件 6 中的第二式，可知

$$0=j\frac{p^2l^2}{\pi^2\tau}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{n\dot{a}_n}{n^2+(\frac{lp}{\pi})^2}\sin n\frac{\pi}{l}y$$

$$-\sum_{m=2,4,6\cdots}\dot{b}_m\left[m^2+\frac{\mu_0}{p\delta\mu}\left(m^2+\frac{l^2p^2}{\pi^2}\right)\right]\sin m\frac{\pi}{l}z+\dot{G}\left(\frac{pl}{\pi}\right)^2\frac{\mathrm{sh}\,pz}{\mathrm{sh}\,\frac{pl}{2}} \tag{6-306}$$

把上面这两个式子中的 $\sum_n$ 项消去，可得

$$\sum_{m=2,4,6,\cdots}\dot{b}_m\left[m^2\left(1+\frac{\mu_0}{p\delta\mu}\right)+\left(\frac{l\gamma}{\pi}\right)^2\right]\sin m\frac{\pi}{l}z=\dot{G}\,p\left(p-\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{l^2}{\pi^2}\frac{\mathrm{sh}\,pz}{\mathrm{sh}\,\frac{pl}{2}} \tag{6-307}$$

其中 μ 为转子的磁导率；γ 为

$$\gamma^2=\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2+\frac{p\mu_0}{\delta\mu} \tag{6-308}$$

再用傅氏级数理论，把式(6-307)的右端在$-\frac{l}{2}\leqslant z\leqslant\frac{l}{2}$进行展开，即可确定$\dot{b}_m$为

$$\dot{b}_m=\frac{4l^2}{\pi^2}p\left(p-\frac{\pi}{\tau}\right)\dot{G}\ (-1)^{\frac{m}{2}-1}\frac{m}{\left[m^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2\right]\left[m^2\left(1+\frac{\mu_0}{p\delta\mu}\right)+\left(\frac{l\gamma}{\pi}\right)^2\right]} \tag{6-309}$$

把上式代回到式（6-305），并将$\sum_m$项用闭式表示，即可得到

$$\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\sin n\frac{\pi}{l}z=j\frac{\dot{G}\pi}{lp}\left[\frac{\frac{\pi}{\tau}}{p+\frac{\pi}{\tau}}\frac{\mathrm{sh}\gamma z\left(1+\frac{\mu}{p\delta\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{sh}\gamma\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu_0}{p\delta\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}}+\frac{p}{p+\frac{\pi}{\tau}}\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}\right] \tag{6-310}$$

再用傅氏级数展开，即可求得

$$\dot{a}_n=j\dot{G}\frac{4}{\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{p}{p+\frac{\pi}{\tau}}\frac{1}{n}\mathrm{cth}\frac{pl}{2}+\frac{\gamma\frac{\pi}{\tau}}{p\left(p+\frac{\pi}{\tau}\right)}\left(1+\frac{\mu_0}{p\delta\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.\times\mathrm{cth}\left[\frac{\gamma l}{2}\left(1+\frac{\mu_0}{p\delta\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}\frac{n^2+\left(\frac{pl}{\pi}\right)^2}{n\left[n^2+\frac{\left(\frac{\gamma l}{\pi}\right)^2}{1+\frac{\mu_0}{p\delta\mu}}\right]} \tag{6-311}$$

A 和 B 的闭式表达 分析表明，除转差率很小的情况外，通常透入深度与气隙之比要比转子的相对磁导率小很多；此时

$$\left|\frac{\mu_0}{p\delta\mu}\right|\ll 1 \tag{6-312}$$

再考虑到$|p|\gg\frac{\pi}{\tau}$，则$\dot{b}_m$和$\dot{a}_n$将近似等于

$$\dot{b}_m\approx\frac{4}{\pi}\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2\dot{G}(-1)^{\frac{m}{2}-1}\frac{m}{\left[m^2+\left(\frac{pl}{\pi}\right)^2\right]\left[m^2+\left(\frac{\gamma l}{\pi}\right)^2\right]} \tag{6-313}$$

$$\dot{a}_n\approx j\frac{4}{\pi}\dot{G}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{1}{n}\mathrm{cth}\frac{pl}{2}+\frac{\gamma\frac{\pi}{\tau}}{p^2}\frac{n^2+\left(\frac{pl}{\pi}\right)^2}{n\left[n^2+\left(\frac{\gamma l}{\pi}\right)^2\right]}\mathrm{cth}\frac{\gamma l}{2}\right\} \tag{6-314}$$

在上述近似下，$\sum_n$和$\sum_m$项将近似等于

$$\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{n\dot{a}_n}{n^2+\left(\frac{lp}{\pi}\right)^2}\sin n\frac{\pi}{l}z\approx j\frac{\dot{G}\pi}{lp}\left[\frac{\frac{\pi}{\tau}}{p+\frac{\pi}{\tau}}\frac{\mathrm{sh}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}+\frac{p}{p+\frac{\pi}{\tau}}\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}\right] \tag{6-315}$$

$$\sum_{m=2,4,6,\cdots} b_m \sin m\frac{\pi}{\tau}z \approx \frac{-p}{p+\frac{\pi}{\tau}}\dot{G}\left[\frac{\mathrm{sh}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}-\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}\right] \tag{6-316}$$

此外，可以证明

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{n^2+\left(\frac{\gamma l}{\pi}\right)^2}\cos n\frac{\pi}{l}z=\frac{\mathrm{ch}\gamma z}{\mathrm{ch}\frac{\gamma l}{2}} \tag{6-317}$$

于是最后可得

$$\dot{A}_x \approx \dot{G}\left[\left(e^{\frac{\pi}{\tau}y}-e^{py}\right)\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}+e^{py}\frac{\mathrm{sh}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}\right] \tag{6-318}$$

$$\dot{A}_y \approx j\dot{G}\left(e^{py}-e^{\frac{\pi}{\tau}y}\right)\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}} \tag{6-319}$$

$$\dot{A}_z \approx j\dot{G}\,e^{py}\left[\mathrm{cth}\frac{pl}{2}+\frac{\pi}{\tau\gamma}\mathrm{cth}\frac{\gamma l}{2}-\frac{\pi}{\tau\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}\right] \tag{6-320}$$

$$\dot{B}_x = jp\dot{G}\left[e^{py}\left(\mathrm{cth}\frac{pl}{2}+\frac{\pi}{\tau\gamma}\mathrm{cth}\frac{\gamma l}{2}-\frac{\pi}{\tau\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}\right)+\left(e^{\frac{\pi}{\tau}y}-e^{py}\right)\frac{\mathrm{ch}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}\right] \tag{6-321}$$

$$\dot{B}_y \approx \frac{\pi}{\tau}\dot{G}\left\{e^{py}\left[\mathrm{cth}\frac{pl}{2}+\frac{\pi}{\tau\gamma}\mathrm{cth}\frac{\gamma l}{2}+\left(\frac{\tau\gamma}{\pi}-\frac{\pi}{\tau\gamma}\right)\frac{\mathrm{ch}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}\right]+\frac{\tau p}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{\tau}y}-e^{py}\right)\frac{\mathrm{ch}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}\right\} \tag{6-322}$$

$$\dot{B}_z \approx -p\dot{G}\,e^{py}\left[\frac{\mathrm{sh}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}-\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}\right] \tag{6-323}$$

式中$\dot{G}$可由条件 6 中的第一式确定，

$$\dot{G}=-j\frac{\mu_0\tau}{\pi}\frac{K_x}{\left(\frac{\pi}{\tau}\delta+\frac{p\tau\mu_0}{\pi\mu}\right)\left(\mathrm{cth}\frac{pl}{2}+\frac{\pi}{\tau\gamma}\mathrm{cth}\frac{\gamma l}{2}\right)} \tag{6-324}$$

式（6-318）到（6-323）就是用闭式表示时的 **A** 和 **B**.

单位宽度的切向磁通 $\dot{\Phi}_z$ 和 $\dot{\Phi}_x$ 为

$$\dot{\Phi}_z=\int_0^{-\infty}\dot{B}_x dy=-\dot{G}\left[\frac{\mathrm{sh}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}-\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}\right]\int_0^{-\infty}pe^{py}dy$$

$$=\dot{G}\left[\frac{\mathrm{sh}\gamma z}{\mathrm{sh}\frac{\gamma l}{2}}-\frac{\mathrm{sh}pz}{\mathrm{sh}\frac{pl}{2}}\right] \tag{6-325}$$

$$\dot{\Phi}_x=\int_0^{-\infty}\dot{B}_x dy$$

$$= -jG\left[\operatorname{cth}\frac{pl}{2}+\frac{\pi}{\tau\gamma}\operatorname{cth}\frac{\gamma l}{2}-\frac{\pi}{\tau\gamma}\frac{\operatorname{ch}\gamma z}{\operatorname{sh}\dfrac{\gamma l}{2}}+\frac{\tau p}{\pi}\frac{\operatorname{ch}pz}{\operatorname{sh}\dfrac{pl}{2}}\right] \tag{6-326}$$

计算实例 图 6-33 表示一台 10kW 的实心转子感应电动机在 $s=1$ 时的 $\dot{A}_x$、$\dot{A}_r$、$\dot{H}_r$、$\dot{H}_z$ 和 $\dot{\Phi}_z$、$\dot{\Phi}_y$ 沿轴向的分布. 图 6-34 表示转子涡流分布的大致图形.

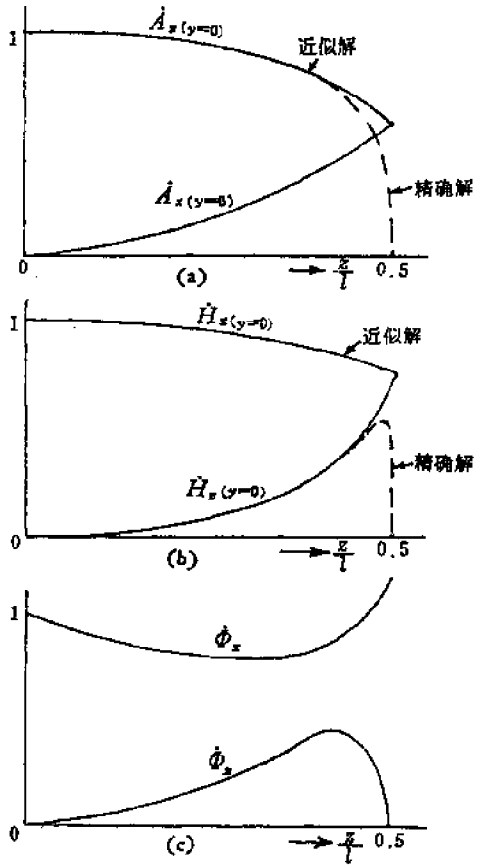


图 6-33 一台 10kW 的实心转子感应电机的 $\dot{A}_x$、$\dot{A}_r$、$\dot{H}_r$、$\dot{H}_z$ 和 $\dot{\Phi}_z$、$\dot{\Phi}_y$ ($s=1$)

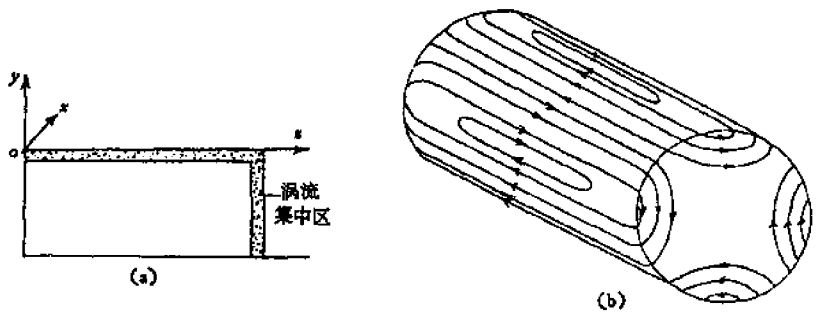


图 6-34 转子涡流分布的大致图形

把式(6-318)至(6-323)加以分析，可知涡流主要集中在转子表面[包括圆柱表面和前、后两个侧面，如图 6-34(a)中所示]，这与通常的集肤效应概念相符. 在 $z=0$ 处（转子中心位置），轴向涡流 $\dot{J}_z$ 最大，径向和周向分量为零；随着从转子中心向两端推移时，轴向涡流逐步减小，相应地在转子表面上将出现周向分量电密. 到接近转子端面时，轴向涡流急剧地下降为零，并转化成径向分量，在端面处形成闭合回路，如图 6-34(b)所示.

与涡流的分布相对应，周向磁通 $\dot{\Phi}_x$ 将集中在转子两端处；在靠近两端处还有相当数量的轴向磁通 $\dot{\Phi}_y$，如图 6-33(c)所示. 因此在靠近转子两端处，气隙合成磁场将达到最大值.

（六）等效电路

利用转子表面处的径向磁场 B_y 即可求出定子每相的气隙感应电势，并进一步求得气隙端的输入阻抗 Z_δ：

$$Z_\delta = j\omega \frac{6\mu_0 N_1^2 k_{w1}^2 l}{p_0 \pi} \frac{1}{\frac{\pi}{\tau}\delta + \frac{\tau p \mu_0}{\pi \mu}} \left[1 + \frac{\frac{2}{\pi}\frac{\tau}{l}\left(1 - \frac{\pi^2}{\tau^2\gamma^2}\right)}{\operatorname{cth}\frac{pl}{2} + \frac{\pi}{\tau\gamma}\operatorname{cth}\frac{\gamma l}{2}} \right] \tag{6-327}$$

由于 Z_δ 是激磁阻抗 Z_m 与实心转子等效阻抗 Z_2' 的并联值，而

$$Z_m = j\omega \frac{\sigma \mu_0 N_1^2 k_{w1}^2 l}{p_0 \pi^2} \frac{\tau}{\delta} \tag{6-328}$$

于是

$$Z_2' = \frac{Z_\delta Z_m}{Z_m - Z_\delta} = j\omega 6\mu \frac{N_1^2 k_{w1}^2 l}{p_0 \tau} \frac{1}{p} \left[1 + \frac{2}{\pi \frac{l}{\tau}\left(\operatorname{cth}\frac{pl}{2} + \frac{\pi}{\tau\gamma}\operatorname{cth}\frac{\gamma l}{2} - \frac{2\pi}{\tau l \gamma^2} \right)} \right]$$

$$= Z_{2(2D)}' F_2(s) \tag{6-329}$$

式中 $Z_{2(2D)}'$ 为用二维解求得的转子等效阻抗；$F_2(s)$ 为转子的有限长度修正系数；

$$Z_{2(2D)}' = j\omega 6\mu \frac{N_1^2 k_{w1}^2 l}{p_0 \tau} \frac{1}{p} = \frac{R_{2(s=1)}' + jX_{2(s=1)}'}{\sqrt{s}} \tag{6-330}$$

$$R_{2(s=1)}' = X_{2(s=1)}' = \omega \frac{3\mu N_1^2 k_{w1}^2 l \Delta}{p_0 \tau}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \tag{6-331}$$

$$F_2(s) = 1 + \frac{2}{\pi \frac{l}{\tau}\left(\operatorname{cth}\frac{pl}{2} + \frac{\pi}{\tau\gamma}\operatorname{cth}\frac{\gamma l}{2} - \frac{2\pi}{\tau l \gamma^2} \right)} \tag{6-332}$$

图 6-35 表示实心转子感应电机的等效电路. 从式 (6-330) 可见，转子的等效电阻等于等效电抗，且与 $\sqrt{s}$ 成反比，这是实心转子电机的特点.

计算表明，$F_2(s)$的幅角很小（通常$<3°$），因此可以把它看作为实数. 另外，当转子的 μ 和转差率 s 变化时，$F_2(s)$的变化很小. 若近似认为 $\operatorname{cth}\frac{pl}{2} \approx 1$，$\gamma \approx \frac{\pi}{\tau}$，则式(6-332)可简化为

$$F_2 \approx 1 + \frac{2}{\pi \frac{l}{\tau}\left(1 + \operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\frac{l}{\tau}\right) - 2} \tag{6-333}$$

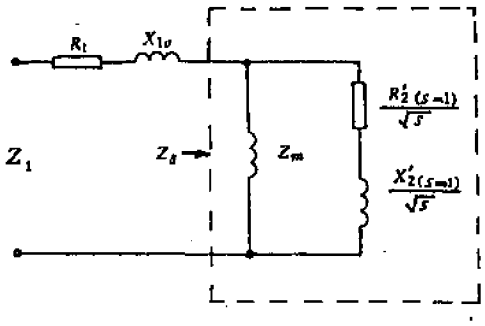


图 6-35　实心转子感应电机的等效电路

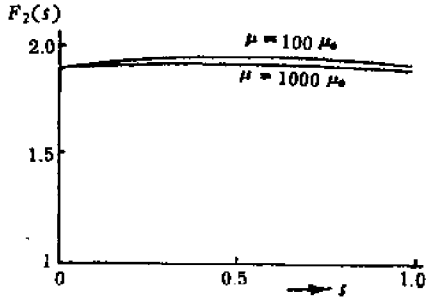


图 6-36　一台 10kW 的实心转子感应电机的 $F_2(s)$

对于$\frac{l}{\tau}$较大的电机，$\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\frac{l}{\tau}\approx 1$，此时 F_2 可进一步简化成

$$F_2 \approx 1 + \frac{1}{\pi\frac{l}{\tau} - 1} \tag{6-334}$$

6-14　圆柱坐标系中三维复涡流方程和复拉普拉斯方程的解答[21—23]

上面说明了二维和准三维情况下复涡流方程的解答．本节将给出圆柱坐标中三维复涡流方程和复拉普拉斯方程的通解．这是一种最普遍的情况．

（一）圆柱坐标中的三维复涡流方程及其通解

三维复涡流方程　三维情况下涡流方程是一个向量方程．用磁感强度表述时

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{6-335}$$

对于正弦电磁场，在圆柱坐标中有

$$\mathbf{B} = \mathrm{Re}(\mathbf{a}_r\dot{B}_r + \mathbf{a}_\theta\dot{B}_\theta + \mathbf{a}_z\dot{B}_z)e^{j\omega t} = \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{B}}\,e^{j\omega t}) \tag{6-336}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{a}_r\dot{B}_r + \mathbf{a}_\theta\dot{B}_\theta + \mathbf{a}_z\dot{B}_z\\&\dot{B}_r = B_r(r,\theta,z)e^{j\theta_r},\quad \dot{B}_\theta = B_\theta(r,\theta,z)e^{j\theta_\theta},\quad \dot{B}_z = B_z(r,\theta,z)e^{j\theta_z}\end{aligned}\right\} \tag{6-337}$$

由于$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$，于是式（6-335）可以改写成

$$\nabla\times\dot{\mathbf{B}} = j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{B}} \tag{6-338}$$

用 r，θ 和 z 三个分量表示时，有

$$\frac{\partial^2\dot{B}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\dot{B}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\dot{B}_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\dot{B}_z}{\partial z^2} - j\omega\mu\sigma\dot{B}_z = 0 \tag{6-339}$$

$$\frac{\partial^2\dot{B}_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{B}_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\dot{B}_r+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\dot{B}_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\dot{B}_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\dot{B}_\theta}{\partial\theta}-j\omega\mu\sigma\dot{B}_r=0 \quad (6\text{-}340)$$

$$\frac{\partial^2\dot{B}_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{B}_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\dot{B}_\theta+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\dot{B}_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\dot{B}_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\dot{B}_r}{\partial\theta}-j\omega\mu\sigma\dot{B}_\theta=0 \quad (6\text{-}341)$$

另外，由于 $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$，所以

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{B}_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{B}_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\dot{B}_z}{\partial z}=0 \quad (6\text{-}342)$$

磁感强度的通解 从式(6-339)可见，$\dot{B}_z$ 是一个独立的方程，因此可用分离变量法求解. $\dot{B}_z$ 的通解是一个以 r 为宗量的柱谐函数和 z 的指数函数、θ 的正弦函数的乘积的线性组合；

$$\begin{aligned}\dot{B}_z=&\sum_n\Big\{\sum_m[G_mJ_n(\alpha r)+H_mY_n(\alpha r)](L_me^{mz}+M_me^{-mz})\\&+\Big[G_nJ_n\Big(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\Big)+H_nY_n\Big(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\Big)\Big]z+(G_nr^n+H_nr^{-n})\\&\times\left(L_ne^{(1+j)\frac{z}{\Delta}}+M_ne^{-(1+j)\frac{z}{\Delta}}\right)\Big\}(C_n\sin n\theta+D_n\cos n\theta)\qquad n\neq0\text{ 时}\end{aligned} \quad (6\text{-}343)$$

式中 $J_n(\alpha r)$ 和 $Y_n(\alpha r)$ 为 n 阶贝塞尔函数和韦伯函数；Δ 为透入深度，$\Delta=\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}}$；$\alpha=\sqrt{m^2-j\omega\mu\sigma}$；$m$ 和 n 为参数；G_n、H_n 等都是任意常数. 若 $n=0$ 时，上式中的 G_n 用 $G_0\ln r$ 代替，其余保持不变.

再求 $\dot{B}_r$ 的通解. 从式 (6-340) 可见，此方程中除包括 $\dot{B}_r$ 外，还有 $\dfrac{\partial\dot{B}_\theta}{\partial\theta}$ 项. 为此，利用式(6-342)把 $\dfrac{\partial\dot{B}_\theta}{\partial\theta}$ 消去，使式(6-340)变成下列形式：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-j\omega\mu\sigma\right)(r\dot{B}_r)=-2\frac{\partial\dot{B}_z}{\partial z} \quad (6\text{-}344)$$

再把 $\dot{B}_z$ 的解答代入上式的右端，即可得到一个仅含 $\dot{B}_r$ 的方程.

式(6-344)的解答由两部分组成：第一部分为齐次方程的解，第二部分为特解. 由于 $r\dot{B}_r$ 的齐次方程与 $\dot{B}_z$ 所满足的方程形式上完全相同，所以第一部分的解答形式上与 $\dot{B}_z$ 完全相同. $\dot{B}_r$ 的整个解答可参见本章文献[22].

最后，把 $\dot{B}_z$ 和 $\dot{B}_r$ 的解答代入式(6-342)，即

$$\frac{\partial\dot{B}_\theta}{\partial\theta}=-r\frac{\partial\dot{B}_z}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{B}_r)$$

即可解出 $\dot{B}_\theta$. 与 $\dot{B}_r$ 一样，$\dot{B}_\theta$ 的解亦由齐次方程的解和特解两部分组成.

以上在求解 $\dot{B}_\theta$ 时，没有直接利用式 (6-341). 为验证解答的正确性，可把解出的 $\dot{B}_\theta$、$\dot{B}_r$ 和 $\dot{B}_z$ 代入式(6-341)，看其是否满足. 结果表明，解出的 $\dot{B}_\theta$、$\dot{B}_r$ 和 $\dot{B}_z$ 满足式(6-341).

（二）磁场为行波场时复涡流方程的通解

如果磁场是一个正弦行波场

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathrm{Re}[\dot{\mathbf{B}}\, e^{j(\omega t - p\theta)}]\\ \dot{\mathbf{B}} &= \mathbf{a}_r \dot{B}_r(r,z) + \mathbf{a}_\theta \dot{B}_\theta(r,z) + \mathbf{a}_z \dot{B}_z(r,z)\end{aligned}\right\} \tag{6-345}$$

式中 p 为极对数．稳态时$\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$，$\frac{\partial}{\partial \theta}=-jp$，此时整个解答将得到简化．

气隙磁场的通解　对于气隙，$\sigma=0$，于是式(6-339)、(6-340)和(6-341)的最后一项均为0，即气隙磁场满足向量拉普拉斯方程．在行波磁场情况下，经过推导，可知

$$\dot{B}_z=\sum_m [G_m J_p(mr) + H_m Y_p(mr)](L_m e^{mz}+M_m e^{-mz}) + G_p r^p + H_p r^{-p} \tag{6-346}$$

$$\begin{aligned}\dot{B}_r=&\frac{p}{r}\left\{\sum_m\left[G_m\left\{\frac{1}{m}J_p(mr) - \frac{r}{p}J_{p+1}(mr)\right\}\right.\right.\\ &\left.\left.+H_m\left\{\frac{1}{m}Y_p(mr) - \frac{r}{p}Y_{p+1}(mr)\right\}\right](L_m e^{mz}-M_m e^{-mz}) + (G_p r^p - H_p r^{-p})\, z\right\}\\ &+\frac{1}{r}(g_p r^p + h_p r^{-p})\end{aligned} \tag{6-347}$$

$$\begin{aligned}\dot{B}_\theta=&-\frac{jp}{r}\left\{\sum_m\left[\frac{1}{m}\{G_m J_p(mr) + H_m Y_p(mr)\}(L_m e^{mz}-M_m e^{-mz})\right]\right.\\ &\left.+(G_p r^p + H_p r^{-p})\, z\right\} - \frac{j}{r}(g_p r^p - h_p r^{-p})\end{aligned} \tag{6-348}$$

式中 G_m、H_m、…g_p、h_p 等为任意常数，可根据具体问题的边界条件确定．式(6-347)和(6-348)的最后一项（系数为 g_p，h_p 的项）为二维情况时 $\dot{B}_r$ 和 $\dot{B}_\theta$ 的解答．

导电圆柱体中磁场的通解　在行波磁场作用下，导电圆柱体内磁场的通解为：

$$\begin{aligned}\dot{B}_z=&\sum_m[G_\alpha J_p(\alpha r) + H_\alpha Y_p(\alpha r)](L_m e^{mz} + M_m e^{-mz})\\ &+\left[G_\omega J_p\left(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\right) + H_\omega Y_p\left(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\right)\right]z\\ &+(G_p r^p + H_p r^{-p})\left(L_\omega e^{(1+j)\frac{z}{\Delta}} + M_\omega e^{-(1+j)\frac{z}{\Delta}}\right)\end{aligned} \tag{6-349}$$

$$\begin{aligned}\dot{B}_r=&\frac{1}{r}\left\{\sum_m[G_\alpha' J_p(\alpha r) + H_\alpha' Y_p(\alpha r)](L_m' e^{mz} + M_m' e^{-mz})\right.\\ &+\left[G_\omega' J_p\left(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\right) + H_\omega' Y_p\left(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\right)\right]z\\ &\left.+(G_p' r^p + H_p' r^{-p})\left(L_\omega' e^{(1+j)\frac{z}{\Delta}} + M_\omega' e^{-(1+j)\frac{z}{\Delta}}\right)\right\}\\ &-\left\{\sum_m\frac{m}{\alpha}[G_\alpha J_{p+1}(\alpha r) + H_\alpha Y_{p+1}(\alpha r)] + (L_m e^{mz} - M_m e^{-mz})\right.\\ &+\frac{\Delta}{j(1+j)}\left[G_\omega J_{p+1}\left(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\right) + H_\omega Y_{p+1}\left(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\right)\right]\\ &\left.+(1+j)\frac{r}{2\Delta}\left(\frac{G_p}{p+1}r^p - \frac{H_p}{p-1}r^{-p}\right)\left(L_\omega e^{(1+j)\frac{z}{\Delta}} - M_\omega e^{-(1+j)\frac{z}{\Delta}}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$p \neq 1 \text{ 时} \tag{6-350}$$

当 $p=1$ 时，上式中的$\frac{H_p}{p-1}$应当用$-2H_1\ln r$ 代替，其他各项保持不变. 式(6-350)中，第一个大括弧内的式子是齐次方程的解，其形式与 $\dot{B}_r$ 完全相同；第二个大括弧内的式子则是特解.

$$\begin{aligned}\dot{B}_\theta = &-\frac{j}{r}\Big\{\sum_m\Big[G_\alpha'\Big\{J_p(\alpha r)-\frac{\alpha r}{p}J_{p+1}(\alpha r)\Big\}\\&+H_\alpha'\Big\{Y_p(\alpha r)-\frac{\alpha r}{p}Y_{p+1}(\alpha r)\Big\}\Big](L_m'e^{mz}+M_m'e^{-mz})\\&+\Big[G_\omega'\Big\{J_p\Big(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\Big)-\frac{j(1+j)r}{p\Delta}J_{p+1}\Big(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\Big)\Big\}\\&+H_\omega'\Big\{Y_p\Big(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\Big)-\frac{j(1+j)r}{p\Delta}Y_{p+1}\Big(j(+j)\frac{r}{\Delta}\Big)\Big\}\Big]z\\&+(G_p'r^p-H_p'r^{-p})\Big(L_\omega'e^{(1+j)\frac{z}{\Delta}}+M_\omega'e^{-(1+j)\frac{z}{\Delta}}\Big)\Big\}\\&-j\Big\{\sum_m\frac{m}{\alpha}[G_\alpha J_{p+1}(\alpha r)+H_\alpha Y_{p+1}(\alpha r)]+(L_me^{mz}-M_me^{-mz})\\&+\frac{\Delta}{j(1+j)}\Big[G_\omega J_{p+1}\Big(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\Big)+H_\omega Y_{p+1}\Big(j(1+j)\frac{r}{\Delta}\Big)\Big]\\&+(1+j)\frac{r}{2\Delta}\Big(\frac{G_p}{p+1}r^p+\frac{H_p}{p-1}r^{-p}\Big)\Big(L_\omega e^{(1+j)\frac{z}{\Delta}}-M_\omega e^{-(1+j)\frac{z}{\Delta}}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

$p\neq 1$ 时　　(6-351)

当 $p=1$ 时，上式中的$\frac{H_p}{p-1}$应当用$-2H_1\ln r$ 代替，其他各项保持不变. 式(6-351)中，第一个大括弧内的式子是齐次方程的解，第二个大括弧内的式子则是特解. 上面三个式子中，G_α'，H_α'，…，L_ω，M_ω 等均为任意常数，由具体问题的边界条件确定.

6-15　磁饱和的影响[24—27]

在前面的分析中，没有考虑铁心的磁饱和，即认为 $\mu_{Fe}=$常值. 计及磁饱和时，铁心的磁导率 $\mu_{Fe}=f(B)$. 下面介绍几种考虑磁饱和的方法.

(一) 分段线性化法

把磁化曲线分成两段或多段，每段用一根直线去代替实际的磁化曲线，这种方法称为分段线性化法. 图 6-37 表示把整个磁化曲线分成两段的情况. 对段 1 ($H<H_1$)，$B=\mu_1 H$，可利用 $\mu_1=$常值 的解答；对段 2 ($H>H_1$)，$B=\mu_2(H+H')$，可利用 $\mu_2=$常值 的解答，并把解出的 $H+H'$减去 H'，以得到实际的 H 值.

(二) 理想矩形磁化曲线法

对工作在高饱和区域的铁心，可近似采用理想矩形磁化曲线来代替实际磁化曲线；矩形的高度 B_0 可根据实际 $B\sim H$ 曲线选定，通常 $B_0=2-2.2$T.

矩形磁化曲线的特点是：只要一有磁场强度 H，不论 H 是多大，产生的磁感强度总是 B_0；当磁场强度改变方向时，磁感强度同时变成$-B_0$，如图 6-38 所示；即

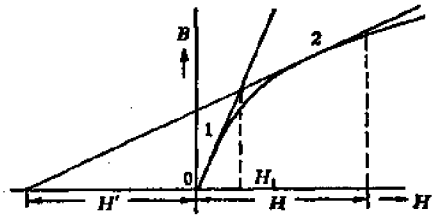


图 6-37　把磁化曲线分段线性化

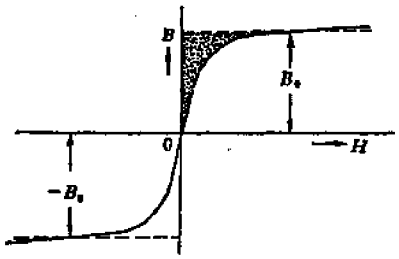


图 6-38　理想的矩形磁化曲线

$$B = B_0 \,\mathrm{Sign}\, H \tag{6-352}$$

下面研究平面电磁场进入半无限大导体的情况.

设磁场强度为 y 方向，$\mathbf{H}=\mathbf{j}H_y$；电场强度为 z 方向，$\mathbf{E}=\mathbf{k}E_z$. 若导体表面处的磁场强度 $H_{y(x=0)}=H_0\sin\omega t$，从 $\omega t=0$ 开始，表面的磁场强度由 0 向正值增加达到最大值，又逐步减少；相应地，恒幅的磁感强度波 $+B_0$ 将从导体表面逐步向导体内部推移，x' 逐步增大，如图 6-39(a)所示；一直到 $\omega t=180°$ 时，表面的磁场强度回降到 0，此时磁感强度波 $+B_0$ 将达到"理论透入深度" Δ_s 处，如图 6-39(b)所示.

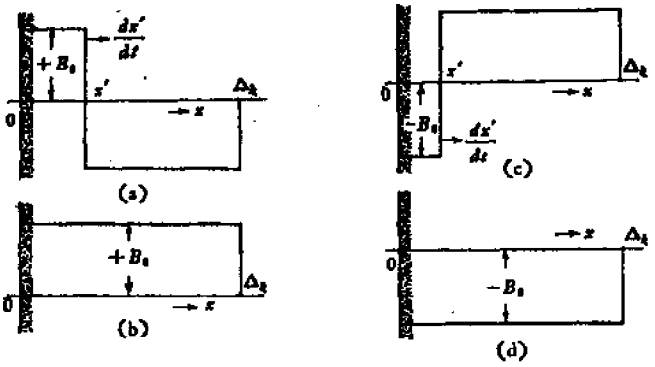


图 6-39　理论透入深度 Δ_s

当 $\omega t>180°$ 时，表面磁场强度变为负值，于是一个 $-B_0$ 的恒幅磁感强度波从导体表面发出，逐步向导体内部推移，如图 6-39(c)所示；一直到 $\omega t=360°$ 时，该波将达到 Δ_s 处，此时 $0\sim\Delta_s$ 范围内磁感强度均为 $-B_0$，如图 6-39(d)所示. 在 Δ_s 范围以外（即 $x>\Delta_s$ 处），任何瞬间磁感强度、电场强度和电密均为 0.

再看电场强度 E_z 和磁场强度 H_y 的变化规律.

拿沿 z 方向单位长度的导体来看，对于位于磁感强度波分界面 x' 右边的部分，$\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$，导体内无感应电势和电场. 对于位于 x' 左边的部分，由于磁感强度波的推移，导体内将产生感应电势和电场；即

$$E_z = 0, \qquad x > x' \text{ 时} \tag{6-353}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta\phi &= 2B_0\Delta x' \times 1\\ E_z \times 1 &= \frac{\partial\psi}{\partial t} = 2B_0\frac{\partial x'}{\partial t}\end{aligned}\right\} \quad x < x' \text{ 时} \tag{6-354}$$

由于 $J_z=\sigma E_z$，所以电密的分布为

$$\left.\begin{aligned}J_z &= \sigma 2B_0\frac{\partial x'}{\partial t} && x < x' \text{ 时}\\ &= 0 && x > x' \text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{6-355}$$

根据安培环路定律，x'处的磁场强度为 0；在 $0<x<x'$ 之间，场强 H_y 为

$$H_y = (x' - x) \times 1 \times J_z \tag{6-356}$$

在导体表面处，磁场强度为最大

$$H_{y(x=0)} = x' \times 1 \times J_z, \quad x' < x_k \tag{6-357}$$

把上面两个式子相除，可得

$$H_y = H_{y(x=0)}\left(1 - \frac{x}{x'}\right) = H_0\left(1 - \frac{x}{x'}\right)\sin\omega t \qquad 0 < x < x' \tag{6-358}$$

再看 x'与 ωt 的关系.

把式(6-355)代入式(6-357)，可得

$$H_{y(x=0)} = x'\sigma 2B_0\frac{\partial x'}{\partial t} = \sigma B_0\frac{\partial}{\partial t}x'^2 \qquad 0 < \omega t < 180^\circ \tag{6-359}$$

考虑到 $H_{y(x=0)}=H_0\sin\omega t$，所以

$$x'^2 = \frac{H_0}{\sigma B_0}\int_0^t \sin\omega t dt = \frac{2H_0}{\omega\sigma B_0}\sin^2\frac{\omega t}{2} \tag{6-360}$$

或

$$x' = \sqrt{\frac{2H_0}{\omega\sigma B_0}}\sin\frac{\omega t}{2} = \Delta_k\sin\frac{\omega t}{2} \qquad 0 < \omega t < 180^\circ \tag{6-361}$$

其中 Δ_k 为 x'的最大值，称为“理论透入深度”，即考虑饱和时电磁场衰减到零的深度；

$$\Delta_k = \sqrt{\frac{2H_0}{\omega\sigma B_0}} \tag{6-362}$$

当 $\omega t=180°$时，x'又重新从 0 开始.

电场强度 E_z 为

$$E_z = 2B_0\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{2H_0}{\sigma\Delta_k}\cos\frac{\omega t}{2} \qquad 0 < \omega t < 180^\circ \tag{6-363}$$

图 6-40 表示 $H_{y(x=0)}$，x'和 $E_z=f(t)$. 图 6-41 表示 B_y，E_z 和 H_y 在导磁体内随时间而推移的变化情况.

把 E_z 分成基波和谐波，可得基波 E_{z1}为

$$E_{z1} = \frac{8H_0}{3\pi\sigma\Delta_k}(\cos\omega t + 2\sin\omega t) \tag{6-364}$$

其中第一部分为与 H_y 正交的部分（即无功部分），第二部分为与 H_y 同相的部分（即有功部分）. 由此可得单位面积的涡流损耗 P_s 为

$$P_s = \frac{1}{2}(E_{z1(\text{同相})}H_y)_{(x=0)} = \frac{8H_0^2}{3\pi\sigma\Delta_k} \tag{6-365}$$

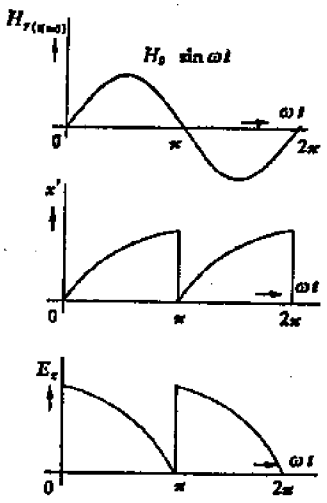


图 6-40 $H_{y(x=0)}$，x' 和 E_z 随时间的变化情况

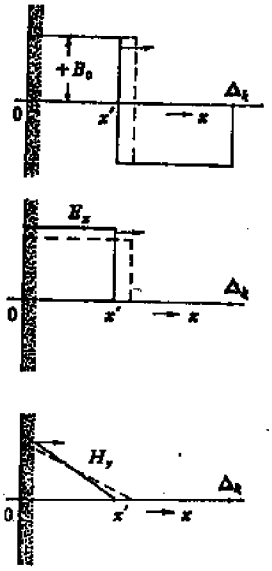


图 6-41 B_y，E_z 和 H_y 在导磁体内的推移和变化

内阻抗 Z_i 则为

$$\left.\begin{aligned} R_{\sim} &= \frac{E_{z1(\text{同相})}}{H_y}_{(x=0)} = \frac{16}{3\pi\sigma\Delta_k} = 1.7\frac{1}{\sigma\Delta_k} \\ X_{\sim} &= \frac{E_{z1(\text{正交})}}{H_y}_{(x=0)} = 0.85\frac{1}{\sigma\Delta_k} \\ \frac{X_{\sim}}{R_{\sim}} &= 0.5, \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\frac{X_{\sim}}{R_{\sim}} = 26.58^\circ \end{aligned}\right\} \tag{6-366}$$

涡流损耗亦可从焦耳损耗求出. 对某一瞬间，单位面积的焦耳损耗为 $\frac{1}{\sigma}J^2x'$，于是 $0 \leqslant \omega t \leqslant 180^\circ$ 期间的平均损耗为

$$P_e = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{1}{\sigma}J^2x'dt = \frac{1}{\sigma}\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left(\sigma 2B_0\frac{dx'}{dt}\right)^2 x'dt$$

$$= \frac{\sigma B_0^2\omega_3\Delta_k^3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\cos^2\frac{\omega t}{2}\sin\frac{\omega t}{2}dt = \frac{2}{3}\frac{\sigma\omega^2\Delta_k^3B_0^2}{\pi} = \frac{8}{3\pi}\frac{H_0^2}{\sigma\Delta_k}$$

即与式(6-365)一致.

(三) 把磁化曲线作为高次抛物线

在强磁场情况下，铁心的 $B\sim H$ 曲线亦可近似地作为高次抛物线

$$B = cH^{\frac{1}{n}} \tag{6-367}$$

其中 c 为常值；n 随材料而异，$4<n<20$，如表 6-4 所示.

表 6-4　不同材料的 n 值

材　料	n　值	备　注
坡莫合金	20	$B>0.7T$
变压器钢片	10	$B>1.2T$
软　钢	9.5	$B>1.3T$
铸　铁	4	$B>0.6T$

当平面电磁波透入半无限大的导体时，麦克斯韦方程为

$$-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}=\sigma \dot{E}_z, \qquad \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}=-j\omega\mu\dot{H}_y \tag{6-368}$$

把第二式代入第一式，并考虑到 μ 为变数，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2}&=j\omega\sigma\mu\dot{H}_y\\ \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2}&=j\omega\sigma\mu\dot{E}_z+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{6-369}$$

对强磁场情况，随着电磁波的透入，μ 随 x 的变化可近似地表示为

$$\mu=\frac{\mu_{(x=0)}}{\left(1-\dfrac{x}{\Delta_k}\right)^2} \tag{6-370}$$

式中 Δ_k 为“理论透入深度”，可以证明

$$\Delta_k=\frac{\sqrt[4]{2n(3n+1)^2(n+1)}}{\sqrt{2}\,(n-1)}\Delta_0 \tag{6-371}$$

Δ_0 为用表面处的磁导率所算出的透入深度，$\Delta_0=\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_{(x=0)}\sigma}}$．于是式(6-369)中第一式可改写成

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2}=j\omega\sigma\frac{\mu_{(x=0)}}{\left(1-\dfrac{x}{\Delta_k}\right)^2}\dot{H}_y \tag{6-372}$$

若 $x=0$ 处，$\dot{H}_y=H_0$；则上式的解答为

$$\dot{H}_y=H_0\left(1-\frac{x}{\Delta_k}\right)^{\alpha} \qquad 0<x<\Delta_k \tag{6-373}$$

其中

$$\alpha=\frac{2n}{n-1}\left(1+j\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\right) \tag{6-374}$$

电场强度 $\dot{E}_z$ 为

$$\dot{E}_z=-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}=\frac{\alpha H_0}{\sigma\Delta_k}\left(1-\frac{x}{\Delta_k}\right)^{\alpha-1} \tag{6-375}$$

于是，内阻抗 Z_i 为

$$Z_i = \frac{E_x}{H_{y(x=0)}} = \frac{\alpha}{\sigma\Delta_k} = \frac{1}{\sigma\Delta_0}\frac{2\sqrt{2}n\left(1+j\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\right)}{\sqrt{2n(3n+1)^2(n+1)}} \tag{6-376}$$

在 $4<n<20$ 的范围内，可以算出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{R_\sim}{R_{\sim(\mu=常值)}} \approx 1.3 \sim 1.35, \qquad \frac{X_\sim}{X_{\sim(\mu=常值)}} \approx 1 \sim 0.98\\ &\mathrm{tg}\varphi \approx 0.78 \sim 0.76\end{aligned}\right\} \tag{6-377}$$

其中 μ 为不饱和时的磁导值. 若进一步计及磁滞损耗，则

$$\left.\begin{aligned}&\frac{R_\sim}{R_{\sim(\mu=常值)}} \approx 1.4, \qquad \frac{X_\sim}{X_{\sim(\mu=常值)}} \approx 0.85,\\ &\mathrm{tg}\varphi \approx 0.6, \qquad \Delta_k = 1.7\Delta_0\end{aligned}\right\} \tag{6-378}$$

6-16 小　　结

本章用一系列实际例子说明了稳态正弦电磁场的解法和应用.

求解复涡流方程的基本方法是分离变量法. 对于二维问题，既可用磁感强度 **B** 求解，亦可用向量磁位 $\dot{A}_z$ 求解；由于后者仅需求解一个标量方程，比较简单，所以实用上多数问题都采用 $\dot{A}_z$ 来求解. 为使解答适合给定的边界条件，通常有两种办法：一种办法是设法找到一个满足所有边界条件的单一解答；另一种办法是把整个解答分成两部分，其中之一满足部分边界条件，另一则满足余下的边界条件，总体来看满足全部边界条件.

实际电机中既有导电区，又有非导电区，此时需要分区求解，从而使任意常数的数目增多，甚至难以确定. 因此，如何合理地缩减求解区的数目，是一个重要的实际问题. 对于实际电机，除需知道磁场和涡流分布外，有时还要求得有关的等效阻抗和涡流损耗. 此时要用到玻印亭向量和导电区表面处的磁场和电场强度. 导体和导电区内的涡流损耗亦可以通过计算焦耳损耗来得到，有些场合可以用叠加法来近似算出涡流损耗.

交流电机的气隙磁场很多属于行波磁场，本章简要地说明了在正弦行波磁场作用下，导电板中二维涡流问题的解法和行波电流片的电磁镜像. 对于转子为有限长度的实心转子感应电动机，需要用准三维涡流场的理论来解决. 有关这方面的文献和方法很多，本章阐述了一种基本假定比较切合实际，方程总数较少，最终结果比较简洁的方法.

最后，本章介绍了在圆柱坐标下三维复涡流方程的通解，以及正弦电磁场中计及磁饱和的方法.

参 考 文 献

[1] K. Simonyi, Theoretische Electrotechnik, VEB Deutscher Verlag, 1956.

[2] R. L. Stoll, The Analysis of Eddy Current, Clarendon Press, 1974.

[3] G. Schaffer, P. Banderet, Skin Effect in Heavy-Current Conductor Bars, B. B. Review, August, 1965.

[4] 李亚君，电枢槽中空心导线的某些电磁场问题，电世界，1962，No. 1，2，3，4.

[5] 傅恩源、周亚民，实心与空心导线有效部分的附加铜耗，哈尔滨工业大学结业工作，1964.

[6] Э. Г. Кашарский, К расчету Добавочных потери в обмотке статора турбогенератора, Сборник работ по вопросами электромеханика, АН СССР, 1961, No 6.

[7] M. Liwschitz-Garik, Skin-effect Bars of Squirrel-cage Rotors, AIEE Trans, 1954.

[8] L. V. Bewley, Two Dimensional Field in Electrical Engineering, Dover, 1963.

[9] W. Dietrich, Berechung der Wirkverlust von Transformatorewicklungen Unter Berushsightigung des Tatsachichen Streufeldverlaufes, ETZ-A, H. 4, 1961.

[10] 梁艳萍、汤蕴璆、徐子宏，变压器线圈涡流损耗的混合算法，哈尔滨电工学院学报，1991，No. 1.

[11] S. A. Swann, J. W. Salmon, Effective Resistance and Reactance of a Solid Cylindrical Conductor Placed in a Semi-closed Slot, Proc. IEE, pt. C, 1962.

[12] S. A. Swann, J. W. Salmon, Effective Resistance and Reactance of a Rectangular Conductor Placed in a Semiclosed Slot. Proc. IEEE, No. 9, 1963.

[13] G. W. Carter, The Electromagnetic Field in its Engineering Aspects, Longmans and Green, 1957.

[14] R. L. Stoll, P. Hammond, Calculation of the Magnetic Field of Rotating Machines, Part 4: Approximate Determination of the Field and the Losses Associated with Eddy Currents in Conducting Surfaces, Proc. IEE, No. 5, 1965.

[15] P. Pohl, Electromagnetic and Mechanical Effect in Solid Iron due to an Alternating or Rotating Magnetic Field, Proc. IEE, pt. Ⅰ, 1944.

[16] G. Angst, Polyphase Induction motor with Solid Rotor; Effect of Saturation and Finite Length, AIEE Trans., pt. Ⅱ, PAS, 1962.

[17] A. J. Wood C. Concordia, An Analysis of Solid Rotor Machines, pt. Ⅱ-Finite Length Effects, AIEE Trans., pt Ⅱ, PAS, 1960.

[18] H. Yee, Effects of Finite Length in Solid-rotor Induction Machines, Proc. IEE, No. 8, 1971.

[19] H. Yee, T. Wilson, Saturation and Finite-length Effects in Solid-rotor Induction Machines, Proc. IEE, No. 7, 1972.

[20] 冯尔健，铁磁体实心转子异步电机理论与计算，科学出版社，1980.

[21] P. Moon, D. E. Spencer, Field Theory for Engineers, Van Nostrand, 1961.

[22] P. J. Lawrenson, M. C. Ralph, General 3-dimensional Solution of Eddy-current and Laplacian Fields in Cylindrical Structures, Proc. IEE, No. 2. 1970.

[23] P. P. Yannopoulos-Lascaratos, J. A. Tegopoulos, Eddy Current Distribution in Cylindrical Structures Caused by Rotating Magnetic Fields, Proc. IEE, pt. B, 1982.

[24] Л. Р. Неиман, Поверхностный эффект в ферромагнитных телах, ГЭИ, 1949.

[25] P. D. Agarwal, Eddy-current Losses in Solid and Laminated Iron, AIEE Trans., pt. I, 1959.

[26] N. Kasavamurthy, P. R. Rajagopalan and V. Sabba Rao, Effect of Saturation on the Core Loss of Thin Ferromagnetic Plates Subjected to Alternating Flux, Proc. IEE, 1963.

[27] V. Sabba Rao, Eddy-current Losses in Finite Section of Solid Iron Under Saturation, Proc. IEE, No. 2, 1964.

第七章　正弦电磁场的数值解法

由于铁磁介质的非线性，加上边界形状较为复杂，使得电机内的许多正弦电磁场问题需要用数值法来求解；例如凸形槽或组合槽中载流导体的集肤效应，考虑磁饱和时感应电动机起动性能的计算，实心转子感应电机中的正弦电磁场，汽轮发电机端部的行波电磁场等等. 本章先说明二维线性正弦涡流场的有限元解法，再说明非线性问题的处理方法；然后进一步阐明三维正弦涡流场的 $\mathbf{A}$，φ 表述和 $\mathbf{T}$，Ω 表述和用加权余量法离散时所得到的有限元方程，以及三维问题中边值的给法；最后阐述准三维行波电磁场的泛函、变分及其离散格式. 为说明方法的应用，以凸形槽中载流导体的集肤效应和感应电动机起动性能的计算为例，对二维正弦电磁场问题中有限元法的实施，进行了较详细的介绍.

7-1　二维线性正弦涡流场的有限元分析[1—4]

（一）二维正弦涡流场的泛函、变分和离散

对于二维线性正弦涡流场，$\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{k}\dot{A}_z$，$\dot{\mathbf{J}}=\mathbf{k}\dot{J}_z$，$\mu$=常值. 若边值为混合边值，则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial y^2}=-\mu\dot{J}_{\varphi z}+j\omega\mu\sigma\dot{A}_z \qquad \text{在 } G \text{ 内}\\&\dot{A}_z|_{\Gamma_1}=\dot{A}_0,\quad \nu\frac{\partial\dot{A}}{\partial n}\Gamma_2|=\dot{q} \qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{7-1}$$

式中 $-j\omega\sigma\dot{A}_z$ 为导体内的感应电流密度（涡流电密）；$\dot{J}_{\varphi z}$ 为由电位梯度所引起的电密，$\dot{J}_{\varphi z}=\sigma\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial z}$. 在二维问题中，$\dot{J}_{\varphi z}$ 为一复常数. 对于外施源电流密度 $\dot{J}_{sz}$ 的区域，可以认为 $\dot{J}_{\varphi z}=\dot{J}_{sz}$，$\sigma=0$.

不难导出，与上述边值问题式（7-1）等价的变分问题为：

$$\left.\begin{aligned}I(\dot{A}_z)=&\frac{1}{2\mu}\iint_G\left[\left(\frac{\partial\dot{A}_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\dot{A}_z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\frac{1}{2}j\omega\sigma\iint_G\dot{A}_z^2dxdy\\&-\iint_G\dot{J}_{\varphi z}\dot{A}_zdxdy-\int_{\Gamma_2}\dot{q}\,\dot{A}_zdl=\text{stationary}\\&\dot{A}_z|_{\Gamma_1}=\dot{A}_0\end{aligned}\right\} \tag{7-2}$$

可以看出，泛函 $I(\dot{A}_z)$ 中的第一、第三和第四部分，形式上与恒定磁场时相似，第二部分（对应于感应涡流部分）则是新增加的.

若整个求解域剖分成 E 个单元，则泛函 I 亦可写成

$$I=\sum_{e=1}^{E}I^e=\sum_{e=1}^{E}(I_1^e+I_2^e+I_3^e+I_4^e) \tag{7-3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} I_1^e &= \frac{1}{2\mu}\iint_{G_e}\left[\left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy, \quad I_2^e=\frac{1}{2}j\omega\sigma\iint_{G_e}\dot{A}_z^2dxdy \\ I_3^e &= -\iint_{G_e}\dot{J}_{sz}\dot{A}_z dxdy, \quad I_4^e=-\int_{\Gamma_{2e}}\dot{q}\,\dot{A}_z dl \end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

下面分别对三节点三角元和六节点三角元两种情况进行分析.

（二）三节点三角元的离散格式

对于三节点三角元（一阶元），三角元内任一点的复向量磁位 $\dot{A}_z^e$ 可用单元的形状函数和三个顶点的磁位表示为

$$\dot{A}_z^e \doteq \sum_{k=i,j,m} N_k^e \dot{A}_k^e = \mathbf{N}^e\mathbf{A}^e \tag{7-5}$$

式中 $\mathbf{N}^e$ 为单元形状函数的行矩阵；$\mathbf{A}^e$ 为单元节点复磁位的列向量；

$$\mathbf{N}^e=\begin{bmatrix}N_i^e & N_j^e & N_m^e\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^e=\begin{bmatrix}\dot{A}_i^e\\ \dot{A}_j^e\\ \dot{A}_m^e\end{bmatrix} \tag{7-6}$$

$$N_k^e=\frac{1}{2\Delta_e}(a_k+b_kx+c_ky), \qquad k=i,j,m \tag{7-7}$$

由此可得

$$\frac{\partial \dot{A}_z^e}{\partial x}=\sum_{k=i,j,m}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\dot{A}_k^e=\frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial x}\mathbf{A}^e, \quad \frac{\partial \dot{A}_z^e}{\partial y}=\sum_{k=i,j,m}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\dot{A}_k^e=\frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial y}\mathbf{A}^e \tag{7-8}$$

单元分析 把式(7-8)代入式(7-4)中的 I_1^e，可得

$$\left.\begin{aligned} I_1^e &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}^e)^T\mathbf{k}_1^e\mathbf{A}^e \\ \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{A}^e} &= \mathbf{k}_1^e\mathbf{A}^e \end{aligned}\right\} \tag{7-9}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1^e &= \nu_e\iint_{G_e}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial x}\right)^T\frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial x}+\left(\frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial y}\right)^T\frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial y}\right]dxdy \\ &= \frac{\nu_e}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} b_i^2+c_i^2 & \text{对} & \text{称} \\ b_jb_i+c_jc_i & b_j^2+c_j^2 & \\ b_mb_i+c_mc_i & b_mb_j+c_mc_j & b_m^2+c_m^2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7-10}$$

可以看出，式(7-10)与恒定磁场时的单元系数矩阵 $\mathbf{k}^e$ 相同.

再看 I_2^e. I_2^e 是正弦电磁场所增加的项目，其离散格式需要专门推导. 把式(7-5)代入 I_2^e，可知

$$\left.\begin{aligned} I_2^e &= \frac{1}{2}j\omega\sigma_e\iint_{G_e}\dot{A}_z^2dxdy=\frac{1}{2}j\omega\sigma_e\iint_{G_e}(\mathbf{A}^e)^T(\mathbf{N}^e)^T\mathbf{N}^e\mathbf{A}^e dxdy \\ &= \frac{1}{2}j(\mathbf{A}^e)^T\mathbf{k}_2^e\mathbf{A}^e \\ \frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{A}^e} &= j\,\mathbf{k}_2^e\mathbf{A}^e \end{aligned}\right\} \tag{7-11}$$

式中

$$j\mathbf{k}_2^e = j\omega\sigma_e\iint_{G_e}(\mathbf{N}^e)^T\mathbf{N}^e dxdy = j\omega\sigma_e\iint_{G_e}\begin{bmatrix}(N_i^e)^2 & N_i^eN_j^e & N_i^eN_m^e\\ N_j^eN_i^e & (N_j^e)^2 & N_j^eN_m^e\\ N_m^eN_i^e & N_m^eN_j^e & (N_m^e)^2\end{bmatrix}dxdy$$

$$= j\frac{1}{12}\omega\sigma_e\Delta_e\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} \tag{7-12}$$

上式推导过程中，利用了以下关系：

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{G_e}(N_k^e)^2dxdy = \frac{1}{6}\Delta_e, \quad k = i,j,m\\ &\iint_{G_e}N_k^eN_j^edxdy = \frac{1}{12}\Delta_e, \quad j \neq k\end{aligned}\right\} \tag{7-13}$$

再看 I_3^e. I_3^e 的离散格式亦和恒定磁场时类似；即

$$\left.\begin{aligned}I_3^e &= -\iint_{G_e}j_{\varphi e}A_e dxdy = -j_{\varphi e}\iint_{G_e}\mathbf{N}^e\mathbf{A}^e dxdy\\ &= -(\mathbf{f}_3^e)^T\mathbf{A}^e\\ \frac{\partial I_3^e}{\partial\mathbf{A}^e} &= -\mathbf{f}_3^e\end{aligned}\right\} \tag{7-14}$$

式中 $\mathbf{f}_3^e$ 为

$$\mathbf{f}_3^e = j_{\varphi e}\iint_{G_e}(\mathbf{N}^e)^T dxdy = \frac{1}{3}j_{\varphi e}\Delta_e\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \tag{7-15}$$

最后，对 I_4^e 有

$$\left.\begin{aligned}I_4^e &= -\int_{\Gamma_{2e}}\dot{q}\,A_e dl = -(\mathbf{f}_4^e)^T\mathbf{A}^e\\ \frac{\partial I_4^e}{\partial\mathbf{A}^e} &= -\mathbf{f}_4^e\end{aligned}\right\} \tag{7-16}$$

式中

$$\mathbf{f}_4^e = \frac{1}{2}\dot{q}_eL_e\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \tag{7-17}$$

$\dot{q}_e$为单元 e 的一条边上的第二类边值；L_e 为该边的边长.

把上面这四部分相加，就有

$$\frac{\partial I^e}{\partial\mathbf{A}^e} = (\mathbf{k}_1^e + j\mathbf{k}_2^e)\mathbf{A}^e - (\mathbf{f}_3^e + \mathbf{f}_4^e) = \mathbf{k}^e\mathbf{A}^e - \mathbf{f}^e \tag{7-18}$$

式中 $\mathbf{k}^e$ 和 $\mathbf{f}^e$ 分别为单元系数矩阵和右端项列阵；

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{k}_1^e + j\mathbf{k}_2^e$$

$$= \frac{\nu_e}{4\Delta_e}\begin{bmatrix}b_i^2+c_i^2 & \text{对} & \text{称}\\ b_ib_i+c_ic_i & b_j^2+c_j^2 & \\ b_mb_i+c_mc_i & b_mb_j+c_mc_j & b_m^2+c_m^2\end{bmatrix} + j\frac{1}{12}\omega\sigma_e\Delta_e\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} \tag{7-19}$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_3^e + \mathbf{f}_4^e = \frac{1}{3}\dot{j}_{se}\Delta_e\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\dot{q}_e L_e\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \tag{7-20}$$

总体合成 再把 $\mathbf{A}^e$ 扩展成全部节点磁位的列阵 $\mathbf{A}$，相应地，$\mathbf{k}^e$ 和 $\mathbf{f}^e$ 扩展成单元贡献 $\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$，则式(7-18)可改写成

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{K}^e\mathbf{A} - \mathbf{F}^e \tag{7-21}$$

再进行总体合成，并使$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{A}}=\mathbf{0}$；即

$$\sum_{e=1}^{E}\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{e=1}^{E}(\mathbf{K}^e\mathbf{A} - \mathbf{F}^e) = \mathbf{K}\mathbf{A} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{7-22}$$

由此可得复线性代数方程组

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{F} \tag{7-23}$$

式中

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{E}\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_1 + j\mathbf{K}_2, \quad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^{E}\mathbf{F}^e \tag{7-24}$$

再用第一类边界条件修改式 (7-23)，求解修改后的复代数方程组，即可解得各节点的复磁位 $\dot{A}_z$.

（三）六节点三角元的离散格式

对六节点三角元（二阶元），$\mathbf{k}_1^e$ 的离散格式仍与恒定磁场时相同，即如式 (4-219) 所示；$j\mathbf{k}_2^e$ 则需要专门推导.

从上面的分析可知，

$$j\mathbf{k}_2^e = j\omega\sigma_e\iint_{G_e}(\mathbf{N}^e)^T\mathbf{N}^e dxdy \tag{7-25}$$

$\mathbf{k}_2^e$ 中的元素 $k_{2,lk}^e$ 为

$$k_{2,lk}^e = \omega\sigma_e\iint_{G_e}N_l^e N_k^e dxdy, \qquad l,k = 1,2,\cdots,6 \tag{7-26}$$

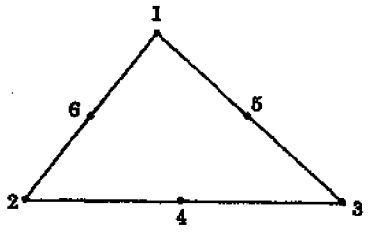


图 7-1 六节点三角元

于是对角线元素为

$$\begin{aligned} k_{2,11}^e &= k_{2,22}^e \\ &= k_{2,33}^e \\ &= \omega\sigma_e\iint_{G_e}L_i^2(2L_i-1)^2 dxdy \\ &= \frac{6}{180}\omega\sigma_e\Delta_e \end{aligned} \tag{7-27}$$

$$\begin{aligned} k_{2,44}^e &= k_{2,55}^e = k_{2,56}^e \\ &= \omega\sigma_e\iint_{G_e}(4L_iL_j)^2 dxdy \\ &= \frac{32}{180}\omega\sigma_e\Delta_e \end{aligned} \tag{7-28}$$

主节点间的元素为

$$k^e_{2,12}=k^e_{2,23}=k^e_{2,31}$$
$$=\omega\sigma_e\iint_{G_e}L_i(2L_i-1)L_j(2L_j-1)dxdy$$
$$=-\frac{1}{180}\omega\sigma_e\Delta_e \tag{7-29}$$

主节点与对边中点间的元素为

$$k^e_{2,14}=k^e_{2,25}=k^e_{2,36}=\omega\sigma_e\iint_{G_e}L_i(2L_i-1)4L_jL_mdxdy$$
$$=-\frac{4}{180}\omega\sigma_e\Delta_e \tag{7-30}$$

主节点与相邻中间节点间的元素为

$$k^e_{2,16}=k^e_{2,15}=k^e_{2,24}=k^e_{2,26}=k^e_{2,34}=k^e_{2,35}$$
$$=\omega\sigma_e\iint_{G_e}L_i(2L_i-1)4L_iL_jdxdy=0 \tag{7-31}$$

中间节点间的元素为

$$k^e_{2,45}=k^e_{2,56}=k^e_{2,64}$$
$$=\omega\sigma_e\iint_{G_e}4L_iL_j4L_jL_mdxdy$$
$$=\frac{16}{180}\omega\sigma_e\Delta_e \tag{7-32}$$

在以上推导中利用了下列关系

$$\iint_{G_e}(N^e_i)^a(N^e_j)^b(N^e_m)^cdxdy=\frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2\Delta_e \tag{7-33}$$

最后可得

$$j\mathbf{k}^e_2=j\frac{1}{180}\omega\sigma_e\Delta_e\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\multicolumn{6}{c}{\text{对 称}}\end{array}\\\left[\begin{array}{cccccc}6&&&&&\\-1&6&&&&\\-1&-1&6&&&\\-4&0&0&32&&\\0&-4&0&16&32&\\0&0&-4&16&16&32\end{array}\right]\end{array} \tag{7-34}$$

单元的系数矩阵 $\mathbf{k}^e$ 为

$$\mathbf{k}^e=\mathbf{k}^e_1+j\mathbf{k}^e_2 \tag{7-35}$$

$\mathbf{f}^e$ 的结果与式(4-232)相同，仅需把 J_e 改成 $\dot{J}_{\varphi e}$. 总体合成和方程组的修改办法同前.

（四）磁感强度，电流密度和场图

磁感强度为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{B}_x=\frac{\partial\dot{A}_z}{\partial y},\qquad \dot{B}_y=-\frac{\partial\dot{A}_z}{\partial x}\\&\dot{\mathbf{B}}=\mathbf{i}\dot{B}_x+\mathbf{j}\dot{B}_y\end{aligned}\right\} \tag{7-36}$$

单元内的电密 $\dot{J}_{sz}$ 为

$$\dot{J}_{sz} = \dot{J}_{sj} - j\omega\sigma_s\dot{A}_{z(av)} \tag{7-37}$$

对二维正弦电磁场，场图应当用 A_z 的瞬时值来画. 为考察磁场的变化，通常画出 $\omega t=0$ 和 $\omega t=90°$ 两个瞬间的场图. 若复磁位 $\dot{A}_z$ 已知，$\dot{A}_z=A_R+jA_I$，其中 A_R 和 A_I 分别为 $\dot{A}_z$ 的实部和虚部；则 A_z 的瞬时值为

$$A_z = \mathrm{Re}\dot{A}_z e^{j\omega t} = A_R\cos\omega t - A_I\sin\omega t \tag{7-38}$$

当 $\omega t=0$ 时，$A_z=A_R$；$\omega t=90°$ 时，$A_z=-A_I$. 由此可见，由 $\dot{A}_z$ 的实部 $A_R(x,y)$ 所画出的等 A_z 线，即代表 $\omega t=0$ 时磁力线的分布；由负虚部 $-A_I(x,y)$ 画出的等 A_z 线，将代表 $\omega t=90°$ 时磁力线的分布.

7-2 凸形槽内导体的电流集肤效应[4—7]

为改善起动性能，在笼型感应电动机的转子中部分采用了凸形槽. 前章的文献 [7] 对笼型转子的各种异形槽的参数给出了近似的解析计算公式. 除了作为二维正弦涡流场问题来求解，铁心磁导率 μ_{Fe} 设为无穷大之外，该文献还假定，无论对哪种槽形，磁力线均为平行地通过槽内，透入深度亦均相同. 计算表明，后面两条假定与实际情况有一定出入. 采用数值法来求解这一问题时，可以取消这两条假定，使解出的磁场更接近于实际，算出的参数亦更加准确. 下面用有限元法来研究这一问题.

(一) 基本方程和边界条件

图 7-2 表示一个转子凸形槽，导条中的电流 $i=I_m\cos\omega t$. 下面来计算槽内的磁场分布，导条内的电密分布和导条的交流电阻和电感.

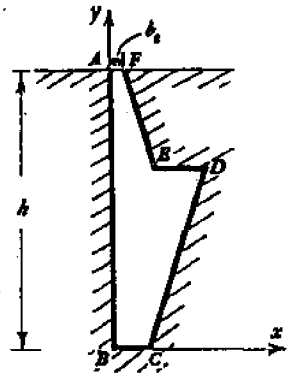


图 7-2 凸形槽

基本假定 为简化分析，作如下假定：

1. 作为二维问题分析，向量磁位和电密只有 z 向分量 $\dot{A}_z$ 和 $\dot{J}_z$.

2. 铁心磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$.

3. 铁心和导条间没有空隙.

基本方程和边界条件 导体内的复向量磁位 $\dot{A}_z$ 应满足

$$\frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{A}_z}{\partial y^2}=j\omega\mu_0\sigma\dot{A}_z-\mu_0\dot{J}_{sz} \tag{7-39}$$

式中 $\dot{J}_{sz}=\dfrac{\dot{I}_m}{S_b}$，$\dot{I}_m$ 为导条内的电流(幅值)，S_b 为导条面积. 本题的边界条件为：

1. 在边界 $ABCDEF$ 上，$B_t=0$；即

$$\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial n}_{ABCDEF} = 0 \tag{7-40}$$

2. 在槽开口处，边界条件有两种给法：一种是从安培环路定律出发，认为槽开口处 $\dot{H}_t = -\frac{\dot{I}_m}{b_t}$；即

$$\nu_0 \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}_{(y=h)} = -\frac{\dot{I}_m}{b_t} \tag{7-41}$$

式中 b_t 为槽口宽. 另一种认为是槽口处为一平行于槽底的磁力线；即

$$\dot{A}_{z(y=h)} = \dot{A}_0 \tag{7-42}$$

（二）槽口处给定 $\dot{H}_t$ 时

此时问题将成为具有纯二类边界条件的边值问题，与此问题等价的变分问题为：

$$\left.\begin{aligned} I = &\frac{1}{2\mu_0}\iint_G\left[\left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + \frac{1}{2}j\omega\sigma\iint_G \dot{A}^2 dxdy \\ &- \iint_G \dot{J}_{sz}\dot{A}_z dxdy - \int_{\Gamma_2}\dot{q}\,\dot{A}_z dl = \text{stationary} \end{aligned}\right\} \tag{7-43}$$

式中 $\dot{q} = \nu_0 \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial n}_{(y=h)} = -\frac{\dot{I}_m}{b_t}$.

把整个求解域剖分成一系列三角元，考虑到集肤效应，导条上部剖得较密，如图 7-3 所示. 对变分问题离散化，可得联立代数方程组，由此可解得各个节点处的磁位 $\dot{A}_z$，并画出槽内的磁场分布，如图 7-4 所示. 计算表明，此时槽口处将存在微弱的 y 向分量磁场.

单元内的平均电密 $\dot{J}_{ze(av)}$ 为

$$\dot{J}_{ze(av)} = \dot{J}_{sz} - j\omega\sigma\dot{A}_{ze(av)} \tag{7-44}$$

式中 $\dot{A}_{ze(av)}$ 为单元三个节点的平均磁位值.

此法给出了整个边界上的 $\dot{H}_t$（即 $\nu = \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial n}$），对于正弦涡流场，将具有唯一解. 另外，由于边值已经通过安培环路定律与槽内的总电流值 $\dot{I}_m$ 联系起来，因此解完以后，导条内电密的面积分将恰好与给定的外施电流相等，故解答是正确的.

（三）槽口处设为一平行于槽底的槽力线时

如设槽口处 $\dot{A}_z = \dot{A}_0$，则此问题成为混合边值问题；其中槽壁处为二类齐次边界条件，槽口处为一类边界条件. 相应的条件变分问题为：

$$\left.\begin{aligned} I = &\frac{1}{2\mu_0}\iint_G\left[\left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + \frac{1}{2}j\omega\sigma\iint_G \dot{A}_z^2 dxdy \\ &- \iint_G \dot{J}_{sz}\dot{A}_z dxdy = \text{stationary} \\ &\dot{A}_z|_{FA} = \dot{A}_0 \end{aligned}\right\} \tag{7-45}$$

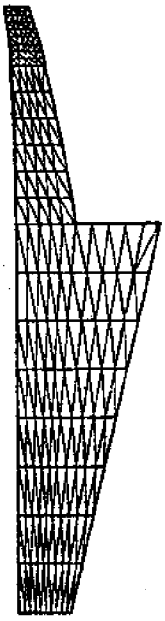


图 7-3　槽内单元剖分

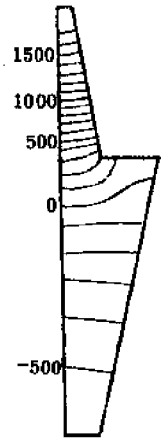


图 7-4　槽内磁场分布$\left(\text{槽口处 } \dot{H}_t=-\frac{\dot{I}_m}{b_s}\right)$

其中 $\dot{A}_0$ 的选择应保证导条内的总电流值恰好等于给定的外施电流 $\dot{I}_m$；即

$$\iint_G \dot{J}_z dS = \dot{I}_m \tag{7-46}$$

为满足式(7-46)，通常要进行三次计算：先任意给定 $\dot{A}_0=\dot{A}_{01}$，并解出各个节点的磁位值 $\dot{A}_z$，然后求出各个单元电密 $\dot{J}_{ze(a)}$ 和导条的总电流值 $\dot{I}_1$；再使 $\dot{A}_0=\dot{A}_{02}$，并再次求解 $\dot{A}_z$ 并算出总电流 $\dot{I}_2$. 然后通过线性插值，即可确定满足式(7-46)的边值 $\dot{A}_0$

$$\dot{A}_0=\frac{\dot{A}_{02}\ (\dot{I}_1-\dot{I}_m)\ -\dot{A}_{01}\ (\dot{I}_2-\dot{I}_m)}{\dot{I}_1-\dot{I}_2} \tag{7-47}$$

以此 $\dot{A}_0$ 作为槽口处的边值再次求解 $\dot{A}_z$，即可得到正确的解答. 图 7-5 表示槽口处给定 $\dot{A}_0$ 时的磁场分布. 把图 7-5 和图 7-4 加以比较，不难看出，除槽口处磁场分布稍有不同外，其他各处的磁场分布基本相同.

（四）导条的交流电阻和漏感

槽内磁场分布和导条内电密分布求出后，导条的交流电阻增加系数 k_r 即可算出

$$k_r=\frac{R_\sim}{R_=}=\frac{\int S_b|\dot{J}_z|^2dS}{j_{za}^2S_b}\doteq\frac{\sum_{e=1}^{E}(J_{eR}^2+J_{eI}^2)\Delta_e}{J_{za}^2S_b} \tag{7-48}$$

式中 J_{eR} 和 J_{eI} 分别为单元 e 内复电密的实部和虚部.

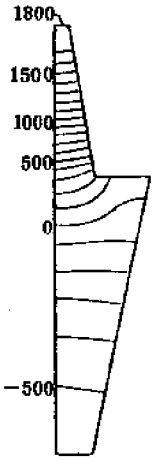


图 7-5　槽口给定 $\dot{A}_0$ 时槽内的磁场分布

由于磁场能量 W_m 等于

$$W_m = \frac{l}{4\mu_0}\int S_b |\dot{\mathbf{B}}|^2 dS = \frac{1}{4}L_{\sim} I_m^2$$

式中 l 为轴向长度；所以交流电感 $L_{\sim}$ 为

$$L_{\sim} = \frac{\int S_b |\dot{\mathbf{B}}|^2 dS}{\mu_0 I_m^2} l \tag{7-49}$$

交流电感的减小系数 k_x 则为

$$k_x = \frac{L_{\sim}}{L_{=}} = \frac{\int S_b |\dot{\mathbf{B}}|^2 dS}{\int S_b B^2 dS_{(\omega=0)}} = \frac{\sum_{e=1}^{E}(B_{exR}^2 + B_{exI}^2 + B_{eyR}^2 + B_{eyI}^2)\Delta_e}{\sum_{e=1}^{E}(B_{ex}^2 + B_{ey}^2)\Delta_{e(\omega=0)}} \tag{7-50}$$

式中 B_{exR}、B_{exI} 和 B_{eyR}、B_{eyI} 分别为单元 e 内 $\dot{B}_y$ 的实部和虚部. 计算表明，对凸形槽，用近似解析解所得的 k_r 和 k_x，其误差为 1.5%—11%；用上述两种边值算出的 k_r 和 k_x 差别极小（在 0.3%以内）.

7-3　二维非线性正弦涡流场的有限元分析[1—12]

考虑铁心的磁饱和时，$\nu_{Fe}=f(B)$，于是用 $\dot{A}_z$ 表述的二维正弦涡流方程将是一个非线性方程. 另外，当工作点在磁化曲线的非线性部分时，若磁通量（磁感强度）为正弦波，激磁电流（磁场强度）将是尖顶波，即其中含有一定的三次和五次谐波；反之，若激磁电流接近于正弦波，则磁通量将成为平顶波，即其中含有一定的三次和五次谐波. 为简化计算，通常仍把 B 和 H 作为正弦波，同时采用适当的修正，引入有效磁导率 μ_{ef} 或有效磁阻率 ν_{ef}，以便得到既便于计算、又符合工程精度要求的解答.

（一）考虑磁饱和时的有限元方程

考虑磁饱和时，二维非线性正弦涡流场的混合边值问题为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{ef}\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{ef}\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right)=j\omega\sigma\dot{A}_z-\dot{J}_{pz}\\&\dot{A}_z|_{\Gamma_1}=\dot{A}_0,\quad \nu_{ef}\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial n}_{\Gamma_2}=\dot{q}\end{aligned}\right\}\tag{7-51}$$

与上式相应的条件变分问题为

$$\left.\begin{aligned}I=&\frac{1}{2}\iint_G\nu_{ef}\left[\left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\frac{1}{2}j\omega\sigma\iint_G\dot{A}_z dxdy\\&-\iint_G\dot{J}_{pz}\dot{A}_z dxdy-\int_{\Gamma_2}\dot{q}\,\dot{A}_z dl=\text{stationary}\\&\dot{A}_z|_{\Gamma_1}=\dot{A}_0\end{aligned}\right\}\tag{7-52}$$

若采用三节点三角元，经过单元分析，可知

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{A}^e}=\mathbf{k}^e\mathbf{A}^e-\mathbf{f}^e\tag{7-53}$$

其中 $\mathbf{k}^e$ 形式上仍与线性时的表达式相似；即

$$\mathbf{k}^e=\frac{\nu_{e(ef)}}{4\Delta_e}\begin{bmatrix}b_i^2+c_i^2 & \text{对} & \text{称}\\ b_jb_i+c_jc_i & b_j^2+c_j^2 & \\ b_mb_i+c_mc_i & b_mb_j+c_mc_j & b_m^2+c_m^2\end{bmatrix}+j\frac{1}{12}\omega\sigma_e\Delta_e\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\tag{7-54}$$

但此处的 $\nu_{e(ef)}$ 是有效磁阻率，它是非线性正弦电磁场计算中所用的磁阻率. $\mathbf{f}^e$ 的表达式仍与线性时相同，即

$$\mathbf{f}^e=\frac{1}{3}\dot{J}_{pz}\Delta_e\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\dot{q}_eL_e\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\tag{7-55}$$

再进行总体合成，最后可得一非线性方程组

$$\mathbf{KA}=\mathbf{F}\tag{7-56}$$

其中 $\mathbf{K}=\mathbf{K}(\nu_{ef})$. 再用第一类边界条件修改上式，并求解修改后的非线性方程组，即可得到各个节点的磁位值.

（二）有效磁导率和有效磁阻率

若磁感强度和磁场强度随时间而变化，考虑磁饱和时，相应的磁导率也在不断变化. 此时若定义一个有效磁导率，将给计算带来很大方便. 下面对磁场强度或磁感强度随时间作正弦变化这两种情况分别进行研究.

磁场强度为正弦波时 设磁场强度随时间作正弦变化 $H(t)=H_{1m}\sin\omega t$，若 H_{1m} 已进入磁化曲线的饱和区，则磁感强度 $B(t)=\mu(t)H_{1m}\sin\omega t$ 将成为平顶波，如图 7-6 所示. 定义有效磁导率 μ_{ef}，使由 μ_{ef} 和 H_{1m} 算出的磁能密度的平均值与用 $H(t)$ 和 $B(t)$ 在一个周期

内算出的磁能密度平均值相等；即

$$\frac{1}{4}\mu_{ef}H_{1m}^2=\frac{1}{2T}\int_0^T H(t)B(t)dt \tag{7-57}$$

由此可得

$$\mu_{ef}=\frac{2}{T}\frac{1}{H_{1m}^2}\int_0^T H(t)B(t)dt=\frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\mu(t)\sin^2\omega t\,dt \tag{7-58}$$

式中 T 为周期；$\mu(t)$为磁导率的瞬时值，$\mu(t)=\dfrac{B(t)}{H(t)}$. 式（7-58）可用数值积分法来计算.

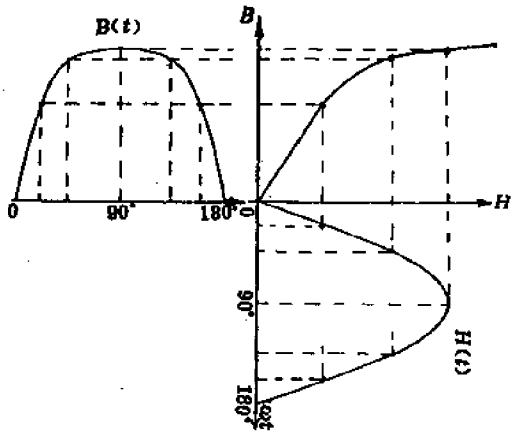


图 7-6　$H(t)$为正弦波时 $B(t)$的波形

从式(7-58)可见，由于 $H(t)$为正弦波，所以只有 $B(t)$中的基波对 μ_{ef}值有贡献；故

$$\mu_{ef}=\frac{B_{1m}}{H_{1m}},\quad 或\quad B_{1m}=\mu_{ef}H_{1m} \tag{7-59}$$

式中 B_{1m}为磁感强度基波的幅值. 由此可见，引入等效磁导率以后，H 和 B 均可作为相量. 图 7-7 表示 $DR315$—$DR530$ 硅钢片的有效磁导率曲线 $\mu_{ef}=f(B_{1m})$.

磁感强度为正弦波时　若磁感强度随时间作正弦变化 $B(t)=B_{1m}\sin\omega t$，则当 B_{1m}进入磁化曲线的饱和区时，磁场强度 $H(t)=\nu(t)B_{1m}\sin\omega t$ 将是尖顶波. 同理，从磁能密度的平均值相等出发来定义有效磁阻率 ν_{ef}，使

$$\frac{1}{4}\nu_{ef}B_{1m}^2=\frac{1}{2T}\int_0^T B(t)H(t)dt \tag{7-60}$$

可得

$$\nu_{ef}=\frac{2}{T}\frac{1}{B_{1m}^2}\int_0^T B(t)H(t)dt=\frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\nu(t)\sin^2\omega t\,dt \tag{7-61}$$

文献［7］用表格形式给出了各种硅钢片的有效磁阻率曲线 $\nu_{ef}=f(B_{1m})$.

7-4　笼型感应电动机起动性能的有限元计算[8—11]

起动性能是感应电动机的主要性能之一，过去起动电流和起动转矩都用等效电路法

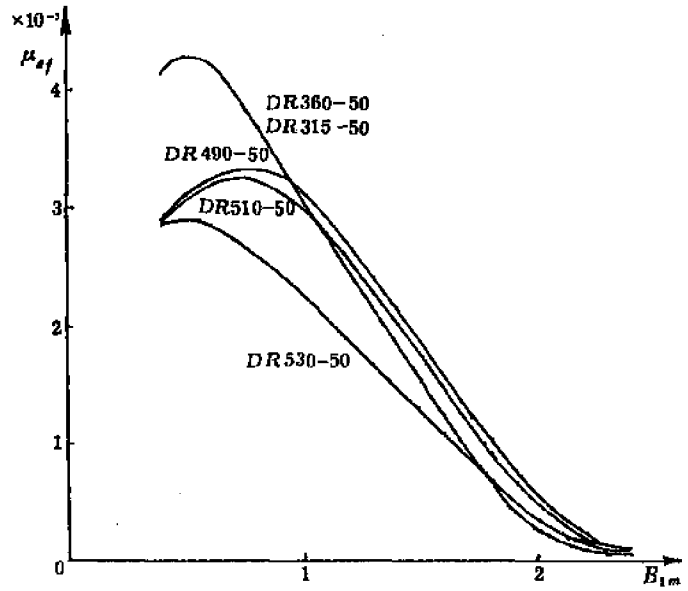


图 7-7　硅钢片的有效磁导率

来计算. 由于解析计算时转子导条内电流的集肤效应和漏磁所引起的齿顶磁饱和现象只能近似计及，使计算与实测结果常有一定的差别，尤以两极电机为甚. 为提高计算精度，可以用有限元法来计算感应电动机内的二维非线性正弦涡流场，并进一步算出其起动性能.

（一）基本假定和边界条件

基本假定　图 7-8 表示一台两极感应电动机一个极距下的横截面. 为简化分析，假定：

1. 电机有效长度内的磁场按二维场来处理，铁心外缘的散磁忽略不计.

2. 定子载流导体和铁心中的集肤效应忽略不计.

3. 场域内各处的 B、H 和 A_z 均随时间正弦变化，从而可作为相量；铁心的磁阻率取有效磁阻率.

边界条件　本问题的边界条件为：

1. 在定子外圆（边界 AFC）和转子的内圆（边界 BED）处，向量磁位为 0；即

$$\dot{A}_z|_{AFC} = \dot{A}_z|_{BED} = 0 \tag{7-62}$$

2. $\overline{AB}$和 $\overline{CD}$线的各对对应点之间，向量磁位满足半周期性条件；即

$$\dot{A}_{zi}|_{AB} = -\dot{A}_{zi'}|_{CD} \tag{7-63}$$

（二）起动电流和起动转矩的计算方法

图 7-9 表示起动时感应电动机的等效电路. 图中 R_1 为定子电阻，$x_{1\sigma}$为定子槽漏抗和差漏抗之和，x_{1e}为定子端部漏抗；R'_{2b}、R'_{2r}为转子导条和端环电阻，$x'_{2\sigma}$为导条的槽漏抗和

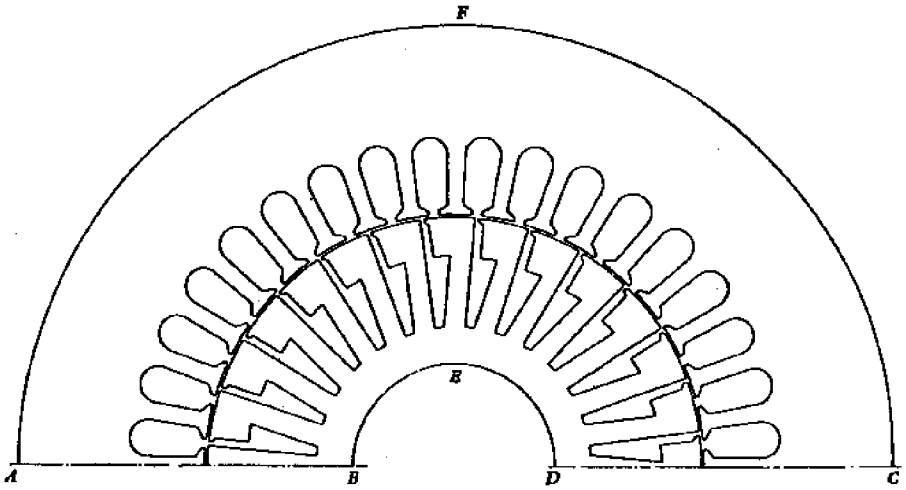


图 7-8　两极感应电机的截面图（一个极距内）

差漏抗之和，x'_{2r}、x'_{2k}为转子端环和斜槽漏抗．由于二维磁场计算仅在有效长度范围内进行，所以仅计及图中框内部分，框外部分（定、转子端部）需要用其他办法来计及．

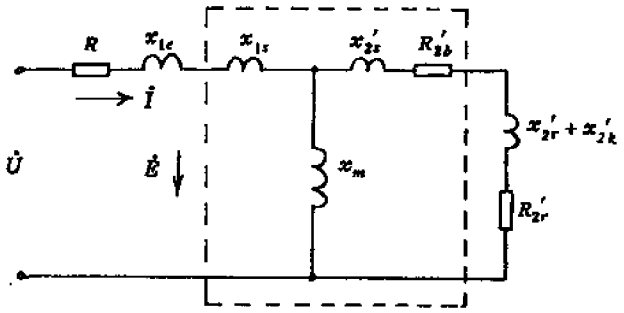


图 7-9　起动时感应电动机的等效电路

整个计算步骤是：先进行单元剖分，再给定定子某一外施电压U下起动电流的初值（假设值），定子各单元内的外施电密值和有效磁阻率的初值，并把转子端部的电阻和漏抗归并到有效部分；接着用有限元法求解电机横截面内的二维非线性正弦涡流场，由此即可确定一相的磁链$\dot{\psi}$和感应电势$\dot{E}$，并进一步算出定子的相电压$\dot{U}'$．如果$U'\neq U$，就进入电流迭代，另外还要进行饱和磁阻率迭代，直到两者的误差小于规定值为止．由此即可得到某一外施电压下的起动电流，并进一步算出该电压下的起动转矩．下面分别加以说明．

初值的给定　先用等效电路法算出定子某一外施电压U下起动电流的初值$I_m^{(0)}$（幅值），由$I_m^{(0)}$即可确定定子槽内属于各相的各个单元中的外施电密：

$$\dot{J}_A = J\angle 0°, \quad \dot{J}_B = J\angle -120°, \quad \dot{J}_C = J\angle 120° \tag{7-64}$$

对双层绕组，$J=\frac{2I_m n_c}{aS}$，n_c 为每槽内的串联匝数，a 为并联支路数，S 为槽内所有单元的总面积. 场区中其他各单元（包括转子槽）内的外施电密为 0.

其次是电导率. 转子槽内各单元取铸铝（或铜）的电导率，其余所有单元取 $\sigma=0$. 由于不计定子导体内的涡流，所以定子槽内各单元的电导率亦取为零.

单元有效磁阻率的初值，一般为分区给定，使其尽可能接近实际分布，以加速收敛. 考虑到各部分饱和程度的不同，可分成定子齿、定子轭、转子齿顶、转子齿根和转子轭等五部分分别给出.

转子端部参数的计入 为将转子端环电阻、端环漏抗以及斜槽漏抗的影响计入二维电磁场计算，可将转子导条的电导率由 σ 修改为 σ'，把转子槽内空气的磁导率由 μ_0 修改为 μ_0'，使

$$\sigma' = \sigma\frac{R_{2b}'}{R_{2b}'+R_{2r}'}, \qquad \mu_0' = \mu_0\frac{x_{2b}'+x_{2r}'+x_{2k}'}{x_{2b}'} \tag{7-65}$$

这样端环电阻、漏抗和斜槽漏抗就并入导条的电阻和漏抗中.

二维非线性正弦电磁场的求解 本题的边界条件部分是第一类边界条件，部分是半周期性边界条件，故在总体合成后要对方程组进行修改. 此外，由于磁饱和，故在求解方程组时要对 ν_{ef} 进行迭代.

定子一相磁链、感应电势和相电压的计算 向量磁位 $\dot{A}$ 出后，定子一相的总磁链 $\dot{\psi}_m$（双层绕组）即可算出：

$$\dot{\psi}_m = \frac{2pn_c}{a}\dot{\Phi}, \qquad \dot{\Phi} = -l_{ef}\sum_{i=1}^{q}(\dot{A}_{i上}-\dot{A}_{i下}) \tag{7-66}$$

式中 $\frac{2pn_c}{a}$ 为每相串联匝数；$\dot{\Phi}$ 为每相的总磁通；l_{ef} 为铁芯的有效长度；q 为每极每相槽数；$\dot{A}_{i上}$ 和 $\dot{A}_{i下}$ 分别为极相组中第 i 个线圈上层和下层线圈截面中心处的磁位值. 由 $\dot{\psi}_m$ 所产生的定子相电势 $\dot{E}$（有效值相量）为

$$\dot{E} = -j\omega\frac{\dot{\psi}_m}{\sqrt{2}} \tag{7-67}$$

再从图 7-9 所示等效电路，即可确定定子的端电压 $\dot{U}$（相电压）为

$$\dot{U} = \dot{I}(R_1 + jx_{1\sigma}) - \dot{E} \tag{7-68}$$

式中 $\dot{I}=\frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}$；$\dot{I}R_1$ 和 $j\dot{I}x_{1\sigma}$ 都是二维电磁场计算时没有计及的因素.

电流迭代和磁阻率迭代 如果由电流初值 $I_m^{(0)}$ 算出的定子的端电压 $U^{(0)}$ 与实际外施电压 U 不符，就需要进行电流迭代；即按线性关系来调整定子电流的给定值，使其调为 $I_m^{(1)}$；

$$I_m^{(1)} = I_m^{(0)}\frac{U}{U^{(0)}} \tag{7-69}$$

并重复计算一次；然后按单元的磁感强度幅值来调整 ν_{ef}，并重新赋给各单元，再重复进行场的计算. 在往后的每次迭代中，都要根据上次迭代所算出的外施电压值对定子电流

进行修正：

$$I_m^{(k)} = I_m^{(k-1)} \frac{U}{U^{(k-1)}} \tag{7-70}$$

并按各铁心单元中磁感强度 $B_m^{(k-1)}$ 的修正值 $\tilde{B}_m^{(k-1)}$ 求得新的单元磁阻率 $\nu_{cf}^{(k)}$

$$\tilde{B}_m^{(k-1)} = B_m^{(k-1)} \frac{I_m^{(k)}}{I_m^{(k-1)}} \tag{7-71}$$

然后求解整个场域内的 $\dot{A}_z$，并进而算出相应的 $\dot{\psi}_m$，$\dot{E}$和 $\dot{U}$.

为加速收敛，有效磁阻率的迭代可采用下列欠松弛迭代格式：

$$\nu_{cf}^{(k)} = \tilde{\nu}_{cf}^{(k-1)} + \alpha(\nu_{cf}^{(k-1)} - \tilde{\nu}_{cf}^{(k-1)}) \tag{7-72}$$

式中 $\nu_{cf}^{(k)}$和 $\nu_{cf}^{(k-1)}$分别为 ν_{cf}的第 k 次和 $k-1$ 次迭代值；$\tilde{\nu}_{cf}^{(k-1)}$为依据 $\tilde{B}_m^{(k-1)}$ 所查得的有效磁导率；α 为欠松弛因子，$0<\alpha<1$. 在电压未收敛以前，α 可取为 0.3；当电压已收敛后，α 可取为 0.5—0.7.

迭代过程的收敛情况，可用两个判据来检验：一个是外施电压计算值与给定值的偏差 $\varepsilon_u^{(k)}$

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{U^{(k)} - U}{U} \tag{7-73}$$

当 $\varepsilon_u^{(k)}$ 小于控制误差值 ε_u 时，表示电压已收敛. 接着考察单元磁感强度的平均差值 $\varepsilon_B^{(k)}$

$$\varepsilon_B^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{E} |B_{mi}^{(k)} - B_{mi}^{(k-1)}| \Delta_i}{\sum_{i=1}^{E} B_{mi}^{(k)} \Delta_i} \tag{7-74}$$

若 $\varepsilon_B^{(k)}$ 小于某一控制值 ε_B，表示磁阻率迭代过程收敛，于是整个迭代过程可以终止. 通常 ε_u 取为 0.1%—0.2%，ε_B 取为 0.2%—0.3%.

起动转矩计算 起动时电磁功率 P_m 就等于转子铜耗，故起动转矩 T_u为

$$T_u = \frac{P_m}{\Omega_s} = \frac{l_b}{\Omega_s \sigma'} \sum_{e=1}^{E2} J_{se}^2 \Delta_e \tag{7-75}$$

式中 $E2$ 为转子槽内的总单元数；J_{se}为导条内各单元的感应电密；l_b 为导条长度；Ω_s 为同步角速度.

图 7-10 表示整个计算的主框图.

（三）计算实例

图 7-11 表示一台 40kW、380V 的三相二极感应电动机的剖分图，该机定子共 36 槽，转子 28 槽，整个场域共剖分为 1139 个单元，607 个节点. 经过 7 次迭代达到收敛，$\varepsilon_u^{(k)} = 0.177\%$，$\varepsilon_B^{(k)} = 0.28\%$. 图 7-12 表示 $\omega t = 0$ 时的磁场分布，图 7-13 表示同一瞬间的气隙磁场分布，其中实线为径向磁感强度，虚线为切向磁感强度. 图 7-14 表示转子导条中感应电流的相量图. 从图 7-12 可见，转子的集肤效应十分明显，大部分磁通只通过凸形槽的上部，因而转子齿的上部比较饱和. 从图 7-13 可见，起动时，气隙磁场的切向分量较大，气隙磁场的畸变亦十分严重，高次空间谐波含量很大. 相应地，转子导条中电流相量将成为不对称的多相系统. 所有这些，与传统电机学中从理想的物理模型出发所得

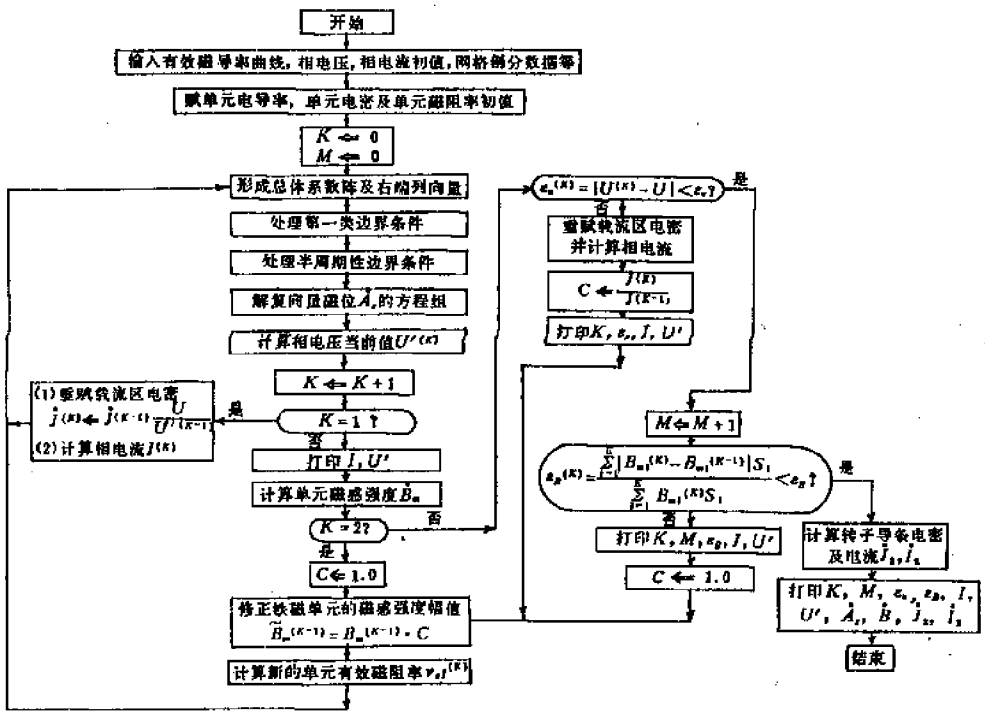


图 7-10　起动性能计算的主框图

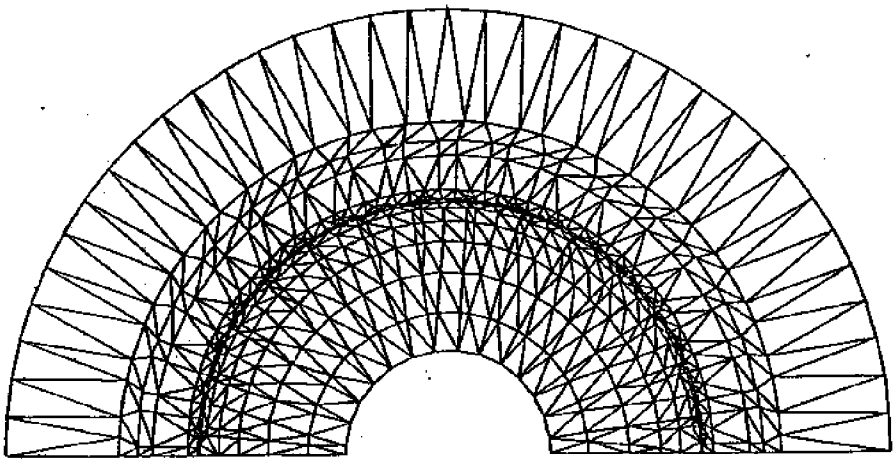


图 7-11　一台 40kW 感应电动机的单元剖分

出的结果均有明显的差别. 与实测结果对比表明，采用有限元法计算时，对两极电机，起动电流的计算误差可减小到 5%以内，起动转矩的误差可减小到 8%以内.

7-5　三维正弦涡流场的 A，φ 和 T，Ω 表述[12—30]

严格来说，电机和变压器中的电磁场均为三维分布，二维计算只是一种简化处理. 与

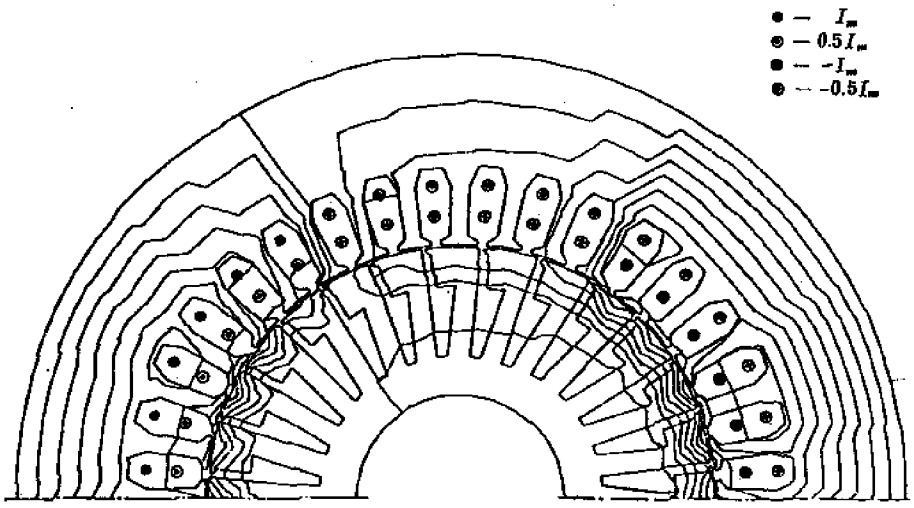


图 7-12　$\omega t=0$ 时的磁场分布

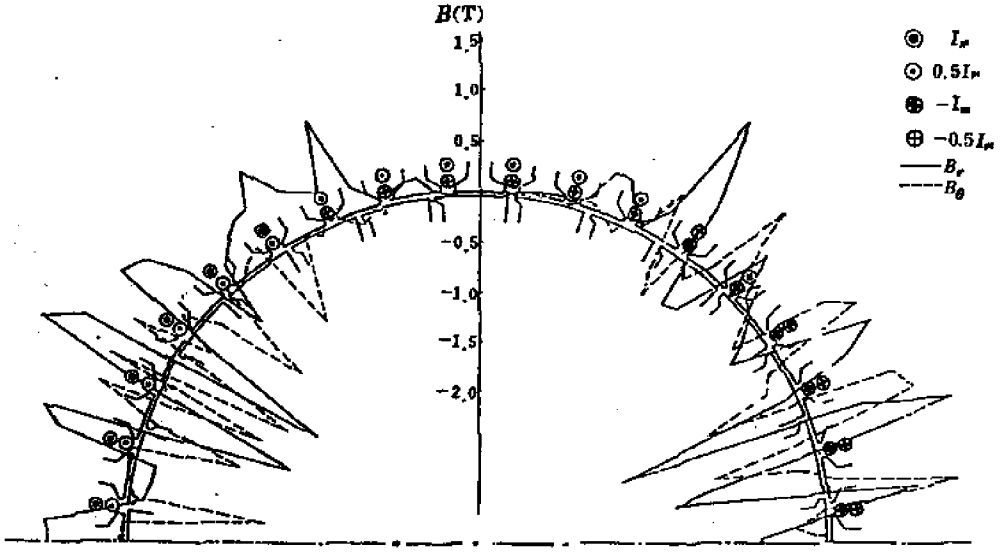


图 7-13　$\omega t=0$ 时气隙磁场的分布

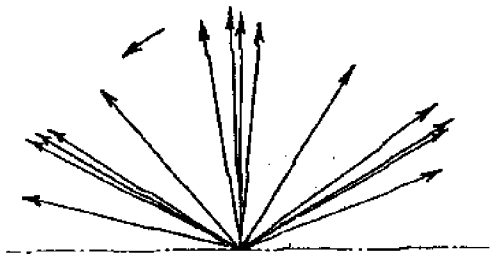


图 7-14　导条电流的相量图

二维情况相比较，三维电磁场的分析、计算要复杂得多. 首先，场域的剖分要采用立体

元，从而使节点数、单元数和数据前处理的工作量大大增加．另外，由于电磁位是向量位和标量位的组合，所以每一节点上的变量将增加为4个．对于比较复杂的工程三维电磁场问题，离散后所得的方程组，其阶数可高达数万阶．此外，由于立体剖分引起相关单元和相关节点增加，使系数矩阵中的非零元素和带宽大大增加．因此，三维问题的计算需要很大的计算机存储量和很长的计算时间．

近10年来，三维电磁场的数值计算有了很大进展．在位函数的选用方面，出现了多种不同的组合；在大型稀疏方程组的求解方面，出现了并行算法和系数矩阵的各种预处理技术；数据前、后处理软件的功能也在不断完善；特别是新的高速、大存储量的计算机不断出现，使三维涡流场的数值计算得以逐步应用到工程领域．下面来说明二种应用最广泛的电磁位组合：**A**，φ组合和**T**，Ω组合．

（一）向量磁位和标量电位表述（A，φ-A法）

把三维正弦电磁场的场域分成涡流区和非涡流区二部分．在涡流区，既要计算磁场，又要计算电场，所以同时采用**A**和φ来表述；在无涡流区，只需计算磁场，故用**A**来表述；这就是**A**，φ-**A**法．

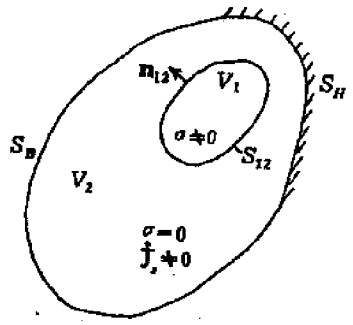


图7-15　A，φ-A法的求解域

图7-15表示一个典型的求解域V，其中V_1为涡流区，含有导电介质但不含源电流；V_2为非涡流区，其中可包含给定的源电流；S_{12}为V_1和V_2的内部交界面．V的外边界S分成S_B和S_H二部分，S_B上给定磁感强度的法向分量，S_H上给定磁场强度的切向分量．

A，φ表述　用磁感强度$\dot{\mathbf{B}}$和电场强度$\dot{\mathbf{E}}$表述时，在求解域V内，$\dot{\mathbf{B}}$和$\dot{\mathbf{E}}$应满足下列方程：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}\dot{\mathbf{H}}=\sigma\dot{\mathbf{E}},\quad \mathrm{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\dot{\mathbf{B}},\\&\mathrm{div}\dot{\mathbf{B}}=0\end{aligned}\right\}\text{在}V_1\text{内}\tag{7-76}$$

$$\mathrm{rot}\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{J}}_s,\quad \mathrm{div}\dot{\mathbf{B}}=0\qquad\text{在}V_2\text{内}\tag{7-77}$$

式中$\dot{\mathbf{J}}_s$为源电流密度．在边界面S上，设$\dot{\mathbf{B}}$和$\dot{\mathbf{H}}$的边界条件均为齐次；即

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{B}}\cdot n=0\qquad\text{在}S_B\text{上}\\&\dot{\mathbf{H}}\times n=0\qquad\text{在}S_H\text{上}\end{aligned}\right\}\tag{7-78}$$

式中$\mathbf{n}$为S的单位法向量．在内部交界面S_{12}上，有

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{B}}_1\cdot\mathbf{n}_{12}=\dot{\mathbf{B}}_2\cdot\mathbf{n}_{12}\\&\dot{\mathbf{H}}_1\times\mathbf{n}_{12}=\dot{\mathbf{H}}_2\times\mathbf{n}_{12}\end{aligned}\right\}\qquad\text{在}S_{12}\text{上}\tag{7-79}$$

式中$\mathbf{n}_{12}$为S_{12}的单位法向量，方向从V_1指向V_2．若V为单连域，则上述边值问题将使$\dot{\mathbf{B}}$和$\dot{\mathbf{E}}$的解答成为唯一．

若采用向量磁位 $\dot{\mathbf{A}}$ 和标量电位 $\dot{\varphi}$ 来表述，则式(7-76)和(7-77)可改写成

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}(\nu\ \mathrm{rot}\ \dot{\mathbf{A}}) = -j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}} - \sigma\mathrm{grad}\dot{\varphi}, && \text{在 } V_1 \text{ 内}\\&\mathrm{rot}(\nu\ \mathrm{rot}\ \dot{\mathbf{A}}) = \dot{\mathbf{J}}_s && \text{在 } V_2 \text{ 内}\end{aligned}\right\} \tag{7-80}$$

在 S 上，边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}} = 0, && \text{在 } S_B \text{ 上}\\&\nu(\mathrm{rot}\dot{\mathbf{A}})\times\mathbf{n} = 0, && \text{在 } S_H \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{7-81}$$

在 S_{12} 上，内部交界面条件为

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_{12}\cdot\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{n}_{12}\cdot\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}_2\\&\nu_1(\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}_1)\times\mathbf{n}_{12} = \nu_2(\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}_2)\times\mathbf{n}_{12}\end{aligned}\right\} \quad \text{在 } S_{12} \text{ 上} \tag{7-82}$$

从数值计算的观点看，若 $\mathbf{A}$ 为连续，则式(7-82)中的第一式将自动满足.

$\mathbf{A}$ 和 φ 的唯一性 为使 $\dot{\mathbf{A}}$ 的解答成为唯一，还要进一步规定 $\dot{\mathbf{A}}$ 的散度和 $\dot{\mathbf{A}}$ 本身的边界条件. 为此，使

$$\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}} = 0 \tag{7-83}$$

即采用库仑规范；在边界面 S 上，给定下列齐次边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}} = 0 && \text{在 } S_B \text{ 上}\\&\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{A}} = 0 && \text{在 } S_H \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{7-84}$$

这样，$\dot{\mathbf{A}}$ 的旋度和散度均已确定 ($\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}=\dot{\mathbf{B}}$，$\dot{\mathbf{B}}$ 具有唯一解，因此是确定的)，在边界 $\mathbf{S}$ 上 $\dot{\mathbf{A}}$ 的法向或切向分量亦已分别给定，故 $\dot{\mathbf{A}}$ 的解答将成为唯一. $\dot{\mathbf{A}}$ 确定以后，从式 (7-80) 的第一式可知，$\mathrm{grad}\dot{\varphi}$ 随之确定；从而 φ 的解答将具有互差一个任意常数的唯一性. 若进一步规定区域 V 或边界 S 上某一点的 $\dot{\varphi}$ 值作为参考值，则 $\dot{\varphi}$ 将唯一地确定.

可以证明，式(7-84)中的第一式隐含了式 (7-81) 的第一式. 因为

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}\cdot(\nabla\times\mathbf{n}) - \nabla\cdot(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}})$$

若 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}=0$，则 $\dot{\mathbf{A}}$ 只有法向分量，即 $\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{n}^0\dot{A}_n$，$n^0$ 为 S_B 上的单位法向量；因此在 S_B 上上式将成为

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}\cdot(\nabla\times\mathbf{n}) = \dot{A}_n\mathbf{n}^0\cdot(\nabla\times\mathbf{n}^0) = 0$$

由此可知，在边界 S_B 上，列出条件 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}=0$ 以后，就不再需要列出 $\mathbf{n}\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}}=0$.

库仑规范的并入 接下来的问题是，如何将库仑规范并入式 (7-80). 为达到此目的，可在式(7-80)的第一式和第二式中都加一项 $-\mathrm{grad}(\nu\,\mathrm{div}\dot{\mathbf{A}})$，再把描述电流连续性的方程同时列出. 由此，式(7-80)将改写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}(\nu\ \mathrm{rot}\ \dot{\mathbf{A}}) - \mathrm{grad}(\nu\ \mathrm{div}\ \dot{\mathbf{A}}) + j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}} + \sigma\mathrm{grad}\ \dot{\varphi} = 0\\&\mathrm{div}(-j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}} - \sigma\mathrm{grad}\dot{\varphi}) = 0\end{aligned}\right\} \quad \text{在 } V_1 \text{ 内} \tag{7-85}$$

$$\mathrm{rot}(\nu\ \mathrm{rot}\ \dot{\mathbf{A}}) - \mathrm{grad}(\nu\ \mathrm{div}\ \dot{\mathbf{A}}) = \dot{\mathbf{J}}_s, \qquad \text{在 } V_2 \text{ 内} \tag{7-86}$$

不难看出，对式(7-85)的第一式和式(7-86)取散度，并考虑到源电流密度 $\dot{\mathbf{J}}_s$ 的散度为零，可知在整个 V 内，$\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}$ 满足拉普拉斯方程；即

$$\nabla^2(\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}) = 0 \qquad \text{在 } V \text{ 内} \tag{7-87}$$

此时在边界 S 上如能给定 $\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}$ 的齐次第一类边界条件或齐次混合边界条件，则由调和函数的性质可知，$\nu\,\mathrm{div}\dot{\mathbf{A}}$ 在 V 内将处处为零，由此即可保证 $\mathbf{A}$ 满足库仑规范.

取式(7-86)在边界 S_H 上的法向分量，并考虑到 $\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{J}}_s=0$，可得

$$\mathbf{n}\cdot[\mathrm{rot}(\nu\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}})]-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\,\mathrm{div}\dot{\mathbf{A}})=0 \qquad \text{在 } S_H \text{ 上} \tag{7-88}$$

将上式中的第一项展开，并考虑到 S_H 上的 $\mathbf{H}_t=0$，$\dot{\mathbf{H}}=\mathbf{n}^0\dot{H}_n$，就有

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}(\nu\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}})&=\nu\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}\cdot(\nabla\times\mathbf{n})-\mathrm{div}(\mathbf{n}\times\nu\,\mathrm{rot}\dot{\mathbf{A}})\\&=\mathbf{n}^0\dot{H}_n\cdot(\nabla\times\mathbf{n})=0\end{aligned}$$

从而可得

$$\frac{\partial}{\partial n}(\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}})=0, \qquad \text{在 } S_H \text{ 上} \tag{7-89}$$

这是 $\nu\,\mathrm{div}\dot{\mathbf{A}}$ 在 S_H 上的齐次第二类边界条件. 如能在 S_B 上再给定齐次第一类边界条件；即

$$\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}=0, \qquad \text{在 } S_B \text{ 上} \tag{7-90}$$

另外，在内部交界面上 $\nu\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}$ 为连续，则 $\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}$ 就满足库仑规范.

归结起来，为使 $\dot{\mathbf{A}}$、$\dot{\varphi}$ 的解答唯一，$\dot{\mathbf{A}}$，$\dot{\varphi}$-$\dot{\mathbf{A}}$ 法的完整表述为：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}(\nu\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}})-\mathrm{grad}(\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}})+j\omega\sigma\,\dot{\mathbf{A}}+\sigma\mathrm{grad}\dot{\varphi}=0\\&\mathrm{div}(-j\omega\sigma\,\dot{\mathbf{A}}-\sigma\mathrm{grad}\dot{\varphi})=0\end{aligned}\right\}\text{在 } V_1 \text{ 内} \tag{7-91}$$

$$\mathrm{rot}(\nu\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}})-\mathrm{grad}(\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}})=\dot{\mathbf{J}}_s, \qquad \text{在 } V_2 \text{ 内} \tag{7-92}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}=0\\&\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}=0\end{aligned}\right\}\text{在 } S_B \text{ 上} \tag{7-93}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{A}}=0\\&(\nu\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}})\times\mathbf{n}=0\end{aligned}\right\}\quad\text{在 } S_H \text{ 上} \tag{7-94}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{A}}_1=\dot{\mathbf{A}}_2, \qquad \nu_1\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}_1=\nu_2\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}_2,\\&(\nu_1\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}_1)\times\mathbf{n}_{12}=(\nu_2\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}_2)\times\mathbf{n}_{12},\\&\mathbf{n}\cdot(-j\omega\sigma\,\dot{\mathbf{A}}-\sigma\mathrm{grad}\dot{\varphi})=0\end{aligned}\right\}\quad\text{在 } S_{12} \text{ 上} \tag{7-95}$$

式(7-91)第二式是电流连续性定律的微分形式，该式原先隐含在式(7-80)中；但当式(7-80)中加进 $-\mathrm{grad}(\nu\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}})$ 项而变成式(7-85)的第一式时，就需要单独列出. 在交界面 S_{12} 上，也需要列出此式作为导体表面处法向电密为零的约束条件. 由于 S_{12} 上 $\mathbf{A}$ 为连续，故法向磁感强度的连续性自动满足，无需再行列出. 这样，只要在 V 内规定一个 $\dot{\varphi}$ 的参考点，边值问题(7-91)—(7-95)的 $\dot{\mathbf{A}}$、$\dot{\varphi}$ 解答就是唯一的.

$\mathbf{A}$，φ-$\mathbf{A}$ 法的优、缺点 此法的优点是：(1) 由于 $\dot{\mathbf{A}}$、$\dot{\varphi}$ 的唯一性得到保证，所以对任何中频和工频问题均能得到稳定的数值解；(2) 内部交界面条件为自然边界条件，在有限元离散化时可自动满足，不用特殊处理；(3) 对含有多连域导电区的情况也可直接应用；(4) 源电流的引入直接、方便. 缺点是：涡流区每个节点上有 4 个未知数，非涡

流区每个节点上有 3 个未知数，因此总的来讲未知数数量较多.

（二）向量电位和标量磁位表述（$\mathbf{T},\Omega$-Ω 法）

对于三维正弦涡流场问题，若涡流区内采用 $\mathbf{T}$ 和 Ω 作为电磁位，在非涡流区内以 Ω 作为位函数，可得 $\mathbf{T},\Omega$-Ω 法. 对涡流区，此时每个节点上有 4 个未知数；对非涡流区，每个节点只有 1 个未知数. 因此当涡流区仅占整个求解域的一小部分时，此法能有效地减少未知数的总数.

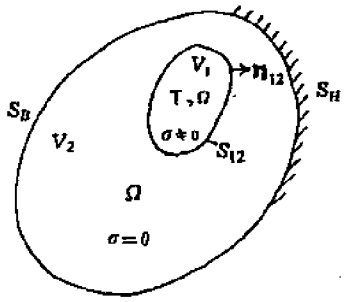


图 7-16　$\mathbf{T},\Omega$-Ω 法的求解域

下面先说明求解域内不含源电流时的情况，然后讨论源电流的处理办法.

求解域内无源电流时　图 7-16 表示所研究的场域 V，V 中无源电流，场的激励是通过边界条件引入. V 内涡流区与非涡流区的划分和边界的定义与图 7-15 相同.

由于 $\dot{\mathbf{J}}=\mathrm{rot}\dot{\mathbf{T}}$，$\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{T}}-\mathrm{grad}\dot{\Omega}$，将其代入麦克斯韦第二和第三方程，可得用 $\dot{\mathbf{T}}$，$\dot{\Omega}$ 表述且 $\mathrm{div}\dot{\mathbf{T}}$ 采用库仑规范时，$\dot{\mathbf{T}}$，$\dot{\Omega}$ 在 V 内所满足的微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}(\rho\,\mathrm{rot}\dot{\mathbf{T}})-\mathrm{grad}(\rho\,\mathrm{div}\dot{\mathbf{T}})+j\omega\mu\dot{\mathbf{T}}-j\omega\mu\,\mathrm{grad}\,\dot{\Omega}=0\\&\mathrm{div}(\mu\dot{\mathbf{T}}-\mu\,\mathrm{grad}\,\dot{\Omega}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{在 } V_1 \text{ 内} \tag{7-96}$$

$$\mathrm{div}(\mu\,\mathrm{grad}\dot{\Omega})=0,\qquad \text{在 } V_2 \text{ 内} \tag{7-97}$$

式中 ρ 为导体的电阻率. 若给定的边值为混合边值，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial n}=0,\qquad \text{在 } S_B \text{ 上}\\&\dot{\Omega}=\dot{\Omega}_0,\qquad \text{在 } S_H \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{7-98}$$

另外，内部交界面条件为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\Omega}_1=\dot{\Omega}_2,\quad \mathbf{n}\times\dot{\mathbf{T}}=0,\rho\,\mathrm{div}\dot{\mathbf{T}}=0\\&[\mu_1(\dot{\mathbf{T}}-\mathrm{grad}\dot{\Omega}_1)-\mu_2(-\mathrm{grad}\dot{\Omega}_2)]\cdot\mathbf{n}_{12}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{在 } S_{12} \text{ 上} \tag{7-99}$$

式(7-97)—(7-99)就是求解域内无源电流时，$\mathbf{T},\Omega$-Ω 法的完整表述. 式 (7-97) 中的 grad ($\rho\,\mathrm{div}\dot{\mathbf{T}}$) 项和式 (7-99) 中的 $\rho\mathrm{div}\dot{\mathbf{T}}=0$ 项是为使 V 中 $\mathrm{div}\mathbf{T}=0$ 而引入的. 采用与前面证明 $\dot{\mathbf{A}}$ 的唯一性相类似的办法，可以证明，对边值问题(7-97)—(7-99)，$\dot{\mathbf{T}}$ 和 $\dot{\Omega}$ 具有唯一解.

把边值问题(7-96)—(7-99)与(7-91)—(7-95)对比，可以看出向量电位 $\dot{\mathbf{T}}$ 与向量磁位 $\dot{\mathbf{A}}$ 具有对偶性. 首先，$\dot{\mathbf{A}}$ 和 $\dot{\mathbf{T}}$ 的散度在 $\mathbf{V}$ 内均规定为零. 其次，在 $\mathbf{A}\varphi$-$\mathbf{A}$ 法中，法向磁感强度为零的边界条件可用 $\dot{\mathbf{A}}$ 的切向分量为零来代表；在 $\mathbf{T}$，Ω-Ω 法中，法向电密为零的边界条件则可用 $\dot{\mathbf{T}}$ 的切向分量为零来表示. 在内部交界面上，$\dot{\mathbf{A}}$ 的连续性保证了 $\dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{n}$ 的连续性；另一方面，$\dot{\Omega}$ 的连续性及式 (7-99) 中的第二式保证了 $\dot{\mathbf{H}}\times\mathbf{n}$ 的连续性；使 $\dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{n}$ 在 $\dot{\mathbf{A}}$，$\dot{\varphi}$ 法、$\dot{\mathbf{H}}\times\mathbf{n}$ 在 $\dot{\mathbf{T}}$，Ω 法中不必作为交界面条件列出.

源电流的处理 若 V_2 内有源电流，就需要作特殊处理. 常用的方法有：(1) 把源电流区化为等效的磁化区，用磁化强度 $\dot{\mathbf{M}}$ 来表示源电流密度 $\dot{\mathbf{J}}_s$，即使 $\nabla\times\dot{\mathbf{M}}=\dot{\mathbf{J}}_s$（文献19）；(2) 定义一个与源电流密度 $\mathbf{J}_s$ 相关的向量电位 $\dot{\mathbf{T}}_s$，将 $\dot{\mathbf{T}}_s$ 作为已知量引入计算过程（文献 [20]）. 下面着重介绍第二种方法.

把向量电位 $\dot{\mathbf{T}}$ 分成 $\dot{\mathbf{T}}_s$ 和 $\dot{\mathbf{T}}_e$ 两部分，电流密度 $\mathbf{J}$ 亦分成 $\dot{\mathbf{J}}_s$ 和 $\mathbf{J}_e$ 两部分，

$$\dot{\mathbf{T}}=\dot{\mathbf{T}}_s+\dot{\mathbf{T}}_e,\qquad \dot{\mathbf{J}}=\dot{\mathbf{J}}_s+\mathbf{J}_e, \tag{7-100}$$

其中

$$\mathrm{rot}\dot{\mathbf{T}}_s=\dot{\mathbf{J}}_s,\qquad \mathrm{rot}\dot{\mathbf{T}}_e=\mathbf{J}_e \tag{7-101}$$

下标 s 表示与源电流有关的量，e 表示与涡流有关的量. 由于 $\dot{\mathbf{T}}_s$ 可以根据源电密的分布预先求出，因此实际的未知向量电位仅是 $\dot{\mathbf{T}}_e$. 图 7-17 表示相应的场域划分图. 把 V 分成电流区 V_J 和无电流区 V_0 两部分，V_0 内以 $\dot{\Omega}$ 为未知位函数，V_J 内以 $\dot{\mathbf{T}}_e$ 和 $\dot{\Omega}$ 为未知位函数. 由于 $\dot{\mathbf{T}}_s$ 为已知量，在离散化时可将其并入方程组的右端项. $\dot{\mathbf{T}}_e$ 和 $\dot{\Omega}$ 的求解方法与前面的边值问题 [式(7-96)—(7-99)]相类似.

下面用一个具体例子来说明 $\dot{\mathbf{T}}_s$ 的求法.

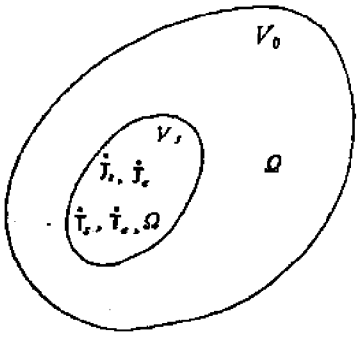


图 7-17 含有源电流时场域的剖分

图 7-18 (a) 表示一个由载流线圈（源电流，$\sigma=0$）、导体（$\sigma\neq0$）和空气等三种介质所形成的三维区域，现用 $x=0$，$y=0$ 和 $z=0$ 三个对称面割出整个求解域的 $\frac{1}{8}$ 来进行计算. 图中阴影部分为载流区 V_J. 由于涡流仅在 $\sigma\neq0$ 的区域内流动，所以 $\dot{\mathbf{T}}_e$ 仅在导体区内有值，导体以外部分 $\dot{\mathbf{T}}_e$ 取为 0. 设载流线圈中的源电流沿水平方向流动，电密为均匀，则 $\dot{J}_{sz}=0$，而 $\dot{\mathbf{T}}_s=\mathbf{k}\dot{T}_{sz}$. 于是由式 (7-101) 可知.

$$\dot{J}_{sx}=\frac{\partial\dot{T}_{sz}}{\partial y},\qquad \dot{J}_{sy}=-\frac{\partial\dot{T}_{sz}}{\partial x} \tag{7-102}$$

根据上式即可求出整个 V_J 区内 $\dot{\mathbf{T}}_s$ 的分布，如图 7-18(b) 所示. 当 x，y 不变时，$\dot{T}_{sz}$ 的值沿 z 方向保持不变.

多连域问题和介质交界面条件的处理 对于场域内含有多连域导电区的情况，由于标量磁位的多值性问题，$\mathbf{T},\Omega$-Ω 法将不能直接应用. 如果场域本身存在对称平面，可将多连域导体从中间隔开，并根据安培环路定律给出 Ω 的边界条件（边值需要迭代处理），以避免这一问题. 如果不存在这样的对称面，可将导体区中间的空腔作为 σ 极低的导电区来处理.

在导体与非导体区的交界面处，$\mathbf{T},\Omega$-Ω 法需将电流密度的法向分量为零这一条件作为强加边界条件，即需将 $\mathbf{T}$ 的切向分量置为 0. 如果交界面与坐标平面平行，只需按照

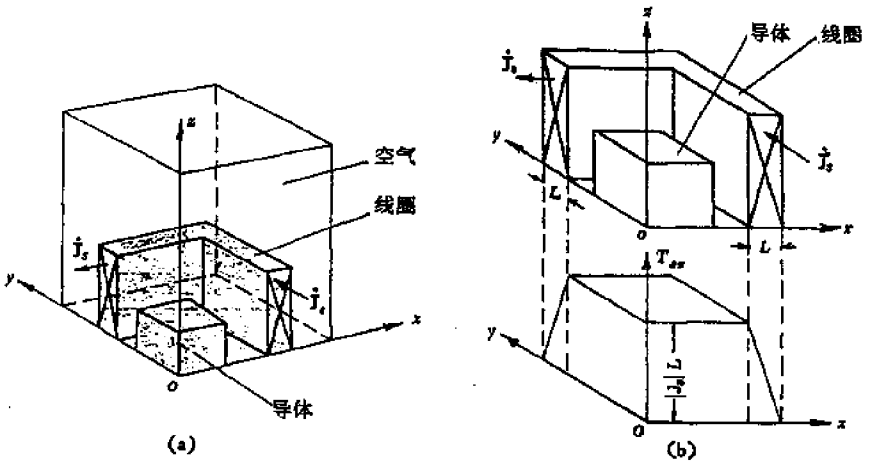


图 7-18 从源电流的分布来求 $\dot{T}$.

(a) 源电流 $\dot{J}_s$ 的分布；(b) 与 $\dot{J}_s$ 相应的 $\dot{T}$.

通常二维有限元计算中的办法来处理. 如果交界面是斜的，则需对该表面上所有节点进行坐标变换，从整体坐标（x，y，z）变换到局部坐标（n，t，τ）（见本章文献 [21] [26]）；其中 n 为沿节点的表面法线方向，t 和 τ 为沿该点处两个互相垂直的表面切线方向. 将局部坐标中 $\dot{T}$ 的切向分量 $\dot{T}_t$、$\dot{T}_\tau$ 置零，即可保证电流沿导体表面流动.

7-6 A,φ-A 法的有限元离散[13—19]

把式(7-91)中的第一式和式(7-92)用统一的形式表出，则式(7-91)—(7-95)可改写为

$$\nabla\times\nu\nabla\times\dot{\mathbf{A}}-\nabla(\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})+j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}+\sigma\nabla\dot{\varphi}-\dot{\mathbf{J}}_s=0,\quad \text{在 } V \text{ 内} \tag{7-103}$$

$$\nabla\cdot(-j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}-\sigma\nabla\dot{\varphi})=0,\quad \text{在 } V_1 \text{ 内} \tag{7-104}$$

$$\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}=0,\quad \nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}=0,\quad \text{在 } S_B \text{ 上} \tag{7-105}$$

$$(\nu\nabla\times\dot{\mathbf{A}})\times n=0,\quad \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{A}}=0\quad \text{在 } S_H \text{ 上} \tag{7-106}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{A}}_1=\dot{\mathbf{A}}_2,\quad \nu_1\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}_1-\nu_2\nabla\cdot\dot{A}_2=0\\&(\nu_1\nabla\times\dot{\mathbf{A}}_1)\times\mathbf{n}_{12}-(\nu_2\nabla\times\dot{\mathbf{A}}_2)\times\mathbf{n}_{12}=0\\&\mathbf{n}\cdot(-j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}-\sigma\nabla\dot{\varphi})=0\end{aligned}\right\}\quad \text{在 } S_{12} \text{ 上} \tag{7-107}$$

式（7-103）中 $\dot{\mathbf{J}}_s$ 和 σ 可看作为分区定义的函数；在 V_1 内 $\dot{\mathbf{J}}_s=0$，在 V_2 内 $\sigma=0$.

下面用伽辽金形式的加权余量法来建立式(7-103)—(7-107)的有限元方程.

(一) A,φ-A 法的伽辽金弱表述形式

把整个求解域剖分成 E 个立体单元. 任一单元 e 内，向量磁位 A^e 可用该单元的各个

节点处的磁位近似表示为

$$\dot{\mathbf{A}}^e \doteq \sum_{k=1}^{n} N_k^e \dot{\mathbf{A}}_k^e = \sum_{k=1}^{n} (N_k^e \dot{A}_{kx}^e \mathbf{i} + N_k^e \dot{A}_{ky}^e \mathbf{j} + N_k^e \dot{A}_{kz}^e \mathbf{k})$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ \omega=x,y,z}}^{n} \mathbf{N}_k^e \dot{A}_{k\omega}^e \qquad \omega = x, y, z \tag{7-108}$$

式中 $\dot{A}_{kx}^e$、$\dot{A}_{ky}^e$和 $\dot{A}_{kz}^e$为 $\dot{A}_k^e$ 的 x、y 和 z 分量；N_k^e 为节点 k 的单元形状函数；n 为单元的总节点数；$\mathbf{N}_{k\omega}^e$则表示

$$\left.\begin{aligned} N_k^e &= N_k^e \mathbf{i}, && \omega = x \text{ 时}; \\ & N_k^e \mathbf{j}, && \omega = y \text{ 时}; \\ & N_k^e \mathbf{k}, && \omega = z \text{ 时}. \end{aligned}\right\} \tag{7-109}$$

$\mathbf{N}_k^e$ 的数目等于 $3n$. 整个求解域内的向量磁位$\dot{\mathbf{A}}$则为

$$\dot{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{N} (N_k \dot{A}_{kx} \mathbf{i} + N_k \dot{A}_{ky} \mathbf{j} + N_k \dot{A}_{kz} \mathbf{k})$$

$$= \sum_{k} \mathbf{N}_k \dot{A}_{k\omega} \tag{7-110}$$

式中 N 为求解域内的总节点数；N_k 为节点 k 的整体形状函数，它是相关单元的单元形状函数在节点 k 处的拼接. 同理，对标量电位 φ 有

$$\dot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} N_k^e \dot{\varphi}_k \tag{7-111}$$

$$\dot{\varphi} = \sum_{k=1}^{N} N_k \dot{\varphi}_k \tag{7-112}$$

伽辽金形式的加权余量法以形状函数作为权函数. 在边值问题式(7-103)—(7-107)中，边界 S_B 上 $\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}} = 0$，边界 S_H 上 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$，这是两个第一类边界条件；在有限元方程组建立以后，它们应作为强加边界条件来处理. 对于伽辽金法，在位值已知的节点上(即给定第一类边界条件的节点上)，权函数取为零；作为权函数的形状函数在 S_B 和 S_H 上应满足

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{N}_i &= 0, \quad \text{在 } S_B \text{ 上}; \\ \mathbf{n} \times \mathbf{N}_i &= 0, \quad \text{在 } S_H \text{ 上}; \end{aligned}\right\} \tag{7-113}$$

式 (7-103) 是一个向量方程. 在 V 内以 $\mathbf{N}_i$ 作为权函数，对式 (7-103) 作加权积分，并使其等于零，可得

$$\int_V \mathbf{N}_i \cdot [\nabla \times \nu \nabla \times \dot{\mathbf{A}} - \nabla(\nu \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}) + j\omega\sigma \dot{\mathbf{A}} + \sigma \nabla \dot{\varphi} - \mathbf{J}_s] dV = 0 \tag{7-114}$$

把式(7-114)中的第一项变换为

$$\int_V \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times \nu \nabla \times \dot{\mathbf{A}}\, dV = \int_{V_1+V_2} \nu \nabla \times \dot{\mathbf{A}} \cdot \nabla \times \mathbf{N}_i dV$$

$$- \int_{V_1+V_2} \nabla \cdot [\mathbf{N}_i \times (\nu \nabla \times \dot{\mathbf{A}})] dV$$

再利用高斯定理，把上式右端第二项变换为面积分，可得

$$\int_V \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times \nu \nabla \times \dot{\mathbf{A}}\, dV = \int_V \nu \nabla \times \dot{\mathbf{A}} \cdot \nabla \times \mathbf{N}_i dV$$

$$-\Big[\int_{S_H}[\mathbf{N}_i\times(\nu\nabla\times\dot{\mathbf{A}})]\cdot\mathbf{n}dS+\int_{S_{12}}[\mathbf{N}_i\times\nu_1\nabla\times\dot{\mathbf{A}}_1]\cdot\mathbf{n}dS$$

$$+\int_{S_B}[\mathbf{N}_i\times(\nu\nabla\times\dot{\mathbf{A}})]\cdot\mathbf{n}dS-\int_{S_{12}}[\mathbf{N}_i\times\nu_2\nabla\times\dot{\mathbf{A}}_2]\cdot\mathbf{n}dS\Big] \tag{7-115}$$

上式中右端最后一项的负号，是由于 V_2 的边界 S_{12} 上法向量 $\boldsymbol{n}$ 的正方向规定为从区域 1 指向区域 2 而引起. 同理，式(7-114)中的第二项可变换成

$$\int_V\mathbf{N}_i\cdot\nabla(\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})dV=\int_{V_1+V_2}\nabla\cdot[(\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})\mathbf{N}_i]dV-\int_V(\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})\nabla\cdot\mathbf{N}_idV$$

$$=\int_{S_H}(\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n}dS+\int_{S_{12}}(\nu_1\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}_1)\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n}dS+\int_{S_B}(\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n}dS$$

$$-\int_{S_{12}}(\nu_2\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}_2)\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n}dS-\int_V(\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})\nabla\cdot\mathbf{N}_idV \tag{7-116}$$

把式(7-115)、(7-116)代入(7-114)，可得

$$\int_V(\nu\nabla\times\mathbf{N}_i\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}}+\nu\nabla\cdot\mathbf{N}_i\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}+j\omega\sigma\mathbf{N}_i\cdot\dot{\mathbf{A}}+\sigma\mathbf{N}_i\cdot\nabla\dot{\varphi}-\mathbf{N}_i\cdot\dot{\mathbf{J}}_s)dV$$

$$-\int_{S_{12}}\mathbf{N}_i\times(\nu_1\nabla\times\dot{\mathbf{A}}_1)\cdot\mathbf{n}dS+\int_{S_{12}}\mathbf{N}_i\times(\nu_2\nabla\times\dot{\mathbf{A}}_2)\cdot\mathbf{n}dS$$

$$-\int_{S_{12}}\nu_1\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}_1\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n}dS+\int_{S_{12}}\nu_2\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}_2\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n}dS$$

$$-\int_{S_H}\mathbf{N}_i\cdot(\nu\nabla\times\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n})dS-\int_{S_B}\nu\nabla\times\dot{\mathbf{A}}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{N}_i)dS$$

$$-\int_{S_H}\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n})dS-\int_{S_B}\nu\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n})dS=0 \tag{7-117}$$

由交界面条件(7-107)中的第三和第二式可知，上式中第一和第二个面积分互相抵消；第三和第四面积分互相抵消. 由边界条件 (7-106) 和 (7-105) 可知，上式中第五和第八个面积分别为零；由式(7-113)可知，第六和第七个面积分别为零. 因此，经过化简，式(7-114)最后成为

$$\int_V(\nu\nabla\times\mathbf{N}_i\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}}+\nu\nabla\cdot\mathbf{N}_i\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}+j\omega\sigma\mathbf{N}_i\cdot\dot{\mathbf{A}}+\sigma\mathbf{N}_i\cdot\nabla\dot{\varphi}-\mathbf{N}_i\cdot\dot{\mathbf{J}}_s)dV=0 \tag{7-118}$$

然后，以 N_i 为权函数，在 V_1 内对式 (7-104) 作加权积分，并使其等于零；可得

$$\int_{V_1}N_i\nabla\cdot(-j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}-\sigma\nabla\dot{\varphi})dV=0 \tag{7-119}$$

利用向量恒等式，上式亦可写成

$$\int_{V_1}\nabla\cdot[N_i(-j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}-\sigma\nabla\dot{\varphi})]dV+\int_{V_1}\nabla N_i\cdot(j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}+\sigma\nabla\dot{\varphi})dV=0$$

再利用高斯定理，上式可改写成

$$\int_{V_1}\nabla N_i\cdot(j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}+\sigma\nabla\dot{\varphi})]dV+\int_{S_{12}}N_i(-j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}-\sigma\nabla\dot{\varphi})\cdot\mathbf{n}dS=0 \tag{7-120}$$

由交界面条件 (7-107) 中的最后一式可知，上式中的面积分项为零，因而式 (7-119) 最后成为

$$\int_{V_1}\nabla N_i\cdot(j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}+\sigma\nabla\dot{\varphi})dV=0 \tag{7-121}$$

至此，完成了方程(7-103)和(7-104)的余量加权积分的化简，并得到了弱表述形式

(7-118)和(7-121).当式(7-118)和(7-121)成立时,交界面条件(7-107)自动满足,成为自然边界条件;而边界条件(7-105)中的第一式和(7-106)中的第二式则是强加边界条件.

为使方程(7-118)和(7-121)成为对称形式,文献[14]引入函数ϕ,使

$$\varphi=\frac{\partial\phi}{\partial t},\quad \text{即 } \dot{\varphi}=j\omega\dot{\phi} \tag{7-122}$$

这样,式(7-118)和(7-121)可改写成下列形式:

$$\int_V(\nu\nabla\times\mathbf{N}_i\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}}+\nu\nabla\cdot\mathbf{N}_i\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}+j\omega\sigma\mathbf{N}_i\cdot\dot{\mathbf{A}}+j\omega\sigma\mathbf{N}_i\cdot\nabla\dot{\phi}-\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{J}_s)dV=0 \tag{7-123}$$

$$\int_{V_1}j\omega\sigma\nabla N_i\cdot(\dot{\mathbf{A}}+\nabla\dot{\phi})dV=0 \tag{7-124}$$

写成矩阵形式时有

$$\left[\begin{array}{c|c}\displaystyle\int_V[\nu\nabla\times\mathbf{N}_i\cdot\nabla\times(\)+\nu\nabla\cdot\mathbf{N}_i\nabla\cdot(\)+j\omega\sigma\mathbf{N}_i\cdot(\)]dV & \displaystyle\int_V j\omega\sigma\mathbf{N}_i\cdot\nabla(\)dV \\ \hline \displaystyle\int_{V_1}j\omega\sigma\nabla N_i\cdot(\)dV & \displaystyle\int_{V_1}j\omega\sigma\nabla N_i\cdot\nabla(\)dV\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\dot{\mathbf{A}}\\ \hline \dot{\phi}\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c}\displaystyle\int_V\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{J}_s dV\\ \hline 0\end{array}\right] \tag{7-125}$$

下面进一步进行单元分析和总体合成.

(二) 单元分析和总体合成

单元分析 把式(7-123)和(7-124)写成各单元积分之和,可得

$$\sum_{e=1}^{E}\int_{V_e}(\nu\nabla\times\mathbf{N}_i^e\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}}^e+\nu\nabla\cdot\mathbf{N}_i^e\cdot\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}^e+j\omega\sigma\mathbf{N}_i^e\cdot\dot{\mathbf{A}}^e+j\omega\sigma\mathbf{N}_i^e\cdot\nabla\dot{\phi}^e$$
$$-\mathbf{N}_i^e\cdot\dot{\mathbf{J}}_s^e)dV=0 \tag{7-126}$$

$$\sum_{e=1}^{E}\int_{V_e}j\omega\sigma\nabla N_i^e\cdot(\dot{\mathbf{A}}^e+\nabla\dot{\phi}^e)dV=0 \tag{7-127}$$

考虑到

$$\dot{\mathbf{A}}^e=\sum_{k=1}^{n}N_k^e\dot{\mathbf{A}}_k^e=\sum_{k=1}^{n}(N_k^e\dot{A}_{kx}^e\mathbf{i}+N_k^e\dot{A}_{ky}^e\mathbf{j}+N_k^e\dot{A}_{kz}^e\mathbf{k})$$

$$\dot{\phi}^e=\sum_{k=1}^{n}N_k^e\dot{\phi}_k^e$$

若$\mathbf{N}_i^e=N_i^e\mathbf{i}$,就有

$$\nabla\times\mathbf{N}_i^e=\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\mathbf{j}-\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\mathbf{k},\qquad \nabla\cdot\mathbf{N}_i^e=\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \tag{7-128}$$

$$\nabla\times\mathbf{N}_i^e\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}}^e=\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\left(\frac{\partial\dot{A}_x^e}{\partial z}-\frac{\partial\dot{A}_z^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\left(\frac{\partial\dot{A}_z^e}{\partial y}-\frac{\partial\dot{A}_y^e}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kx}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial z}-\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kz}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kz}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial y}-\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{ky}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right) \tag{7-129}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_i^e \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}^e = \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\left(\frac{\partial \dot{A}_x^e}{\partial x}+\frac{\partial \dot{A}_y^e}{\partial y}+\frac{\partial \dot{A}_z^e}{\partial z}\right) = \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kx}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{ky}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kz}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right) \tag{7-130}$$

$$\mathbf{N}_i^e \cdot \dot{\mathbf{A}}^e + \mathbf{N}_i^e \cdot \nabla\dot{\phi}^e = N_i^e\left(\dot{A}_x^e + \frac{\partial \dot{\phi}^e}{\partial x}\right) = N_i^e\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kx}^e N_k^e + \sum_{k=1}^{n}\dot{\phi}_k^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right) \tag{7-131}$$

$$\mathbf{N}_i^e \cdot \mathbf{j}_s^e = N_i^e \dot{J}_{sx}^e \tag{7-132}$$

把式(7-128)—(7-132)代入式(7-126)，并取单元内的电导率为 σ_e，磁阻率为 ν_e，x 方向的源电密为 $\dot{J}_{sx}^e$，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{V_e}(\nu\nabla\times\mathbf{N}_i^e\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}}^e+\nu\nabla\cdot\mathbf{N}_i^e\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}^e+j\omega\sigma\mathbf{N}_i^e\cdot\dot{\mathbf{A}}^e+j\omega\sigma\mathbf{N}_i^e\cdot\nabla\dot{\phi}^e-\mathbf{N}_i^e\cdot\mathbf{J}_s^e)dV\\
&=\nu_e\int_{V_e}\left[\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kx}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial z}-\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kz}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kx}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial y}-\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{ky}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kx}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{ky}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kz}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)\right]dV\\
&\quad+j\omega\sigma_e\int_{V_e}N_i^e\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{A}_{kx}^e N_k^e+\sum_{k=1}^{n}\dot{\phi}_k^e\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\right)dV-\int_{V_e}\dot{J}_{sx}^e N_i^e dV\\
&=\nu_e\int_{V_e}\left[\sum_k\dot{A}_{kx}^e\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)\right.\\
&\quad+\sum_k\dot{A}_{ky}^e\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}-\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)+\left.\sum_k\dot{A}_{kz}^e\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}-\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)\right]dV\\
&\quad+j\omega\sigma_e\int_{V_e}\left[\sum_k\dot{A}_{kx}^e N_i^e N_k^e+\sum_k\dot{\phi}_k^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}N_i^e\right]dV-\int_{V_e}\dot{J}_{sx}^e N_i^e dV
\end{aligned} \tag{7-133}$$

上式可改写为

$$\sum_{k=1}^{n}k_{ixkx}^e\dot{A}_{kx}^e+\sum_{k=1}^{n}k_{ixky}^e\dot{A}_{ky}^e+\sum_{k=1}^{n}k_{ixkz}^e\dot{A}_{kz}^e+\sum_{k=1}^{n}k_{ixk\phi}^e\dot{\phi}_k^e-f_{ix}^e=r_{ix}^e \tag{7-134}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
k_{ixkx}^e&=\int_{V_e}\left[\nu_e\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)+j\omega\sigma_e N_i^e N_k^e\right]dV\\
k_{ixky}^e&=\nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}-\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)dV\\
k_{ixkz}^e&=\nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}-\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\right)dV\\
k_{ixk\phi}^e&=j\omega\sigma_e\int_{V_e}N_i^e\frac{\partial N_k^e}{\partial x}dV\\
f_{ix}^e&=J_{sx}^e\int_{V_e}N_i^e dV
\end{aligned}\right\} \tag{7-135}$$

式(7-134)中的 r_{ix}^e就是单元 e 中第 i 个节点的 x 分量所形成的单元余量.

其次，若 $\mathbf{N}_i^e = N_i^e\,\mathbf{j}$，则

$$\nabla \times \mathbf{N}_l^e = -\frac{\partial N_l^e}{\partial z} i + \frac{\partial N_l^e}{\partial x} k, \nabla \cdot \mathbf{N}_l^e = \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \tag{7-136}$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_l^e \cdot \nabla \times \dot{\mathbf{A}}^e = \frac{\partial N_l^e}{\partial z}\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{ky}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{kz}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right) + \frac{\partial N_l^e}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{ky}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{kz}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right) \tag{7-137}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_l^e \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}^e = \frac{\partial N_l^e}{\partial y}\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{kx}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{ky}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{kz}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right) \tag{7-138}$$

$$\mathbf{N}_l^e \cdot (\dot{\mathbf{A}}^e + \nabla \dot{\phi}^e) = N_l^e\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{ky}^e N_k^e + \sum_{k=1}^{n} \dot{\phi}_k^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right) \tag{7-139}$$

$$\mathbf{N}_l^e \cdot \mathbf{J}_s^e = N_l^e \dot{J}_{sy}^e \tag{7-140}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{V_e} (\nu \nabla \times \mathbf{N}_l^e \cdot \nabla \times \dot{\mathbf{A}}^e + \nu \nabla \cdot \mathbf{N}_l^e \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}^e + j\omega\sigma \mathbf{N}_l^e \cdot \dot{\mathbf{A}}^e + j\omega\sigma \mathbf{N}_l^e \cdot \nabla \dot{\phi} - \mathbf{N}_l^e \cdot \dot{\mathbf{J}}_s^e) dV \\
&= \nu_e \int_{V_e} \Big[\sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{kx}^e \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} - \frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right) + \sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{ky}^e \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} + \frac{\partial N_l^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \right) \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{kz}^e \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial z} - \frac{\partial N_l^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right) \Big] dV \\
&+ j\omega\sigma_e \int_{V_e} \left(\sum_{k=1}^{n} \dot{A}_{ky}^e N_k^e + \sum_{k=1}^{n} \dot{\phi}_k^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y} N_l^e \right) dV - \int_{V_e} \dot{J}_{sy}^e N_l^e dV
\end{aligned} \tag{7-141}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} k_{lykx}^e \dot{A}_{kx}^e + \sum_{k=1}^{n} k_{lyky}^e \dot{A}_{ky}^e + \sum_{k=1}^{n} k_{lykz}^e \dot{A}_{kz}^e + \sum_{k=1}^{n} k_{lyk\phi}^e \dot{\phi}_k^e - f_{ly}^e = r_{ly}^e \tag{7-142}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
k_{lykx}^e &= \nu_e \int_{V_e} \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} - \frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right) dV = -k_{lxky}^e \\
k_{lyky}^e &= \int_{V_e} \left[\nu_e \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} + \frac{\partial N_l^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \right) + j\omega\sigma_e N_l^e N_k^e \right] dV = k_{lxkx}^e \\
k_{lykz}^e &= \nu_e \int_{V_e} \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial z} - \frac{\partial N_l^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right) dV \\
k_{lyk\phi}^e &= j\omega\sigma_e \int_{V_e} N_l^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y} dV \\
f_{ly}^e &= \dot{J}_{sy}^e \int_{V_e} N_l^e dV
\end{aligned}\right\} \tag{7-143}$$

式(7-142)中的 r_{ly}^e 是第 l 个节点 y 分量所形成的单元余量.

同理，若 $\mathbf{N}_l^e = N_l^e \mathbf{k}$，则

$$\nabla \times \mathbf{N}_l^e = \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial N_l^e}{\partial x} \mathbf{j}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{N}_l^e = \frac{\partial N_l^e}{\partial z} \tag{7-144}$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_l^e \cdot \nabla \times \dot{\mathbf{A}}^e = \frac{\partial N_l^e}{\partial y}\left(\sum_{k} \dot{A}_{kx}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y} - \sum_{k} \dot{A}_{ky}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\left(\sum_k \dot{A}_{kx}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial x}-\sum_k \dot{A}_{kz}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right) \tag{7-145}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{N}_l^e\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}^e=\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\left(\sum_k \dot{A}_{kx}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\sum_k \dot{A}_{ky}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\sum_k \dot{A}_{kz}^e \frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right) \tag{7-146}$$

$$\mathbf{N}_l^e\cdot(\dot{\mathbf{A}}^e+\nabla\dot{\phi})=N_l^e\left(\sum_k \dot{A}_{kz}^e N_k^e+\sum_k \dot{\phi}_k^e \frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right) \tag{7-147}$$

$$\mathbf{N}_l^e\cdot\dot{\mathbf{J}}_s^e=N_l^e\dot{J}_{sz}^e \tag{7-148}$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_{V_e}(\nu\nabla\times\mathbf{N}_l^e\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{A}}^e+\nu\nabla\times\mathbf{N}_l^e\nabla\dot{\mathbf{A}}^e+j\omega\sigma\mathbf{N}_l^e\cdot\dot{\mathbf{A}}^e+j\omega\sigma\mathbf{N}_l^e\cdot\nabla\dot{\phi}^e-\mathbf{N}_l^e\cdot\dot{\mathbf{J}}_s^e))dV\\&=\nu_e\int_{V_e}\Big[\sum_k \dot{A}_{kz}^e\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}-\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)+\sum_k \dot{A}_{ky}^e\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}-\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)\\&\quad+\sum_k \dot{A}_{kz}^e\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)\Big]dV\\&\quad+j\omega\sigma_e\int_{V_e}\Big[\sum_k \dot{A}_{kz}^e N_l^e N_k^e+\sum_k \dot{\phi}^e\frac{\partial N_k^e}{\partial z}N_l^e\Big]dV-\int_{V_e}\dot{J}_{sz}^e N_l^e dV\end{aligned} \tag{7-149}$$

或

$$\sum_k k_{lzkz}^e\dot{A}_{kz}^e+\sum_k k_{lzky}^e\dot{A}_{ky}^e+\sum_k k_{lzkz}^e\dot{A}_{kz}^e+\sum_k k_{lzk\phi}^e\dot{\phi}-f_{lz}^e=r_{lz}^e \tag{7-150}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}k_{lzkx}^e&=\nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}-\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)dV=-k_{lzkz}^e\\k_{lzky}^e&=\nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}-\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)dV=-k_{lykz}^e\\k_{lzkz}^e&=\int_{\nu_e}\left[\nu_e\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}+\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)+j\omega\sigma_e N_l^e N_k^e\right]dV=k_{lyky}^e\end{aligned}\right\} \tag{7-151}$$

$$k_{lzk\phi}^e=j\omega\sigma_e\int_{V_e}N_l^e\frac{\partial N_z^e}{\partial z}dV$$

$$f_{lz}^e=\dot{J}_{sz}^e\int_{V_e}N_l^e dV$$

式(7-150)中的r_{lz}^e是第l个节点z分量所形成的单元余量.

注意，上面所有式子中的ν_e，若介质为线性，就表示单元的磁阻率；若介质为非线性(铁磁物质达到磁饱和时)，则表示单元的有效磁阻率.

接着对式(7-127)进行离散. 由于

$$\nabla N_l^e=\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\mathbf{k} \tag{7-152}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_{V_e}\nabla N_l^e\cdot(j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}^e+j\omega\sigma\nabla\dot{\phi}^e)dV=j\omega\sigma_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\dot{A}_x^e+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\dot{A}_y^e+\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\dot{A}_z^e\right.\\&\left.+\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial\dot{\phi}^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial\dot{\phi}^e}{\partial y}+\frac{\partial N_l^e}{\partial z}\frac{\partial\dot{\phi}^e}{\partial z}\right)dV=j\omega\sigma_e\int_{V_e}\Big[\sum_k \dot{A}_{kx}^e\frac{\partial N_l^e}{\partial x}N_k^e\end{aligned}$$

$$+\sum_k \dot{A}^e_{ky}\frac{\partial N^e_l}{\partial y}N^e_k+\sum_k \dot{A}^e_{kz}\frac{\partial N^e_l}{\partial z}N^e_k+\sum_k \dot{\varphi}^e_k\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}+\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}+\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}\right)\Big]dV \tag{7-153}$$

上式可改写为

$$\sum_k k^e_{l\phi kx}\dot{A}^e_{kx}+\sum_k k^e_{l\phi ky}\dot{A}^e_{ky}+\sum_k k^e_{l\phi kz}\dot{A}^e_{kz}+\sum_k k^e_{l\phi k\phi}\dot{\varphi}^e_k=r^e_{l\phi} \tag{7-154}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
k^e_{l\phi kx}&=j\omega\sigma_e\int_{V_e}\frac{\partial N^e_l}{\partial x}N^e_k\,dV\\
k^e_{l\phi ky}&=j\omega\sigma_e\int_{V_e}\frac{\partial N^e_l}{\partial y}N^e_k\,dV\\
k^e_{l\phi kz}&=j\omega\sigma_e\int_{V_e}\frac{\partial N^e_l}{\partial z}N^e_k\,dV\\
k^e_{l\phi k\phi}&=j\omega\sigma_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}+\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}+\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}\right)dV
\end{aligned}\right\} \tag{7-155}$$

式(7-154)中的 $r^e_{l\phi}$ 是第 l 个节点的 $\dot{\varphi}$ 的单元余量.

把式(7-134)、(7-142)、(7-150)和(7-154)等四个方程 ($l=1, 2, \cdots, n$) 归纳起来，可得单元分析结果为

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}^e_{11} & \mathbf{k}^e_{12} & \cdots & \mathbf{k}^e_{1n}\\ \mathbf{k}^e_{21} & \mathbf{k}^e_{22} & \cdots & \mathbf{k}^e_{2n}\\ & \vdots & & \\ \mathbf{k}^e_{n1} & \mathbf{k}^e_{n2} & \cdots & \mathbf{k}^e_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{A}}^e_{\varphi 1}\\ \dot{\mathbf{A}}^e_{\varphi 2}\\ \vdots\\ \dot{\mathbf{A}}^e_{\varphi n}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{f}^e_1\\ \mathbf{f}^e_2\\ \vdots\\ \mathbf{f}^e_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{r}^e_1\\ \mathbf{r}^e_2\\ \vdots\\ \mathbf{r}^e_n\end{bmatrix} \tag{7-156}$$

上式可简写成

$$\mathbf{k}^e\mathbf{A}^e_\varphi-\mathbf{f}^e=\mathbf{r}^e \tag{7-157}$$

其中

$$\mathbf{A}^e_\varphi=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{A}}^e_{\varphi 1}\\ \dot{\mathbf{A}}^e_{\varphi 2}\\ \vdots\\ \dot{\mathbf{A}}^e_{\varphi n}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{k}^e=\begin{bmatrix}\mathbf{k}^e_{11} & \mathbf{k}^e_{12} & \cdots & \mathbf{k}^e_{1n}\\ \mathbf{k}^e_{21} & \mathbf{k}^e_{22} & \cdots & \mathbf{k}^e_{2n}\\ & \vdots & & \\ \mathbf{k}^e_{n1} & \mathbf{k}^e_{n2} & \cdots & \mathbf{k}^e_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^e=\begin{bmatrix}\mathbf{f}^e_1\\ \mathbf{f}^e_2\\ \vdots\\ \mathbf{f}^e_n\end{bmatrix},\qquad \mathbf{r}^e=\begin{bmatrix}\mathbf{r}^e_1\\ \mathbf{r}^e_2\\ \vdots\\ \mathbf{r}^e_n\end{bmatrix} \tag{7-158}$$

而

$$\dot{\mathbf{A}}^e_{\varphi l}=\begin{bmatrix}\dot{A}^e_{lx}\\ \dot{A}^e_{ly}\\ \dot{A}^e_{lz}\\ \dot{\varphi}^e_l\end{bmatrix},\quad \mathbf{k}^e_{lk}=\begin{bmatrix}k^e_{lxkx} & k^e_{lxky} & k^e_{lxkz} & k^e_{lxk\phi}\\ k^e_{lykx} & k^e_{lyky} & k^e_{lykz} & k^e_{lyk\phi}\\ k^e_{lzkx} & k^e_{lzky} & k^e_{lzkz} & k^e_{lzk\phi}\\ k^e_{l\phi kx} & k^e_{l\phi ky} & k^e_{l\phi kz} & k^e_{l\phi k\phi}\end{bmatrix}$$

$$f_i^e=\begin{bmatrix}f_{ix}^e\\f_{iy}^e\\f_{iz}^e\\0\end{bmatrix},\qquad r_i^e=\begin{bmatrix}r_{ix}^e\\r_{iy}^e\\r_{iz}^e\\r_{i\phi}^e\end{bmatrix}\tag{7-159}$$

不难证明

$$\mathbf{k}_{ik}^e=(\mathbf{k}_{ki}^e)^T\tag{7-160}$$

所以 $\mathbf{k}^e$ 是一个对称阵. $\mathbf{k}^e$ 成为对称阵，这是引进$\dot{\phi}$的结果；如果用原先的 $\dot{\phi}$作为变量，则单元系数阵 $\mathbf{k}^e$ 将是不对称的.

总体合成 再把单元的电磁位列向量 $\mathbf{A}_\phi^e$扩展成全部节点的电磁位列向量 $\mathbf{A}_\phi$，同时把单元系数阵 $\mathbf{k}^e$ 和右端项列向量 $\mathbf{f}^e$ 分别扩展成单元贡献 $\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$，r^e 扩展成 $\mathbf{R}^e$，式(7-157)即可改写成

$$\mathbf{K}^e\mathbf{A}_\phi-\mathbf{F}^e=\mathbf{R}^e\tag{7-161}$$

再进行总体合成，把各个单元的单元贡献叠加，可得

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_\phi-\mathbf{F}=\mathbf{R}\tag{7-162}$$

式中 $\mathbf{K}$ 表示总体系数矩阵；$\mathbf{F}$ 表示总体右端项列向量；$\mathbf{R}$ 为总体余量列向量，它是一个零向量；

$$\mathbf{K}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{K}^e,\qquad \mathbf{F}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{F}^e,\qquad \mathbf{R}=\sum_{e=1}^{E}\mathbf{R}^e=\mathbf{0}\tag{7-163}$$

由此可得总体合成后的方程组

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_\phi=\mathbf{F}\tag{7-164}$$

最后用第一类边界条件修改式(7-164)，即可得到与原边值问题相应的有限元方程组.

对于非涡流区 V_2，仅有$\dot{\mathbf{A}}$而没有 $\dot{\varphi}$，此时每个节点上的未知数减为 3 个，单元系数阵 $\mathbf{k}^e$、电磁位列向量 $\mathbf{A}_\phi^e$中下标含有 $\dot{\phi}$的元素均消失.

$\dot{\mathbf{A}}$和 $\dot{\phi}$解出后，$\dot{\varphi}$即可算出，$\dot{\varphi}=jw\,\dot{\phi}$.

7-7 采用三棱柱或六面体单元时 A,φ-A 法中各元素的计算公式

(一) 直三棱柱单元

三棱柱单元有六个节点，此时单元电磁位 $\mathbf{A}_\phi^e$、单元系数矩阵 $\mathbf{k}^e$ 和右端项列向量 $\mathbf{f}^e$ 为

$$\mathbf{A}_\phi^e=\begin{bmatrix}\dot{A}_{\phi i}^e\\\dot{A}_{\phi j}^e\\\dot{A}_{\phi m}^e\\\dot{A}_{\phi i'}^e\\\dot{A}_{\phi j'}^e\\\dot{A}_{\phi m'}^e\end{bmatrix},\quad \mathbf{k}^e=\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ii}^e&\mathbf{k}_{ij}^e&\mathbf{k}_{im}^e&\mathbf{k}_{ii'}^e&\mathbf{k}_{ij'}^e&\mathbf{k}_{im'}^e\\\mathbf{k}_{ji}^e&\mathbf{k}_{jj}^e&\mathbf{k}_{jm}^e&\mathbf{k}_{ji'}^e&\mathbf{k}_{jj'}^e&\mathbf{k}_{jm'}^e\\&&\cdot&&&\\&&\cdot&&&\\&&\cdot&&&\\\mathbf{k}_{m'i}^e&\mathbf{k}_{m'j}^e&\mathbf{k}_{m'm}^e&\mathbf{k}_{m'i'}^e&\mathbf{k}_{m'j'}^e&\mathbf{k}_{m'm'}^e\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}^e=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_i^e\\\mathbf{f}_j^e\\\mathbf{f}_m^e\\\mathbf{f}_{i'}^e\\\mathbf{f}_{j'}^e\\\mathbf{f}_{m'}^e\end{bmatrix}\tag{7-165}$$

与三维恒定磁场时的离散公式比较，可知在正弦涡流场时，$\mathbf{k}_{ik}^{e}$中的 k_{lxkx}^{e}、k_{lyky}^{e}和 k_{lzkz}^{e} 比恒定磁场时多出一项 $j\omega\sigma_e\int_{V_e}N_l^eN_k^edV$；当 $\omega\to0$ 时，此项趋于零，于是正弦电磁场退化为恒定磁场情况．对三棱柱单元，$N_l^e=L_l\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)$，此项应为

$$\begin{aligned}\int_{V_e}N_l^eN_k^edV&=\int_{V_e}L_l\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)L_k\frac{1}{2}\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)dxdydz\\&=\frac{1}{4}\int_{\Delta_e}L_lL_kdxdy\int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)dz\\&=\frac{1}{4}\frac{1}{12}\Delta_e(1+\delta_{lk})d\int_{\frac{z_c}{d}-1}^{\frac{z_c}{d}+1}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)d\left(\frac{z}{d}\right)\\&=\frac{1}{18}mnV_e\end{aligned}$$

$$m=\begin{cases}1, & \text{当 } p_l=p_k \text{ 时;}\\0.5, & \text{当 } p_l\neq p_k \text{ 时.}\end{cases}\qquad n=\begin{cases}1, & l=k \text{ 或 } ii',jj',mm' \text{ 组合时;}\\0.5, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

(7-166)

于是

$$\begin{aligned}k_{lxkx}^{e}&=k_{lyky}^{e}=k_{lzkz}^{e}\\&=\frac{1}{36V_e}\left[\nu_em(b_lb_k+c_lc_k)h_e^2+3\nu_enp_lp_k(2\Delta_e^2)\right]+\frac{1}{18}j\omega\sigma_emnV_e\\&=\frac{1}{36V_e}\left[3\nu_em(b_lb_k+c_lc_k)h_e^2+3\nu_enp_lp_k(2\Delta_e^2)\right]+\frac{1}{36V_e}j\omega\sigma_emn\,2V_e^2\end{aligned}\tag{7-167}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial N_k^e}{\partial x}=\frac{b_k}{2\Delta_e}\frac{1}{2}\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right),\qquad\frac{\partial N_k^e}{\partial y}=\frac{c_k}{2\Delta_e}\frac{1}{2}\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)\\&\frac{\partial N_k^e}{\partial z}=\frac{1}{2}L_k\frac{p_k}{d}\end{aligned}\right\}\tag{7-168}$$

所以

$$\begin{aligned}k_{lxk\phi}^{e}&=j\omega\sigma_e\int_{V_e}N_l\frac{\partial N_k^e}{\partial x}dV\\&=j\omega\sigma_e\int_{V_e}L_l\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\frac{b_k}{2\Delta_e}\frac{1}{2}\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)dxdydz\\&=j\omega\sigma_e\frac{b_k}{8\Delta_e}\int_{\Delta_e}L_kdxdy\int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\left(1+p_k\frac{z-z_c}{d}\right)dz\\&=\frac{1}{9}j\omega\sigma_emb_kd=\frac{1}{36V_e}j\omega\sigma_emb_kd(4V_e)\end{aligned}\tag{7-169}$$

$$k_{lyk\phi}^{e}=j\omega\sigma_e\int_{V_e}N_l^e\frac{\partial N_k^e}{\partial y}dV=\frac{1}{36V_e}j\omega\sigma_emc_kd(4V_e)\tag{7-170}$$

$$k_{lzk\phi}^{e}=j\omega\sigma_e\int_{V_e}N_l^e\frac{\partial N_k^e}{\partial z}dV=j\omega\sigma_e\int_{V_e}L_l\frac{1}{2}\left(1+p_l\frac{z-z_c}{d}\right)\frac{1}{2}L_k\frac{p_k}{d}dxdydz$$

$$= j\omega\sigma_e \frac{1}{4}\frac{p_k}{d}\int_{\Delta_e} L_i L_k dxdy \int_{z_c-d}^{z_c+d}\left(1 + p_l\frac{z-z_c}{d}\right)dz$$

$$= \frac{1}{12}j\omega\sigma_e\Delta_e np_k = \frac{1}{36V_e}j\omega\sigma_e\Delta_e np_k(3V_e) \tag{7-171}$$

$$k^e_{ijkx} = j\omega\sigma_e\int_{V_e}\frac{\partial N^e_i}{\partial x}N^e_k dV = \frac{1}{36V_e}j\omega\sigma_e mb_i d(4V_e) \tag{7-172}$$

$$k^e_{ijky} = j\omega\sigma_e\int_{V_e}\frac{\partial N^e_i}{\partial y}N^e_k dV = \frac{1}{36V_e}j\omega\sigma_e mc_i d(4V_e) \tag{7-173}$$

$$k^e_{ijkz} = j\omega\sigma_e\int_{V_e}\frac{\partial N^e_i}{\partial z}N^e_k dV = \frac{1}{36V_e}j\omega\sigma_e\Delta_e np_i(3V_e) \tag{7-174}$$

$$\mathbf{k}^e_{ik} = \frac{1}{36V_e}\begin{bmatrix} 3\nu_e[m(b_ib_k + c_ic_k)h_e^2 + np_ip_k(2\Delta_e)] + 2j\omega\sigma_e mnV_e^2 & 3\nu_e m(b_ic_k - c_ib_k)h_e^2 \\ 3\nu_e m(c_ib_k - b_ic_k)h_e^2 & 3\nu_e[m(b_ib_k + c_ic_k)h_e^2 + np_ip_k(2\Delta_e^2)] + 2j\omega\sigma_e mnV_e^2 \\ 3\nu_e(b_kp_i - b_ip_k)V_e & 3\nu_e(c_kp_i - c_ip_k)V_e \\ 4j\omega\sigma_e mb_i dV_e & 4j\omega\sigma_e mc_i dV_e \\ 3\nu_e(b_ip_k - b_kp_i)V_e & 4j\omega\sigma_e mb_k dV_e \\ 3\nu_e(c_ip_k - c_kp_i)V_e & 4j\omega\sigma_e mc_k dV_e \\ 3\nu_e[m(b_ib_k + c_ic_k)h_e^2 + np_ip_k(2\Delta_e^2)] + 2j\omega\sigma_e mnV_e^2 & 3j\omega\sigma_e\Delta_e np_kV_e \\ 3j\omega\sigma_e\Delta_e np_iV_e & 3\nu_e[m(b_ib_k + c_ic_k)h_e^2 + np_ip_k(2\Delta_e^2)] + 2j\omega\sigma_e mnV_e^2 \end{bmatrix} \tag{7-175}$$

$$l,k = i,j,m,i',j',m'.$$

$$\mathbf{k}^e_{il} = \frac{1}{36V_e}\begin{bmatrix} 3\nu_e[(b_i^2 + c_i^2)h_e^2 + 2\Delta_e^2] + 2j\omega\sigma_e V_e^2 & 0 & 0 & 4j\omega\sigma_e b_i dV_e \\ 0 & 3\nu_e[(b_i^2 + c_i^2)h_e^2 + 2\Delta_e^2] + 2j\omega\sigma_e V_e^2 & 0 & 4j\omega\sigma_e c_i dV_e \\ 0 & 0 & 3\nu_e[(b_i^2 + c_i^2)h_e^2 + 2\Delta_e^2] + 2j\omega\sigma_e V_e^2 & 3j\omega\sigma_e p_i\Delta_e V_e \\ 4j\omega\sigma_e b_i dV_e & 4j\omega\sigma_e c_i dV_e & 3j\omega\sigma_e p_i\Delta_e V_e & 3\nu_e[(b_i^2 + c_i^2)h_e^2 + 2\Delta_e^2] + 2j\omega\sigma_e V_e^2 \end{bmatrix} \tag{7-176}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} f^e_{ix} &= j^e_{sx}\int_{V_e}N^e_i dV = \frac{1}{6}j^e_{sx}V_e, \\ f^e_{iy} &= \frac{1}{6}j^e_{sy}V_e, f^e_{iz} = \frac{1}{6}j^e_{sz}V_e \end{aligned}\right\} \tag{7-177}$$

（二）等参变换和等参元

除了三棱柱单元外，三维电磁场计算时还常常用到六面体单元. 例如把图 7-19 所示具有矩形截面的圆弧形导体，就可以用多个楔形六面体去逼近. 对于形状规则的长方形六面体单元（砖块单元），将其形状函数的表达式代入式(7-135)、(7-143)、(7-151)和(7-155)，即可求出其单元系数矩阵和右端项列阵的各个元素的表达式. 对于形状不规则的六面体，可以利用坐标变换，使其在新的局部坐标系 ξ、η、ζ 中变成立方体，然后用数值法求出单元系数阵的各个元素. 下面来说明等参变换的概念.

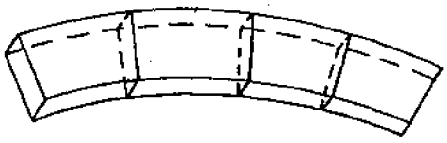


图 7-19　弧形导体的逼近

等参变换和等参元　先用二维情况来说明.

设在二维局部坐标系 ξ，η 中有一边长为 2 的正方形单元，正方形的各边与坐标轴线

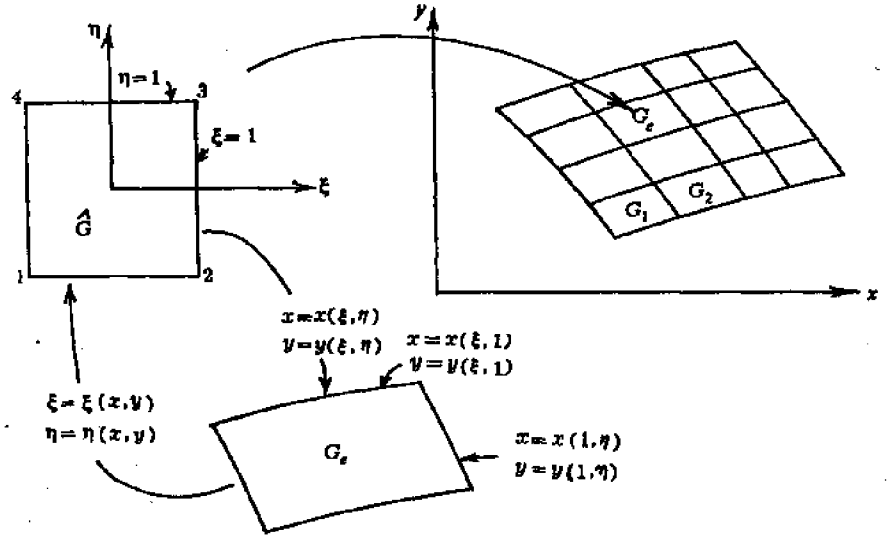


图 7-20　由基本元生成等参元

平行，中心与原点重合，如图 7-20 所示. 此单元称为基本元(或主单元). 对基本元，$-1\leqslant(\xi,\eta)\leqslant1$，四个节点的局部坐标 $(\xi_k,\ \eta_k)$ 分别为：

$$(\xi_k,\eta_k)=\begin{cases}(-1,1), & k=1;\\ (1,-1), & k=2;\\ (1,1), & k=3;\\ (-1,1), & k=4,\end{cases}\tag{7-178}$$

不难导出，在局部坐标系中，此正方形的形状函数为：

$$\left.\begin{aligned} N_1^e&=\frac{1}{4}\ (1-\xi)(1-\eta), & N_2^e&=\frac{1}{4}\ (1+\xi)(1-\eta),\\ N_3^e&=\frac{1}{4}\ (1+\xi)(1+\eta), & N_4^e&=\frac{1}{4}\ (1-\xi)(1+\eta).\end{aligned}\right\}\tag{7-179}$$

上式亦可以统一地表示为：

$$N_k^i=\frac{1}{4}(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta),\qquad k=1,2,3,4 \tag{7-180}$$

当 $k=1$ 时，$\xi_k=\eta_k=-1$；当 $k=2$ 时，$\xi_k=1$，$\eta_k=-1$；当 $k=3$ 时，$\xi_k=\eta_k=1$；当 $k=4$ 时，$\xi_k=-1$，$\eta_k=1$.

在整体坐标系 x,y 中，经过网格剖分，可得一系列四边形元 G_1，G_2，…，如图 7-20 所示. 现在来考察正方形基本元 G 与任意四边形元 G_e 之间的变换关系.

普遍来讲，x,y 与 ξ,η 之间的坐标变换可写成

$$x=x(\xi,\eta),\quad y=y(\xi,\eta) \tag{7-181}$$

通过上式，基本元 G 内的点 (ξ,η) 可变换到 G_e 内的对应点 (x,y)；基本元的四条棱边将变换为 xy 平面中四边形单元的四条曲线棱边. 作为特例，如果把式 (7-181) 的变换规定为

$$x=\sum_{k=1}^{4}N_k^i(\xi,\eta)x_k,\quad y=\sum_{k=1}^{4}N_k^i(\xi,\eta)y_k, \tag{7-182}$$

其中 N_k^i 为局部坐标系中位函数的形状函数；即采用同样的参数（形状函数）来描述位函数和单元几何形状的变化，这种变换就称为等参变换. 由等参变换所得到的实际单元就称为等参元. 下面证明，取式 (7-179) 所示形状函数作等参变换，则局部坐标系中的四节点正方形单元将变换为整体坐标系中棱边为直线的四节点四边形单元.

若形状函数为 $N_i^i=\frac{1}{4}(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)$，对基本元作等参变换，可得

$$\left.\begin{aligned}x(\xi,\eta)&=\sum_{1}^{4}N_i^i(\xi,\eta)x_i=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2\\&\quad+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_3+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_4\\y(\xi,\eta)&=\sum_{1}^{4}N_i^i(\xi,\eta)y_i=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_1+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_2\\&\quad+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_3+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_4\end{aligned}\right\} \tag{7-183}$$

对点 1，在局部坐标系中 $\xi_1=-1$，$\eta_1=-1$，，代入上式可得 $x=x_1$，$y=y_1$，即变换后成为整体坐标系中的点 1. 同理可知，局部坐标系中的 2，3，4 三个点将依次变换成整体坐标系中的点 2，3，4 (图 7-21).

再看棱边的变换. 在局部坐标系中，棱边$\overline{23}$的方程式为 $\xi=1$. 将此关系代入式 (7-183)，可得

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(1-\eta)x_2+\frac{1}{2}(1+\eta)x_3=\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_3-x_2}{2}\eta\\y&=\frac{1}{2}(1-\eta)y_2+\frac{1}{2}(1+\eta)y_3=\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_3-y_2}{2}\eta\end{aligned}\right\} \tag{7-184}$$

在总体坐标系中，上式表示一条通过点 2 和点 3 的直线. 同理可知，其余三条棱边 $\xi=-1$ 和 $\eta=\pm1$ 将分别变换成总体坐标系中的通过 3、4，4、1 和 1、2 等点的三条直线. 这样，通过式 (7-182) 所定义的变换，G 中的基本元将变换为 x,y 平面内由 1、2、3、4 四

点所构成的棱边为直线的四边形元（图 7-21）.

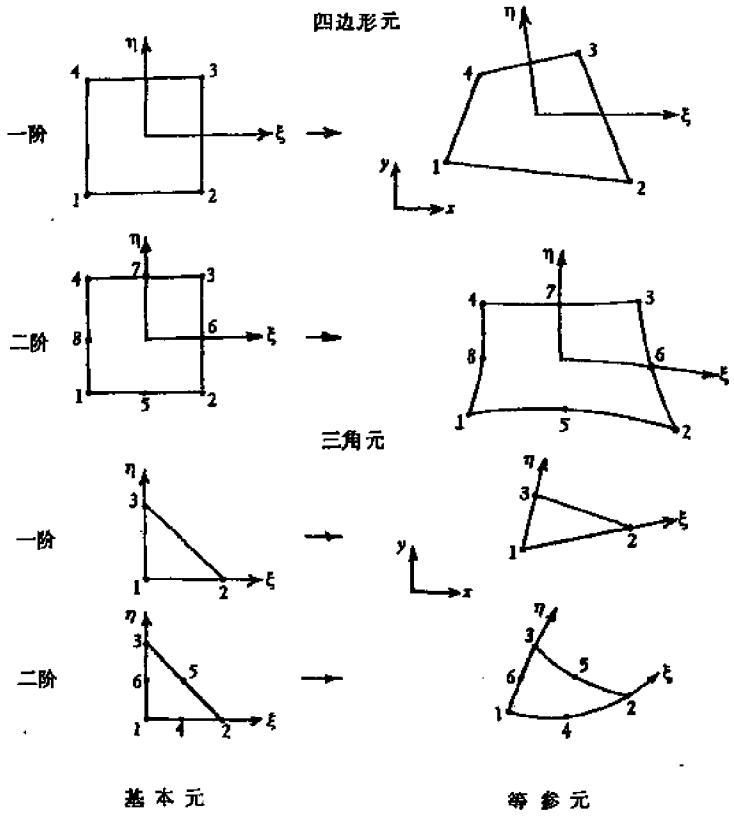


图 7-21　线性基本元和二阶基本元及其变换

同理可以证明，若形状函数 N_k^e 为二次函数，则局部坐标系内的 8 节点正方形基本元将变换为 xy 平面内棱边为抛物线的四边形单元. 换言之，采用不同阶数的形状函数，可以定义不同的变换，从而在整体坐标系中生成不同形状的实际单元. 对于三角元亦是这样. 因此，在需要精确地描述不规则场域（例如具有曲线边界的场域）时，等参变换十分有用.

为计算单元系数阵中的各个元素，需要进行反变换，这将在研究三维情况时讨论.

三维六面体等参元　下面进一步研究三维空间中的 8 节点六面体等参元. 此时在局部坐标系 ξ，η，ζ 中，基本元为一边长为 2 的立方体，其中心与坐标原点重合，如图 7-22 所示.

基本元的形状函数为

$$N_k^e = \frac{1}{8}(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)(1+\zeta_k\zeta) \tag{7-185}$$

式中 ξ_k，η_k，ζ_k 为 8 个节点的坐标，

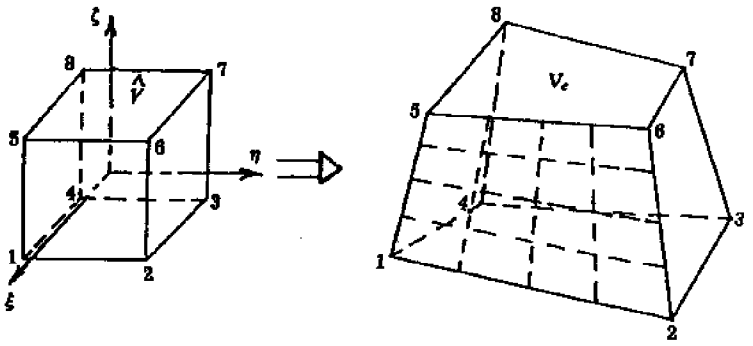


图 7-22　立方体基本元的等参变换

$$(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=\begin{cases}(1,-1,-1), & k=1;\\ (1,1,-1), & k=2;\\ (-1,1,-1), & k=3;\\ (-1,-1,-1), & k=4;\\ (1,-1,1), & k=5;\\ (1,1,1), & k=6;\\ (-1,1,1), & k=7;\\ (-1,-1,1), & k=8.\end{cases} \tag{7-186}$$

不难看出，此形状函数亦满足以下两个基本性质；即

$$\left.\begin{aligned} &N_k^e(\xi_j,\eta_j,\zeta_j)=\delta_{kj} \qquad k=1,2,\cdots,8\\ &\sum_{k=1}^{8}N_k^e(\xi,\eta,\zeta)=1\end{aligned}\right\} \tag{7-187}$$

$\|N_k^e$ 对局部坐标的导数则为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_k^e}{\partial\xi}&=\frac{1}{8}\xi_k(1+\eta_k\eta)(1+\zeta_k\zeta)\\ \frac{\partial N_k^e}{\partial\eta}&=\frac{1}{8}\eta_k(1+\xi_k\xi)(1+\zeta_k\zeta)\\ \frac{\partial N_k^e}{\partial\zeta}&=\frac{1}{8}\zeta_k(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)\end{aligned}\right\} \tag{7-188}$$

基本单元内任一点的磁位 u，可用其各节点的磁位 u_k^e 和相应的形状函数 N_k^e 表出，

$$u^e=\sum_{k=1}^{8}N_k^e(\xi,\eta,\zeta)u_k^e \tag{7-189}$$

对应于点 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，在整体坐标系内，其坐标 x，y，z 为

$$x=\sum_{k=1}^{8}N_k^e x_k,\qquad y=\sum_{k=1}^{8}N_k^e y_k,\qquad z=\sum_{k=1}^{8}N_k^e z_k \tag{7-190}$$

式中 x_k，y_k，z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ 为整体坐标系内等参元 8 个节点的坐标值．下面来考察等参元的形状．

对于节点 k，在局部坐标系内其坐标为 (ξ_k, η_k, ζ_k)，把此值代入式 (7-190)，可得 $x=x_k$，$y=y_k$，$z=z_k$；这说明局部坐标系中的节点 k ($k=1, 2, \cdots, 8$)，经过坐标变换，确实变为整体坐标系中对应的各个节点. 至于棱边，以边$\overline{26}$为例，此边在局部坐标系中的方程式为 $\xi=1$，$\eta=1$. 由式 (7-190) 可知，变换到整体坐标系中时，此边的参数方程为：

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{8}\frac{1}{8}(1+\xi_k)(1+\eta_k)(1+\zeta_k\zeta)x_k = \frac{1}{2}(1-\zeta)x_2+\frac{1}{2}(1+\zeta)x_6 = \frac{x_2+x_6}{2}+\frac{x_6-x_2}{2}\zeta \\ y &= \sum_{k=1}^{8}\frac{1}{8}(1+\xi_k)(1+\eta_k)(1+\zeta_k\zeta)y_k = \frac{y_2+y_6}{2}+\frac{y_6-y_2}{2}\zeta \\ z &= \sum_{k=1}^{8}\frac{1}{8}(1+\xi_k)(1+\eta_k)(1+\zeta_k\zeta)z_k = \frac{z_2+z_6}{2}+\frac{z_6-z_2}{2}\zeta \end{aligned}\right\} \tag{7-191}$$

在整体坐标系中，它将表示一条通过点 2 和点 6 的直线；所以在整体坐标系中，单元亦具有直线棱边. 同理，基本元的其余各边亦将依次变换为整体坐标中的对应边. 这样，在整体坐标系中，等参元将是一个 8 节点直边六面体，如图 7-22 所示. 注意，局部坐标系内的每一侧平面经过等参变换，在整体坐标系中不一定仍是平面，而是由两族直线所组成的直纹面；如果此面上的 4 个顶点满足共面条件，则此面就是平面.

（三）六面体等参元中长度元和形状函数导数的变换

长度元的变换 为计算单元系数阵中各个元素的值，需将 x，y，z 的函数变换为 ζ，η，ζ 的函数，并在局部坐标系内进行计算. 利用微分的链形法则可知，

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta \end{aligned}\right\} \tag{7-192}$$

或

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \tag{7-193}$$

式中 $\mathbf{J}$ 称为雅可比矩阵；其元素为 J_{11}，J_{12}，$\cdots$，J_{33}

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \tag{7-194}$$

$$\left.\begin{aligned}
J_{11}&=\frac{\partial x}{\partial \xi}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \xi}x_k, \qquad J_{12}=\frac{\partial y}{\partial \xi}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \xi}y_k, \qquad J_{13}=\frac{\partial z}{\partial \xi}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \xi}z_k,\\
J_{21}&=\frac{\partial x}{\partial \eta}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \eta}x_k, \qquad J_{22}=\frac{\partial y}{\partial \eta}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \eta}y_k, \qquad J_{23}=\frac{\partial z}{\partial \eta}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \eta}z_k,\\
J_{31}&=\frac{\partial x}{\partial \zeta}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta}x_k, \qquad J_{32}=\frac{\partial y}{\partial \zeta}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta}y_k, \qquad J_{33}=\frac{\partial z}{\partial \zeta}=\sum_{k=1}^{8}\frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta}z_k.
\end{aligned}\right\} \tag{7-195}$$

这是 $d\zeta$，$d\eta$，$d\zeta$ 变换为 dx，dy，dz 时的变换公式.

体积元的变换为

$$dxdydz = Jd\zeta d\eta d\zeta \tag{7-196}$$

式中 J 为矩阵 $\mathbf{J}$ 的行列式，称为雅可比式；

$$J = \det\mathbf{J} = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} \tag{7-197}$$

为把 dx，dy，dz 变换为 $d\xi$，$d\eta$，$d\zeta$，需求式(7-193)的逆变换. 当 $J\neq 0$ 时，逆变换为

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T)^{-1}\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \tag{7-198}$$

和

$$\xi = \xi(x,y,z), \quad \eta = \eta(x,y,z), \quad \zeta = \zeta(x,y,z) \tag{7-199}$$

式中 $(\mathbf{J}^T)^{-1}$ 为 $\mathbf{J}^T$ 的逆矩阵；J_{11}^*，J_{12}^*，…，J_{33}^* 分别为 $\mathbf{J}^{-1}$ 的元素；

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} \tag{7-200}$$

$$\left.\begin{aligned}
J_{11}^* &= \frac{1}{J}(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}), \quad J_{12}^* = \frac{1}{J}(J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33}),\\
J_{33}^* &= \frac{1}{J}(J_{11}J_{22}\cdots, - J_{12}J_{21}).
\end{aligned}\right\} \tag{7-201}$$

从式(7-193)可见，$x=x(\xi,\eta,\zeta)$，$y=y(\xi,\eta,\zeta)$，$z=z(\xi,\eta,\zeta)$ 应为连续、可微，并可求逆；式(7-190)的变换满足这一要求，且保证单元与单元之间不会出现空隙，亦不会发生重叠.

形状函数导数的变换 在局部坐标系中，形状函数的导数是 $\frac{\partial N_k^e}{\partial \xi}$，$\frac{\partial N_k^e}{\partial \eta}$，$\frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta}$. 由于 ξ，η，ζ 是 x，y，z 的函数，所以

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_k^e}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\\
\frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_k^e}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}\\
\frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_k^e}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta}
\end{aligned}\right\} \tag{7-202}$$

或

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{7-203}$$

上式的逆变换为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{7-204}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} &= J_{11}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} + J_{13}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta} = B_k \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial y} &= J_{21}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} + J_{23}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta} = C_k \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial z} &= J_{31}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} + J_{32}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} + J_{33}^* \frac{\partial N_k^e}{\partial \zeta} = D_k \end{aligned}\right\} \tag{7-205}$$

同理，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_l^e}{\partial x} &= J_{11}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \eta} + J_{13}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \zeta} = B_l \\ \frac{\partial N_l^e}{\partial y} &= J_{21}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \eta} + J_{23}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \zeta} = C_l \\ \frac{\partial N_l^e}{\partial z} &= J_{31}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \xi} + J_{32}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \eta} + J_{33}^* \frac{\partial N_l^e}{\partial \zeta} = D_l \end{aligned}\right\} \tag{7-206}$$

（四）六面体单元各元素的计算公式

把式(7-205)和(7-206)代入式(7-135)、(7-143)和(7-151)，可得8节点六面体单元的单元系数阵中各元素的计算公式：

$$k_{lxkx}^e = k_{lyky}^e = k_{lzkz}^e$$

$$= \int_{V_e} \left[\nu_e \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} + \frac{\partial N_l^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \right) + j\omega\sigma_e N_l^e N_k^e \right] dxdydz$$

$$= \int_{V_e} \left[\nu_e (B_l B_k + C_l C_k + D_l D_k) + j\omega\sigma_e N_l^e N_k^e \right] J d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \tag{7-207}$$

式中

$$F(\xi,\eta,\zeta) = [\nu_e(B_iB_k + C_iC_k + D_iD_k) + j\omega\sigma_e N_i^e N_k^e]J \tag{7-208}$$

式(7-207)可用数值积分法算出其值.

对于一维函数 $F(\xi)$，其积分 $\int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi$ 可用下列高斯积分公式算出其值

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi = \sum_{m=1}^{M} F(\xi_m)W_m \tag{7-209}$$

式中 ξ_m 为积分点的坐标；W_m 为 m 点的权函数；M 为区间（−1，1）内求积点的总数；W 的值仅与积分点的个数和位置有关，而与函数 $F(\xi)$无关. 对于 $M=2$ 的情况，$\xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735$；$W_1 = W_2 = 1$.

对于 $F(\xi,\eta,\zeta)$在$-1 \leqslant (\xi,\eta,\zeta) \leqslant 1$ 的正方体中的体积分(三维积分)，可以将它化成

$$\begin{aligned}\int_V F(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta &= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta,\zeta)d\xi\right)d\eta\right]d\zeta \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\left(\sum_{m=1}^{M} F(\xi_m,\eta,\zeta)W_m\right)d\eta\right]d\xi \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} F(\zeta_m,\eta_n,\xi)W_mW_n\right]d\zeta \\ &= \sum_{p=1}^{P}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} F(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)W_mW_nW_p \end{aligned} \tag{7-210}$$

式中 M、N 和 P 分别为 ξ、η 和 ζ 三个方向上的求积点数；ξ_m、η_n 和 ζ_p 为求积点的坐标；W_m、W_n 和 W_p 为相应的权函数. 对于 8 节点六面体单元，通常取 $M=N=P=2$，共 8 个积分点；积分点的坐标为 $\xi_1=\eta_1=\zeta_1=0.57735$，$\xi_2=\eta_2=\zeta_2=-0.57735$；此时权函数均为 1.

这样，式(7-207)就可以写成

$$\begin{aligned} k_{ixkx}^e &= k_{iyky}^e = k_{izkz}^e \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\nu_e(B_iB_k + C_iC_k + D_iD_k) + j\omega\sigma_e N_i^e N_k^e]Jd\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}[\nu_e(B_iB_k + C_iC_k + D_iD_k)J + j\omega\sigma_e N_i^e N_k^e J]_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \end{aligned} \tag{7-211}$$

同理，

$$\begin{aligned} k_{ikkk}^e &= j\omega\sigma_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\right)dV \\ &= j\omega\sigma_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}[(B_iB_k + C_iC_k + D_iD_k)J]_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \end{aligned} \tag{7-212}$$

$$
\left.\begin{aligned}
k^e_{lxky} &= -k^e_{lykx} = \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}-\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\right)dV \\
&= \nu_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{2}[(B_lC_k-C_lB_k)J]_{\xi_m,\eta_n,\zeta_p} \\
k^e_{lxkz} &= -k^e_{lzkx} = \nu_e\int_{V_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}-\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial x}\right)dV \\
&= \nu_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}[(B_lD_k-D_lB_k)J]_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \\
k^e_{lykz} &= -k^e_{lzky} = \nu_e\int_{V}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial y}\frac{\partial N^e_k}{\partial z}-\frac{\partial N^e_l}{\partial z}\frac{\partial N^e_k}{\partial y}\right)dV \\
&= \nu_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}[(C_lD_k-D_lC_k)J]_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)}
\end{aligned}\right\} \tag{7-213}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
k^e_{lxk\phi} &= j\omega\sigma_e\int_{V_e}N^e_l\frac{\partial N^e_k}{\partial x}dV = j\omega\sigma_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_lB_kJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \\
k^e_{lyk\phi} &= j\omega\sigma_e\int_{V_e}N^e_l\frac{\partial N^e_k}{\partial y}dV = j\omega\sigma_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_lC_kJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \\
k^e_{lzk\phi} &= j\omega\sigma_e\int_{V_e}N^e_l\frac{\partial N^e_k}{\partial z}dV = j\omega\sigma_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_lD_kJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)}
\end{aligned}\right\} \tag{7-214}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
k^e_{l\phi kx} &= j\omega\sigma_e\int_{V_e}N^e_k\frac{\partial N^e_l}{\partial x}dV = j\omega\sigma_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_kB_lJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \\
k^e_{l\phi ky} &= j\omega\sigma_e\int_{V_e}N^e_k\frac{\partial N^e_l}{\partial y}dV = j\omega\sigma_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_kC_lJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \\
k^e_{l\phi kz} &= j\omega\sigma_e\int_{V_e}N^e_k\frac{\partial N^e_l}{\partial z}dV = j\omega\sigma_e\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_kD_lJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)}
\end{aligned}\right\} \tag{7-215}
$$

右端项列向量的元素为

$$
\left.\begin{aligned}
f^e_{lx} &= j^e_{sx}\int_{V_e}N^e_ldV = j^e_{sx}\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_lJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \\
f^e_{ly} &= j^e_{sy}\int_{V_e}N^e_ldV = j^e_{sy}\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_lJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)} \\
f^e_{lz} &= j^e_{sz}\int_{V_e}N^e_ldV = j^e_{sz}\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(N^e_lJ)_{(\xi_m,\eta_n,\zeta_p)}
\end{aligned}\right\} \tag{7-216}
$$

7-8 $\mathbf{T},\Omega$ -Ω 法的有限元离散

若整个求解域为 V，其外边界为 S_B 和 S_H，V 中包括电流区 V_1 和无电流区 V_2，其交界面为 S_{12}，如图 7-16 所示. 采用 $\mathbf{T},\Omega$ -Ω 法时，三维正弦涡流场问题可表示为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\rho\nabla\times\dot{\mathbf{T}}-\nabla(\rho\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}})+j\omega\mu\dot{\mathbf{T}}-j\omega\mu\nabla\dot{\Omega}=0, \quad \text{在 } V_1 \text{ 内} \\
&\nabla\cdot\mu(\dot{\mathbf{T}}-\nabla\dot{\Omega})=0, \quad \text{在 } V \text{ 内}
\end{aligned}\right\} \tag{7-217}
$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\Omega}=\dot{\Omega}_0, \quad \text{在 } S_H \text{ 上}\\&\frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial n}=0, \quad \text{在 } S_B \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{7-218}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\Omega}_1=\dot{\Omega}_2,\\&[\mu_1(\dot{\mathbf{T}}-\nabla\dot{\Omega}_1)-\mu_2(-\nabla\dot{\Omega}_2)]\cdot\mathbf{n}_{12}=0,\\&\rho\nabla\cdot\mathbf{T}=0, \quad \mathbf{n}\times\mathbf{T}=0.\end{aligned}\right\} \quad \text{在 } S_{12} \text{ 上} \tag{7-219}$$

其中 $\dot{\mathbf{T}}$为分区定义，在 V_2 内 $\dot{\mathbf{T}}=0$. 下面用伽辽金法来建立式(7-217)—(7-219)的有限元方程.

把 V_1 内的向量电位 $\dot{\mathbf{T}}$和 V 内的标量电位 $\dot{\Omega}$用形状函数表示为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{T}}=\sum_{k=1}^{N}(N_k\dot{T}_{kx}\mathbf{i}+N_k\dot{T}_{ky}\mathbf{j}+N_k\dot{T}_{kz}\mathbf{k})=\sum_k\mathbf{N}_k\dot{T}_w, w=x,y,z\\&\dot{\Omega}=\sum_{k=1}^{N}N_k\dot{\Omega}_k\end{aligned}\right\} \tag{7-220}$$

式中 N_k 为节点 k 的整体形状函数；$\mathbf{N}_k$ 为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{N}_k&=N_k\mathbf{i}, \quad w=x \text{ 时};\\&=N_k\mathbf{j}, \quad w=y \text{ 时};\\&=N_k\mathbf{k}, \quad w=z \text{ 时};\end{aligned}\right\} \tag{7-221}$$

分别以 $\mathbf{N}_i$ 和 N_i 为权函数，使式 (7-217) 中的两个方程的加权积分为零，可得

$$\int_{V_1}\mathbf{N}_i\cdot[\nabla\times\rho\nabla\times\dot{\mathbf{T}}-\nabla(\rho\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}})+j\omega\mu\dot{\mathbf{T}}-j\omega\mu\nabla\dot{\Omega}]dV=0 \tag{7-222}$$

$$\int_{V_1}N_i\nabla\cdot\mu(\dot{\mathbf{T}}-\nabla\dot{\Omega})dV=0 \tag{7-223}$$

再利用高斯定理和向量分析的有关公式；式(7-222)和(7-223)可变换成

$$\int_{V_1}[\nabla\times\mathbf{N}_i\cdot\rho\nabla\times\dot{\mathbf{T}}+\nabla\cdot\mathbf{N}_i(\rho\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}})+j\omega\mu\mathbf{N}_i\cdot\dot{\mathbf{T}}-j\omega\mu\mathbf{N}_i\nabla\dot{\Omega}]dV$$
$$+\int_{S_{12}}\rho\nabla\times\dot{\mathbf{T}}\cdot(\mathbf{N}_i\times\mathbf{n})dS-\int_{S_{12}}\rho\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}}\,\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{n}dS=0 \tag{7-224}$$

$$\int_V\nabla N_i\mu(\dot{\mathbf{T}}-\nabla\dot{\Omega})dV-\int_{S_{12}}N_i\mu_1(\dot{\mathbf{T}}-\nabla\dot{\Omega})\cdot\mathbf{n}dS+\int_{S_{12}}N_i\mu_2(-\nabla\dot{\Omega}_2)\cdot\mathbf{n}dS$$
$$-\int_{SH}N_i\mu(-\nabla\dot{\Omega})\cdot\mathbf{n}dS-\int_{S_B}N_i\mu(-\nabla\dot{\Omega})\cdot\mathbf{n}dS=0 \tag{7-225}$$

根据加权余量法的性质，由边界条件(7-218)中的第一式和交界面条件(7-219)中的第四式，可知

$$\left.\begin{aligned}&N_i=0, \quad \text{在 } S_H \text{ 上}\\&\mathbf{n}\times\mathbf{N}_i=0, \quad \text{在 } S_{12} \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{7-226}$$

由式(7-226)中的第二式和式(7-219)中的第三式，可知式(7-224)中第一和第二个面积分分别为零；由式(7-219)中的第二式，可知式(7-225)中 S_{12} 上的两项面积分互相抵消；由式

(7-226)中的第一式，可知式(7-225)中的第三项面积分为零；由式(7-218)中的第二式，可知式(7-225)中的第四项面积分为零．这样，式(7-224)和(7-225)最后将简化为

$$\int_{V_1}[\nabla\times\mathbf{N}_i\times\rho\nabla\times\dot{\mathbf{T}}+\nabla\cdot\mathbf{N}_i(\rho\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}})+j\omega\mu\mathbf{N}_i\cdot\dot{\mathbf{T}}-j\omega\mu\mathbf{N}_i\cdot\nabla\dot{\Omega}]dV=0 \tag{7-227}$$

$$\int_V\nabla N_i\cdot\mu(\dot{\mathbf{T}}-\nabla\dot{\Omega})dV=0 \tag{7-228}$$

此时边界条件 $\Omega=\Omega_0$（在 S_H 上）和 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{T}}=0$（在 S_{12} 上）将作为强加边界条件列出，其余均为自然边界条件．

把式(7-227)和(7-228)改写成 V_1 和 V 内各个单元上的积分之和，可得

$$\sum_{e=1}^{E_1}\int_{V_e}[\nabla\times\mathbf{N}_i\cdot\rho\nabla\times\dot{\mathbf{T}}+\nabla\cdot\mathbf{N}_i(\rho\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}})+j\omega\mu\mathbf{N}_i\cdot\dot{\mathbf{T}}-j\omega\mu\mathbf{N}_i\cdot\nabla\dot{\Omega}]dV=0 \tag{7-229}$$

$$\sum_{e=1}^{E_1}\int_{V_e}\nabla N_i\cdot\mu(\dot{\mathbf{T}}-\nabla\dot{\Omega})dV=0 \tag{7-230}$$

式中 E_1 和 E 分别为 V_1 和 V 内的单元总数．再引入单元形状函数 N_i^e，并把单元 e 内的 $\dot{\mathbf{T}}^e$ 和 $\dot{\Omega}^e$ 表示为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}}^e&=\sum_{k=1}^{n}(N_k^e\dot{T}_{kx}^e\mathbf{i}+N_k^e\dot{T}_{ky}^e\mathbf{j}+N_k^e\dot{T}_{kz}^e\mathbf{k})\\ \dot{\Omega}^e&=\sum_{k=1}^{n}N_k^e\dot{\Omega}_k^e\end{aligned}\right\} \tag{7-231}$$

把上式代入式(7-229)和(7-230)，经过运算，可得一形如式(7-164)的代数方程组；并可按与 $\mathbf{A},\varphi$-$\mathbf{A}$ 法类似的办法求得单元系数矩阵、单元右端项列向量及其各个元素的计算式．两者的差别在于，用 $\mathbf{A}$-φ 表述时，V_2 内有 $\dot{A}$ 而没有 $\dot{\varphi}$，系数阵的元素为 3×3 的子矩阵；用 $\mathbf{T}$-Ω 表述时，V 内只有 $\dot{\Omega}$，系数阵的元素只是一个数．

7-9 三维正弦涡流问题中边界条件的确定

（一）三维问题的边界条件

三维正弦涡流问题的边界条件一般较难给定．对于外边界，通常近似作为 $\mu=\infty$，$\sigma=0$ 边界；$\sigma=\infty$ 边界或者无穷远条件来处理．

$\mu=\infty$，$\sigma=0$ 边界 对于这类边界面（S_H 边界面），由于 $\sigma=0$，故不存在涡流；由于 $\mu=\infty$，所以磁场应垂直地进入边界面，即磁场强度的切向分量 $\dot{\mathbf{H}}_t=0$；或

$$\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{H}}=0 \tag{7-232}$$

用向量磁位表示时，有

$$\frac{\partial \dot{A}_n}{\partial \tau}-\frac{\partial \dot{A}_\tau}{\partial n}=0,\qquad \frac{\partial \dot{A}_t}{\partial n}-\frac{\partial \dot{A}_n}{\partial t}=0 \tag{7-233}$$

式中 n 为边界面上的法向，τ 和 t 为切向，如图 7-23 所示.

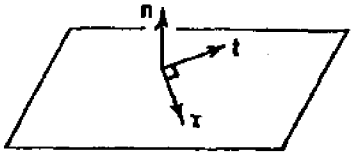


图 7-23　边界面上的法向和切向

若 S_H 面上再给定

$$\mathbf{n}\cdot\dot{A}=0 \tag{7-234}$$

即在 S_H 上$\dot{A}$的法向分量处处为零，则 $\dot{A}_n$ 在 S_H 上任一方向的变化率为零

$$\frac{\partial \dot{A}_n}{\partial t}=\frac{\partial \dot{A}_n}{\partial \tau}=0 \tag{7-235}$$

把式 (7-235) 和 (7-233) 结合在一起，可知

$$\frac{\partial \dot{A}_t}{\partial n}=\frac{\partial \dot{A}_\tau}{\partial n}=0 \tag{7-236}$$

所以 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{H}}=0$ 和 $\mathbf{n}\cdot\dot{A}=0$ 这两个条件亦可以表示为

$$\mathbf{n}\cdot\dot{A}=0,\qquad \frac{\partial \dot{A}_l}{\partial n}=0\quad (l=t,\tau) \tag{7-237}$$

$\sigma=\infty$边界　这是一种超导边界面 (S_B 边界面). 当有任何法向时变磁场进入此面时，边界面内即会感应涡流，把进入的法向磁场排挤出去，结果使 S_B 的表面只存在磁场的切向分量，而没有法向分量；即

$$\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{B}}=0 \tag{7-238}$$

由于 $\int_S \dot{\mathbf{B}}\cdot d\mathbf{S}=\oint_C \dot{A}\cdot d\mathbf{l}$，所以从上式可以推得，在 S_B 面上，$\dot{A}$的切向分量处处为零；即

$$\mathbf{n}\times\dot{A}=0 \tag{7-239}$$

由此，在 S_B 面亦有

$$\frac{\partial \dot{A}_t}{\partial t}=\frac{\partial \dot{A}_\tau}{\partial \tau}=0 \tag{7-240}$$

若再在 S_B 面上规定 $\nabla\cdot\dot{A}=0$，由于 $\nabla\cdot\dot{A}=\frac{\partial \dot{A}_n}{\partial n}+\frac{\partial \dot{A}_t}{\partial t}+\frac{\partial \dot{A}_\tau}{\partial \tau}$，于是在式 (7-240) 的前提下，可知

$$\frac{\partial \dot{A}_n}{\partial n}=0 \tag{7-241}$$

所以 $\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{B}}=0$ 和 $\nabla\cdot\dot{A}=0$ 这两个条件亦可以表示为

$$\mathbf{n}\times\dot{A}=0,\quad \frac{\partial \dot{A}_n}{\partial n}=0 \tag{7-242}$$

无穷远边界面　若把边界面近似看作为无穷远边界，则有

$$\dot{\mathbf{B}}=0,\qquad \dot{A}=0,\qquad \dot{\varphi}=0 \tag{7-243}$$

有些边界面是对称面. 对于这些面可以利用对称关系来给出其边界条件. 下面用一个简单例子来说明三维正弦涡流问题中边界条件的确定.

（二）边界条件确定示例

图 7-24 表示一个由载流线圈、导电体（包括外壳、线圈心柱）和空气组成的三维计算模型. 由于对称性，实际计算时可以取模型的$\frac{1}{8}$作为计算场域，如图 7-25 所示. 计算场域的边界由 6 个平面构成，其中 $x=b$，$y=b$，$z=h$ 等 3 个平面是外壳表面；$x=0$，$y=0$ 和 $z=0$ 等三个平面则是对称面. 由于外壳为普通钢板，既导电又导磁，故可以认为外壳表面上的磁场与电场无泄漏，即 $x=b$，$y=b$，$z=h$ 三个表面可按无穷远边界处理. 对 3 个对称面，根据场域的几何形状、源电流和介质的分布情况，可先写出场量 $\dot{\mathbf{B}}$，$\dot{\mathbf{H}}$和 $\dot{\mathbf{J}}$的边界条件；再根据电磁位的定义、基本算式和对称性，进一步确定其边界条件. 表 7-1 分别列出了各边界面上场向量和电磁位的边界条件.

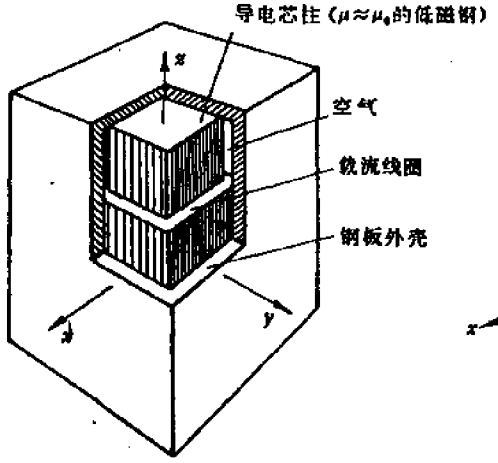


图 7-24　三维正弦涡流场问题的计算模型

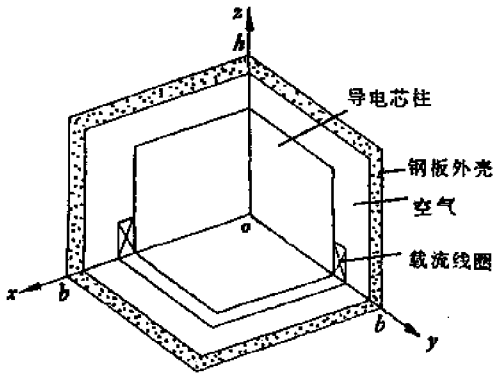


图 7-25　计算场域（模型的$\frac{1}{8}$）

表 7-1　模型题各边界上的边界条件

边界面 \ 边界条件 \ 位量		场向量 $\dot{\mathbf{B}}$，$\dot{\mathbf{H}}$，$\dot{\mathbf{J}}$	$\dot{A}$，φ-$\dot{A}$法		$\dot{\mathbf{T}}$，$\dot{\Omega}$-$\dot{\Omega}$法	
			$\dot{A}$	$\dot{\phi}$	$\dot{\mathbf{T}}$	$\dot{\Omega}$
对称面	$x=0$ 平面	$\dot{B}_n=0$，$\dot{J}_t=0$	$\dot{A}_y=\dot{A}_z=0$	$\dot{\varphi}=0$	$\dot{T}_x=0$	$\frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial n}=0$
	$y=0$ 平面	$\dot{B}_n=0$，$\dot{J}_t=0$	$\dot{A}_x=\dot{A}_z=0$	$\dot{\varphi}=0$	$\dot{T}_y=0$	$\frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial n}=0$
	$z=0$ 平面	$\dot{H}_t=0$，$\dot{J}_n=0$	$\dot{A}_z=0$	$\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial n}$	$\dot{T}_x=\dot{T}_y=0$	$\dot{\Omega}=0$
外边界	$x=b$ 平面 $y=b$ 平面 $z=h$ 平面	$\dot{\mathbf{B}}=0$，$\dot{\mathbf{J}}=0$	$\dot{A}=0$	$\dot{\varphi}=0$	$\dot{\mathbf{T}}=0$	$\dot{\Omega}=0$
导体与非导体的交界面		$\dot{J}_n=0$			$\dot{\mathbf{T}}_t=0$	

该问题可用 $\mathbf{A},\varphi$-$\mathbf{A}$ 法或 $\mathbf{T},\Omega$-Ω 法来计算. 用 $\mathbf{T},\Omega$-Ω 法求解时，由于源电流区的作用单独处理，因而在确定 $z=0$ 平面上 $\dot{\Omega}$的边界条件时，可以不考虑源电流的影响. 图 7-26 表示根据计算结果所画出的对称面上的磁场分布，图 7-27 示出了导电心柱中位于对称平面及上表面处电流密度的分布.

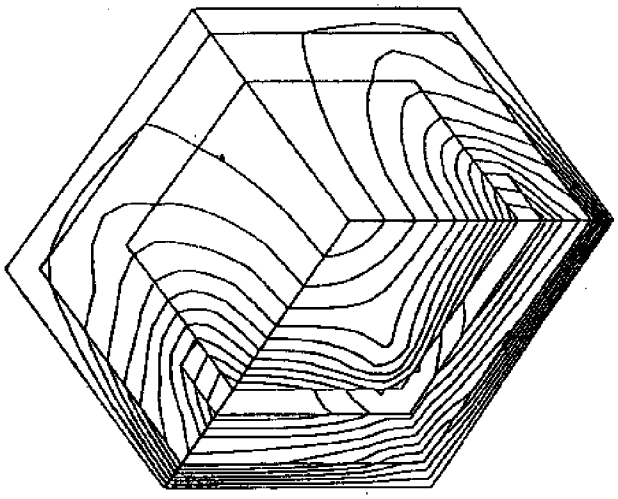


图 7-26 对称平面上的磁场分布

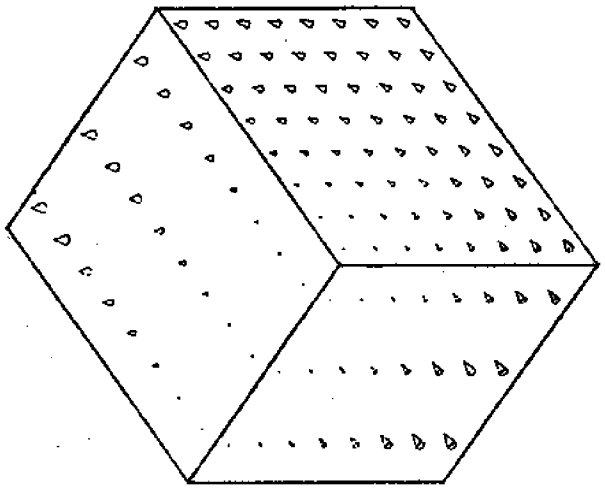


图 7-27 导电心柱中位于对称平面和上表面处电密的分布

7-10 准三维行波电磁场的 $\mathbf{A}$，φ 表述[31—34]

在研究汽轮发电机的端部磁场或实心转子感应电机内的三维电磁场时，磁场或电磁

位沿周向的变化规律常常可以近似看作为一个正弦分布的行波场．在阐明三维正弦涡流场的基础上，本节和下节将进一步研究准三维行波电磁场问题的泛函、变分及其有限元离散．

（一）三维正弦涡流场的复泛函

对于图 7-15 所示三维场域，若场量和电磁位随时间正弦变化，则从 7-6 节可知，$\dot{A}$、$\dot{\varphi}$所满足的微分方程为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\nu(\nabla\times\dot{A})-\nabla(\nu\nabla\cdot\dot{A})+j\omega\sigma\dot{A}+\sigma\nabla\dot{\varphi}=\dot{\mathbf{J}}_s\\&-\nabla\cdot\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{7-244}$$

式中 $\dot{\mathbf{J}}_s$、σ 和 ν 分区来定义．若问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{B}}=0,\quad \nabla\cdot\dot{A}=0 &&\text{在 } S_B \text{ 上}\\&\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{H}}=0,\quad \mathbf{n}\cdot\dot{A}=0 &&\text{在 } S_H \text{ 上}\end{aligned}\right\}\tag{7-245}$$

上述条件亦可以改写成

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}\times\dot{A}=0, &&\frac{\partial\dot{A}_n}{\partial n}=0 &&\text{在 } S_B \text{ 上}\\&\mathbf{n}\cdot\dot{A}=0, &&\frac{\partial\dot{A}_t}{\partial n}=\frac{\partial\dot{A}_n}{\partial l}=0\quad(l=t,\tau) &&\text{在 } S_H \text{ 上}\end{aligned}\right\}\tag{7-246}$$

交界面条件为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{A}_1=\dot{A}_2,\quad \nu_1(\nabla\times\dot{A}_1)\times\mathbf{n}_{12}=\nu_2(\nabla\times\dot{A}_2)\times\mathbf{n}_{12}\\&\mathbf{n}_{12}\cdot(j\omega\dot{A}_1+\operatorname{grad}\dot{\varphi}_1)=0\end{aligned}\right\}\tag{7-247}$$

可以证明，与上述齐次边界条件的边值问题相应的复泛函为：

$$I=\int_V\left[\frac{1}{2}\nu(\nabla\times\dot{A})^2+\frac{1}{2}\nu(\nabla\cdot\dot{A})^2+\frac{1}{2}j\omega\sigma\dot{A}^2\right.$$
$$\left.-\dot{A}\cdot\dot{\mathbf{J}}_s+\sigma\dot{A}\cdot\nabla\dot{\varphi}+\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega}\sigma(\nabla\dot{\varphi})^2\right]dV\tag{7-248}$$

复泛函 I 的变分 δI 为

$$\begin{aligned}\delta I=&\int_V[\nabla\times(\nu\nabla\times\dot{A})-\nabla(\nu\nabla\cdot\dot{A})+j\omega\sigma\dot{A}-\dot{\mathbf{J}}_s+\sigma\nabla\dot{\varphi}]\cdot\delta\dot{A}\,dV\\&-\int_V\nabla\cdot\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\delta\dot{\varphi}\,dV+\int_S(\nu\nabla\times\dot{A}\times\mathbf{n})\cdot\delta\dot{A}\,dS\\&+\int_S(\nu\nabla\cdot\dot{A})\mathbf{n}\cdot\delta\dot{A}\,dS+\int_S\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\cdot\mathbf{n}\delta\dot{\varphi}\,dS\end{aligned}\tag{7-249}$$

当 $\delta I=0$ 时，由于 $\delta\dot{A}$和 $\delta\dot{\varphi}$的任意性，可得 $\dot{A}$和 $\dot{\varphi}$所满足的微分方程（7-244）和边界条件（7-245）．

由于边界条件为齐次，所以式（7-249）亦可以写成

$$\delta I=\int_V[\nabla\times(\nu\nabla\times\dot{A})-\nabla(\nu\nabla\cdot\dot{A})+j\omega\sigma\dot{A}-\dot{\mathbf{J}}_s+\sigma\nabla\dot{\varphi}]\cdot\delta\dot{A}\,dV$$

$$-\int_v \nabla\cdot\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}V\right)\delta\dot{\varphi}\,dV \tag{7-250}$$

不难看出，把式(7-250)中的 $\delta\dot{A}$ 换成 $\mathbf{N}_k$，$\delta\dot{\varphi}$ 换成 N_i，则当 $\delta I=0$ 时，式(7-250)将成为加权余量法的式(7-114)和(7-119). 所以在存在泛函的情况下，变分方法和加权余量法是等价的；由泛函变分所得的离散结果与加权余量法所得的结果是相同的.

（二）行波电磁场问题的泛函和变分

图 7-28 表示一台汽轮发电机的端部场域，图中定子绕组端部为源电流区，$\sigma=0$；压

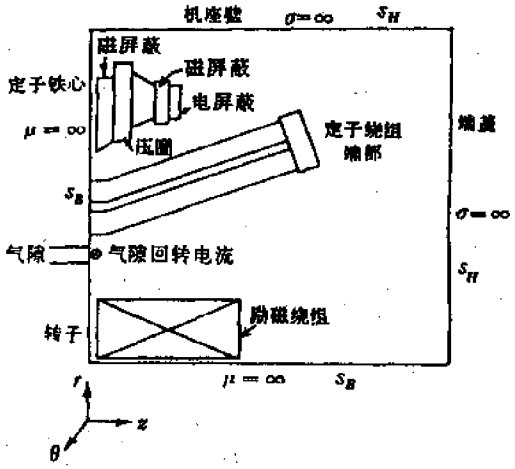


图 7-28　汽轮发电机的端部场域

圈、采用圆柱坐标系时，绕组端部的基波源电流密度 $\mathbf{J}_s$ 是一个沿着圆向方向以同步速度推移的行波，$\mathbf{J}_s$ 可表示为

$$\mathbf{J}_s=\mathrm{Re}\left[(\dot{J}'_{sr}\mathbf{a}_r+j\dot{J}'_{s\theta}\mathbf{a}_\theta+\dot{J}'_{sz}\mathbf{a}_z)e^{j(\omega t-p\theta)}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{J}}_s(r,\theta,z)e^{j\omega t}\right] \tag{7-251}$$

式中 p 为极对数；$\dot{\mathbf{J}}_s$ 为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{J}}_s(r,\theta,z)&=(\dot{J}'_{sr}\mathbf{a}_r+jJ'_{s\theta}\mathbf{a}_\theta+\dot{J}'_{sz}\mathbf{a}_z)e^{-jp\theta}=\dot{\mathbf{J}}'_s(r,z)e^{-jp\theta}\\ \dot{\mathbf{J}}'_s(r,z)&=\dot{J}'_{sr}\mathbf{a}_r+jJ'_{s\theta}\mathbf{a}_\theta+\dot{J}'_{sz}\mathbf{a}_z\end{aligned}\right\} \tag{7-252}$$

由于 $\dot{\mathbf{J}}_s$ 是一个行波，因此认为被源电密所感生和激励的 $\dot{A}$ 和 $\dot{\varphi}$ 亦是行波场；

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\left[\dot{A}(r,\theta,z)e^{j\omega t}\right] \tag{7-253}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\dot{A}(r,\theta,z)&=(\dot{A}'_r\mathbf{a}_r+j\dot{A}'_\theta\mathbf{a}'_\theta+\dot{A}'_z\mathbf{a}_z)e^{-jp\theta}=\dot{A}'(r,z)e^{-jp\theta}\\ \dot{A}'(r,z)&=\dot{A}'_r\mathbf{a}_r+j\dot{A}'_\theta\mathbf{a}_\theta+\dot{A}'_z\mathbf{a}_z\end{aligned}\right\} \tag{7-254}$$

$$\varphi=\mathrm{Re}\left[\dot{\varphi}(r,\theta,z)e^{j\omega t}\right] \tag{7-255}$$

其中

$$\dot{\varphi}(r,\theta,z)=\dot{\varphi}'(r,z)e^{-jp\theta} \tag{7-256}$$

于是

$$\begin{aligned}\nabla\times\nu\nabla\times\dot{A}=&\left\{\left[\nu\frac{p}{r^2}\left(\dot{A}'_\theta+r\frac{\partial\dot{A}_z}{\partial r}+p\dot{A}'_r\right)-\nu\left(\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial z\partial r}\right)\right]\mathbf{a}_r\right.\\&+j\left[\nu\frac{p}{r^2}\left(\dot{A}'_r-r\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}\right)-\nu\left(-\frac{\dot{A}'_\theta}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial z^2}+\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial z}\right)\right]\mathbf{a}_\theta\\&\left.+\left[\nu\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial z}+r\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial r\partial z}+p\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial z}+\frac{p^2}{r}\dot{A}'_z-\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial r}-r\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial r^2}\right)\right]\mathbf{a}_z\right\}e^{-jp\theta}\\=&(\nabla\times\nu\nabla\times\dot{A})_m e^{-jp\theta}\end{aligned} \tag{7-257}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nu\nabla\cdot\dot{A})=&\left\{\nu\left(-\frac{1}{r^2}\dot{A}'_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial r^2}-\frac{p}{r^2}\dot{A}'_\theta+\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial r\partial z}\right)\mathbf{a}_r\right.\\&-j\nu\frac{p}{r}\left(\frac{1}{r}\dot{A}'_r+\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{p}{r}\dot{A}'_\theta+\frac{\partial A'_z}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\theta+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial z}+\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial z\partial r}\right.\\&\left.\left.+\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial z}+\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{a}_z\right\}e^{-jp\theta}=(\nabla\nu\nabla\cdot\dot{A})_m e^{-jp\theta}\end{aligned} \tag{7-258}$$

$$\begin{aligned}\sigma\nabla\dot{\varphi}=&\sigma\left\{\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}\mathbf{a}_r-j\frac{p}{r}\dot{\varphi}'\mathbf{a}_\theta+\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial z}\mathbf{a}_z\right\}e^{-jp\theta}\\=&(\sigma\nabla\dot{\varphi})_m e^{-jp\theta}\end{aligned} \tag{7-259}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)=&\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sigma\left(\dot{A}'_r+\frac{1}{j\omega}\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}\right)\right]+\frac{p}{r}\left[\sigma\left(\dot{A}'_\theta-\frac{1}{j\omega}\frac{p}{r}\dot{\varphi}'\right)\right]\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma\left(\dot{A}'_z+\frac{1}{j\omega}\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial z}\right)\right]\right\}e^{-jp\theta}\\=&\left[\nabla\cdot\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right]_m e^{-jp\theta}\end{aligned} \tag{7-260}$$

式(7-257)—(7-260)中带有下标 m 的式子 $(\)_m$ 表示各个相应的大括号内的表达式，它们仅是 r，z 的函数，它们亦是式 (7-257) — (7-260) 这 4 个式子在 $\theta=0$ 这个平面内的表达式.

把式(7-257)—(7-260)代入式(7-250)，可得

$$\begin{aligned}\delta I=&\int_V\left[(\nabla\times\nu\nabla\times\dot{A})_m-(\nabla\nu\nabla\cdot\dot{A})_m+j\omega\sigma\dot{A}'-\dot{\mathbf{J}}'_s+\sigma\nabla\dot{\varphi}'\right]e^{-jp\theta}\\&\cdot\delta(\dot{A}'e^{-jp\theta})dV-\int_V\left[\nabla\cdot\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right]_m e^{-jp\theta}\delta(\dot{\varphi}e^{-jp\theta})dV\end{aligned} \tag{7-261}$$

取 $\theta=0$ 的平面（即场的幅值平面 D）内的 δI（记作 δI_D），有

$$\begin{aligned}\delta I_D=&\int_D\left[(\nabla\times\nu\nabla\times\dot{A})_m-(\nabla\nu\nabla\cdot\dot{A})_m+j\omega\sigma\dot{A}'-\dot{\mathbf{J}}'_s+\sigma\nabla\dot{\varphi}'\right]\cdot\delta\dot{A}'2\pi rdrdz\\&-\int_D\left[\nabla\cdot\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right]_m\delta\dot{\varphi}2\pi rdrdz\end{aligned} \tag{7-262}$$

当 $\delta I_D=0$ 时，由于 $\delta\dot{A}'$ 和 $\delta\dot{\varphi}$ 的任意性，可知其欧拉方程即为行波电磁场方程

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla\times\nu\nabla\times A\dot{A})_m-(\nabla\nu\nabla\cdot\dot{A})_m+j\omega\sigma\dot{A}'-\dot{J}'_s+\sigma\nabla\dot{\varphi}'=0\\&\left[\nabla\cdot\sigma\left(\dot{A}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right]_m=0\end{aligned}\right\}\tag{7-263}$$

把式(7-262)改写成

$$\delta I_D=\int_D[Y_r\delta\dot{A}'_r+Y_\theta\delta(j\dot{A}'_\theta)+Y_z\delta\dot{A}'_z+Y_\varphi\delta\dot{\varphi}']2\pi r dr dz\tag{7-264}$$

其中 Y_r，Y_θ 和 Y_z 分别为式（7-263）中第一式的 r，θ，和 z 分量；Y_φ 为第二个式子：

$$\left.\begin{aligned}Y_r&=\nu\left[\frac{p^2+1}{r^2}\dot{A}'_r-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial z^2}\right)+\frac{2p}{r^2}\dot{A}'_\theta\right]+j\omega\sigma\dot{A}'_r+\sigma\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}-\dot{J}'_{sr}\\Y_\theta&=j\left\{\nu\left[\frac{2p}{r^2}\dot{A}'_r+(1+p^2)\frac{\dot{A}'_\theta}{r^2}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial z^2}\right)\right]+j\omega\sigma\dot{A}'_\theta-\frac{p}{r}\sigma\dot{\varphi}'-\dot{J}'_{s\theta}\right\}\\Y_z&=\nu\left[\frac{p^2}{r^2}\dot{A}'_z-\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial r}-\left(\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial z^2}\right)\right]+j\omega\sigma\dot{A}'_z+\sigma\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial z}-\dot{J}'_{sz}\\Y_\varphi&=-\sigma\left[\frac{1}{r}\dot{A}'_r+\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{p}{r}\dot{A}'_\theta+\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial z}+\frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{\varphi}'}{\partial r^2}-\frac{p^2}{r^2}\dot{\varphi}'+\frac{\partial^2\dot{\varphi}'}{\partial z^2}\right)\right]\end{aligned}\right\}\tag{7-265}$$

当 $\delta I_D=0$ 时，可得

$$\left.\begin{aligned}&\int_D Y_r\delta\dot{A}'_r r dr dz=0\\&\int_D Y_\theta\delta(j\dot{A}'_\theta)r dr dz=0\\&\int_D Y_z\delta\dot{A}'_z r dr dz=0\\&\int_D Y_\varphi\delta\dot{\varphi}r dr dz=0\end{aligned}\right\}\tag{7-266}$$

7-11 准三维行波电磁场问题的有限元离散[30—34]

接下来就是对式(7-266)进行有限元离散．在离散前先进行变量变换．

(一) 变量变换

引入 $\dot{A}_R$，$\dot{A}_P$ 和 $\dot{A}_Z$，使

$$\dot{A}_R=r\dot{A}'_r,\qquad \dot{A}_P=r\dot{A}'_\theta,\qquad \dot{A}_Z=r\dot{A}'_z\tag{7-267}$$

于是式(7-266)中的第一式可改写成

$$\begin{aligned}\int_D Y_r\delta\dot{A}'_r r dr dz=\int_D\Big\{&\nu\left[\frac{p^2}{r^2}(r\dot{A}'_r)+r\left(\frac{\dot{A}'_r}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}-\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial r^2}\right)+\frac{2p}{r^2}(r\dot{A}'_\theta)\right.\\&\left.-r\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial z^2}\right]+j\omega\sigma r\dot{A}'_r+\sigma r\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}-r\dot{J}'_{sr}\Big\}\delta\dot{A}'_r dr dz\end{aligned}\tag{7-268}$$

根据格林公式，

$$\int_D\nu r\left(\frac{\dot{A}'_r}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}-\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial r^2}\right)\delta\dot{A}'_r dr dz=-\int_D\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}_R}{\partial r}\right)\delta\dot{A}_R dr dz$$

$$=-\int_D \nu \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}\delta\left(\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}\right)drdz+\oint_l \nu \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}\delta \dot{A}_R dz \tag{7-269}$$

$$-\int_D \nu r\frac{\partial^2 \dot{A}'_r}{\partial z^2}\delta \dot{A}'_r drdz=-\int_D \nu \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \dot{A}'_R}{\partial z^2}\delta \dot{A}_R drdz$$

$$\int_D \nu \frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}\frac{1}{r}\delta\left(\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}\right)drdz-\oint_l \nu \frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}\frac{1}{r}\delta \dot{A}_R dr \tag{7-270}$$

其中 l 为平面 D 的周界（图 7-29）；而

$$\oint_l \nu \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}\delta \dot{A}_R dz=\int_{l_1} \nu \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}\delta \dot{A}_R dz+\int_{l_3} \nu \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}\delta \dot{A}_R dz=0$$

$$\oint_l \nu \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}\delta \dot{A}_R dr=\int_{l_2} \nu \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}\delta \dot{A}_R dr+\int_{l_4} \nu \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}\delta A_R dr=0$$

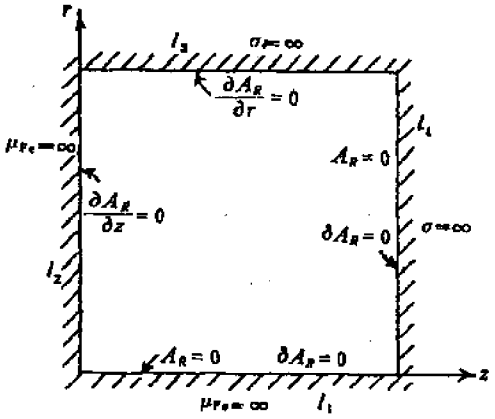


图 7-29　边界 l 上的 $\delta \dot{A}_R$，$\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}$

因为在 l_1 上，$\delta \dot{A}_R=0$；在 l_3 上，$\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}=0$；在 l_2 上，$\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}=0$；在 l_4 上，$\delta \dot{A}_R=0$. 把以上四个式子代入式(7-268)，可得

$$\int_D Y_r \delta \dot{A}'_r rdrdz=\int_D\left[\frac{\nu}{r}(\dot{A}_{R,r}\delta \dot{A}_{R,r}+\dot{A}_{R,z}\delta \dot{A}_{R,z})+\nu\frac{p}{r^2}\left(\frac{p}{r}\dot{A}_R+\frac{2}{r}\dot{A}_P\right)\delta \dot{A}_R\right.$$

$$\left.+\left(j\omega\sigma\frac{\dot{A}_R}{r}+\sigma\dot{\phi}'_{,r}-\dot{J}'_{sr}\right)\delta \dot{A}_R\right]drdz \tag{7-271}$$

式中 $\dot{A}_{R,r}$ 和 $\dot{A}_{R,z}$ 分别表示 $\dot{A}_R$ 对 r 和 z 的偏导数，$\dot{A}_{R,r}=\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial r}$，$\dot{A}_{R,z}=\frac{\partial \dot{A}_R}{\partial z}$；$\dot{\varphi}'_{,r}$ 表示 $\dot{\varphi}'$ 对 r 的偏导数，$\dot{\phi}'_{,r}=\frac{\partial \dot{\varphi}'}{\partial r}$.

同理，

$$\int_D Y_\theta \delta(j\ddot{A}'_\theta)rdrdz=j^2\int_D\left\{\nu\left[\frac{2p}{r^3}rA'_r+p^2\frac{r\dot{A}'_\theta}{r^3}-\left(-\frac{1}{r^2}\dot{A}'_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}'_\theta}{\partial r}\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial z^2}\Big)\Big]+j\omega\sigma\dot{A}'_\theta-\frac{p}{r}\sigma\dot{\varphi}'-\dot{J}'_{s\theta}\Big)\delta\dot{A}_P dr dz$$

$$=j^2\int_D\Big\{\nu\Big[\frac{2p}{r^3}\dot{A}_R+p^2\frac{\dot{A}_P}{r^3}-\Big(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}_P}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\dot{A}_P}{\partial z^2}\Big)\Big]+j\omega\sigma\frac{\dot{A}_P}{r}$$

$$-\frac{p}{r}\sigma\dot{\varphi}'-\dot{J}'_{s\theta}\Big\}\delta\dot{A}_P dr dz$$

$$=j^2\int_D\Big[\Big(\frac{\nu}{r}\dot{A}_{P,r}\delta\dot{A}_{P,r}+\dot{A}_{P,z}\delta\dot{A}_{P,z}\Big)+\nu\frac{p}{r}\Big(\frac{2}{r^2}\dot{A}_R+\frac{p}{r^2}\dot{A}_P\Big)\delta\dot{A}_P$$

$$+\Big(j\omega\sigma\frac{\dot{A}_P}{r}-\frac{p}{r}\sigma\dot{\varphi}'-\dot{J}'_{s\theta}\Big)\delta\dot{A}_P\Big]dr dz \tag{7-272}$$

式中 $\dot{A}_{P,r}$和 $\dot{A}_{P,z}$分别表示 $\dot{A}_P$ 对 r 和 z 的偏导数，$\dot{A}_{P,r}=\frac{\partial\dot{A}_P}{\partial r}$，$\dot{A}_{P,z}=\frac{\partial\dot{A}_P}{\partial z}$.

$$\int_D Y_s\delta\dot{A}'_z r dr dz=\int_D\Big\{\nu\Big[\frac{p^2}{r^2}\dot{A}'_z-\frac{1}{r^2}\dot{A}'_z+\Big(\frac{\dot{A}'_z}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial r}-\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial r^2}\Big)-\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial z^2}\Big]$$

$$+j\omega\sigma\dot{A}'_z+\sigma\frac{\partial\dot{\phi}'}{\partial z}-\dot{J}'_{sz}\Big\}\delta\dot{A}_Z dr dz$$

$$=\int_D\Big\{\nu\Big[\frac{p^2-1}{r^3}\dot{A}_Z-\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial r}\Big)-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\dot{A}_Z}{\partial z^2}\Big)$$

$$+j\omega\sigma\frac{\dot{A}_Z}{r}+\sigma\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial z}-\dot{J}'_{sz}\Big\}\delta\dot{A}_Z dr dz$$

$$=\int_D\Big[\frac{\nu}{r}(\dot{A}_{Z,r}\delta\dot{A}_{Z,r}+\dot{A}_{Z,z}\delta\dot{A}_{Z,z})+\frac{\nu}{r}\frac{p^2-1}{r^2}\dot{A}_Z\delta\dot{A}_Z$$

$$+\Big(j\omega\sigma\frac{\dot{A}_Z}{r}+\sigma\dot{\varphi}'_{,z}-\dot{J}'_{sz}\Big)\delta\dot{A}_Z\Big]dr dz \tag{7-273}$$

其中

$$-\int_D\nu\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial r}\Big)\delta\dot{A}_Z dr dz=\int_D\nu\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial r}\delta\Big(\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial r}\Big)dr dz-\oint_l\nu\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial r}\delta\dot{A}_Z dz$$

$$=\int_D\nu\frac{1}{r}\dot{A}_{Z,r}\delta\dot{A}_{Z,r}dr dz \tag{7-274}$$

$$-\int_D\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_Z}{\partial z^2}\delta\dot{A}_Z dr dz=\int_D\nu\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial z}\frac{1}{r}\delta\Big(\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial z}\Big)dr dz-\oint_l\nu\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial r}\delta A_Z dr$$

$$=\int_D\nu\dot{A}_{Z,z}\frac{1}{r}\delta\dot{A}_{Z,z}dr dz \tag{7-275}$$

$\dot{A}_{Z,r}$和 $\dot{A}_{Z,z}$分别表示 $\dot{A}_Z$ 对 r 和 z 的偏导数，$\dot{A}_{Z,r}=\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial r}$，$\dot{A}_{Z,z}=\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial r}$；$\dot{\varphi}'_{,z}$表示 $\dot{\varphi}'$ 对 z 的偏导数，$\dot{\varphi}'_{,z}=\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial z}$.

$$\int_D Y_\varphi\delta\dot{\varphi}' r dr dz=-\int_D\sigma\Big[\frac{1}{r}(r\dot{A}'_r)+r\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{p}{r}(r\dot{A}'_\theta)+r\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial z}$$

$$+\frac{r}{j\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{\varphi}'}{\partial z^2}-\frac{p^2}{r^2}\dot{\varphi}'+\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial z^2}\right)\Big]\delta\dot{\varphi}'drdz$$

$$=-\int_D\sigma\Big[\frac{\partial\dot{A}_R}{\partial r}+\frac{p}{r}\dot{A}_P+\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial z}+\frac{1}{j\omega}\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}-\frac{1}{j\omega}\frac{p^2}{r}\dot{\varphi}$$

$$+\frac{r}{j\omega}\left(\frac{\partial^2\dot{\varphi}'}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\dot{\varphi}'}{\partial z^2}\right)\Big]\delta\dot{\varphi}'drdz$$

$$=\int_D\sigma\Big[\Big(\dot{A}_R+\frac{r}{j\omega}\dot{\varphi}_{,r}\Big)\delta\dot{\varphi}_{,r}+\Big(\dot{A}_Z+\frac{r}{j\omega}\dot{\varphi}_{,z}\Big)\delta\dot{\varphi}_{,z}$$

$$-\Big(\frac{p}{r}\dot{A}_P-\frac{1}{j\omega}\frac{p^2}{r}\dot{\varphi}'\Big)\delta\dot{\varphi}'\Big]drdz \tag{7-276}$$

其中

$$\int_D\sigma\frac{\partial\dot{A}_R}{\partial r}\delta\dot{\varphi}'drdz=-\int_D\sigma\dot{A}_R\delta\dot{\varphi}_{,r}drdz-\oint_l\sigma\dot{A}_R\delta\dot{\varphi}'dz \tag{7-277}$$

$$\int_D\sigma\frac{\partial\dot{A}_Z}{\partial z}\delta\dot{\varphi}'drdz=-\int_D\sigma\dot{A}_Z\delta\dot{\varphi}_{,z}drdz+\oint_l\sigma\dot{A}_Z\delta\dot{\varphi}'dz \tag{7-278}$$

$$\int_D\sigma\Big(\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}+r\frac{\partial^2\dot{\varphi}'}{\partial r^2}\Big)\delta\dot{\varphi}'drdz=\int_D\sigma\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}\Big)\delta\dot{\varphi}'drdz$$

$$=-\int_D\sigma r\dot{\varphi}_{,r}\delta\dot{\varphi}_{,r}drdz-\oint_l\sigma r\dot{\varphi}_{,r}\delta\dot{\varphi}'dz \tag{7-279}$$

$$\oint_l\sigma\Big(\dot{A}_R+r\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}\Big)\delta\dot{\varphi}'drdz+\oint_l\sigma\Big(\dot{A}_Z+r\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial z}\Big)\delta\dot{\varphi}'dr=0 \tag{7-280}$$

（二）单元分析和总体合成

把式(7-266)写成各单元中积分之和，有

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{e=1}^{E}\int_{D_e}Y_r\delta\dot{A}_r'rdrdz=0,\qquad\sum_{e=1}^{E}\int_{D_e}Y_\theta\delta(j\dot{A}_\theta')rdrdz=0\\&\sum_{e=1}^{E}\int_{D_e}Y_z\delta\dot{A}_z'rdrdz=0,\qquad\sum_{e=1}^{E}\int_{D_e}Y_\varphi\delta\dot{A}_\varphi'rdrdz=0\end{aligned}\right\} \tag{7-281}$$

对于行波场，θ 方向的变化规律为已知，故仅需在 r-z 平面内作三角元剖分，如图 7-30 所示．此时单元形状函数 N_i^e 为

$$N_i^e=a_i+b_ir+c_iz \tag{7-282}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&a_i=\frac{1}{2\Delta_e}(r_jz_m-r_mz_j),\quad b_i=\frac{1}{2\Delta_e}(z_j-z_m),\quad c_i=\frac{1}{2\Delta_e}(r_m-r_j)\\&2\Delta_e=r_i(z_j-z_m)+r_j(z_m-z_i)+r_m(z_i-z_j)\end{aligned}\right\} \tag{7-283}$$

对下标进行轮换，可得 N_j^e 和 N_m^e.

用形状函数和节点磁位表示时，单元 e 中任一点的 $\dot{A}_R$，$\dot{A}_P$，$\dot{A}_Z$ 和 $\dot{\varphi}'$ 为

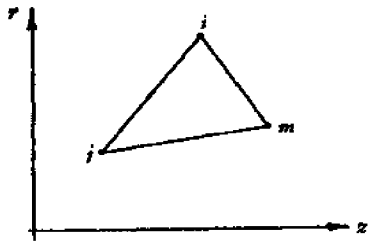


图 7-30 r-z 平面内的三角元

$$\left.\begin{aligned}&\dot{A}_R^e=\sum_{k=i,j,m}N_k^e\dot{A}_{kR}^e,\qquad \dot{A}_P^e=\sum_{k=i,j,m}N_k^e\dot{A}_{kP}^e,\qquad \dot{A}_Z^e=\sum_{k=i,j,m}N_k^e\dot{A}_{kZ}^e\\&\dot{\varphi}'^e=\sum_{k=i,j,m}N_k^e\dot{\varphi}'^e_k\end{aligned}\right\}\tag{7-284}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\dot{A}_{R,r}^e=\sum_k\frac{\partial N_k^e}{\partial r}\dot{A}_{kR}^e=\sum_k b_k\dot{A}_{kR}^e,\quad \dot{A}_{P,r}^e=\sum_k\frac{\partial N_k^e}{\partial r}\dot{A}_{kP}^e=\sum_k b_k\dot{A}_{kP}^e\\&\dot{A}_{Z,r}^e=\sum_k b_k\dot{A}_{kZ}^e,\qquad \dot{\varphi}_{,r}^e=\sum_k b_k\dot{\varphi}_{k,r}^e\end{aligned}\right\}\tag{7-285}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{A}_{R,z}^e=\sum_k\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\dot{A}_{kR}^e=\sum_k c_k\dot{A}_{kR}^e,\quad \dot{A}_{P,z}^e=\sum_k\frac{\partial N_k^e}{\partial z}\dot{A}_{kP}^e=\sum_k c_k\dot{A}_{kP}^e\\&\dot{A}_{Z,z}^e=\sum_k c_k\dot{A}_{kZ}^e,\qquad \dot{\varphi}_{,z}^e=\sum_k c_k\dot{\varphi}_k^e\end{aligned}\right\}\tag{7-286}$$

$$\left.\begin{aligned}&\delta\dot{A}_R^e=\sum_{l=i,j,m}N_l^e\delta\dot{A}_{lR}^e,\qquad \delta\dot{A}_P^e=\sum_{l=i,j,m}N_l^e\delta\dot{A}_{lP}^e\\&\delta\dot{A}_Z^e=\sum_{l=i,j,m}N_l^e\delta\dot{A}_{lZ}^e,\qquad \delta\dot{\varphi}'^e=\sum_{l=i,j,m}N_l^e\delta\dot{\varphi}_l'^e\end{aligned}\right\}\tag{7-287}$$

$$\left.\begin{aligned}&\delta\dot{A}_{R,r}^e=\sum_l b_l\delta\dot{A}_{lR}^e,\qquad \delta\dot{A}_{P,r}^e=\sum_l b_l\delta\dot{A}_{lP}^e\\&\delta\dot{A}_{Z,r}^e=\sum_l b_l\delta\dot{A}_{lZ}^e,\qquad \delta\dot{\varphi}_{,r}^e=\sum_l b_l\delta\dot{\varphi}_l^e\end{aligned}\right\}\tag{7-288}$$

$$\left.\begin{aligned}&\delta\dot{A}_{R,z}^e=\sum_l c_l\delta\dot{A}_{lR}^e,\qquad \delta\dot{A}_{P,z}^e=\sum_l c_l\delta\dot{A}_{lP}^e\\&\delta\dot{A}_{Z,z}^e=\sum_l c_l\delta\dot{A}_{lZ}^e,\qquad \delta\dot{\varphi}_{,z}^e=\sum_l c_l\delta\dot{\varphi}_l^e\end{aligned}\right\}\tag{7-289}$$

把上述关系代入式(7-281)，可得

$$\begin{aligned}\int_{D_e}Y_r\delta\dot{A}_r^e r\,dr\,dz=\int_{D_e}\Big[&\frac{\dot{\nu}_e}{r_e}(\dot{A}_{R,r}^e\delta\dot{A}_{R,r}^e+\dot{A}_{R,z}^e\delta\dot{A}_{R,z}^e)+\frac{p}{r_e^2}\nu_e\Big(\frac{p}{r_e}\dot{A}_R^e+\frac{2}{r_e}\dot{A}_P^e\Big)\delta\dot{A}_R^e\\&+\Big(j\omega\sigma_e\frac{\dot{A}_R^e}{r_e}+\sigma_e\dot{\varphi}_{,r}^e-\dot{J}_{sr}^e\Big)\delta\dot{A}_R^e\Big]dr\,dz\\=\int_{D_e}\Big[&\frac{\nu_e}{r_e}\Big(\sum_k b_k\dot{A}_{kR}^e\sum_l b_l\delta\dot{A}_{lR}^e+\sum_k c_k\dot{A}_{kR}^e\sum_l c_l\delta\dot{A}_{lR}^e\Big)+\nu_e\frac{p}{r_e^3}\Big(p\sum_k N_k^e\dot{A}_{kR}^e\\&+2\sum_k N_k^e\dot{A}_{kP}^e\Big)\sum_l N_l^e\delta\dot{A}_{lR}^e+\Big(j\omega\frac{\sigma_e}{r_e}\sum_k N_k^e\dot{A}_{kR}^e+\sigma_e\sum_k b_k\dot{\varphi}_k^e-\dot{J}_{sr}^e\Big)\sum_l N_l^e\delta\dot{A}_{lR}^e\Big]dr\,dz\end{aligned}$$

$$= \sum_l \int_{D_e} \left\{ \left[\frac{\nu_e}{r_e} \left(\sum_k (b_l b_k + c_l c_k) + \frac{p^2}{r_e^2} \sum_k N_l^e N_k^e \right) + j\omega \frac{\sigma_e}{r_e} \sum_k N_l^e N_k^e \right] \dot{A}_{kR}^e \right.$$

$$\left. + \nu_e \frac{2p}{r_e^3} \sum_k N_k^e N_l^e \dot{A}_{kP}^e + \sigma_e \sum_k b_k N_l^e \dot{\varphi}_k^e - \dot{J}_{sr}^e N_l^e \right\} \delta \dot{A}_{lR}^e dr dz$$

$$= \sum_l \left(\sum_k k_{lRkR}^e \dot{A}_{kR}^e + \sum_k k_{lRkP}^e \dot{A}_{kP}^e + \sum_k k_{lRkZ}^e \dot{A}_{kZ}^e + \sum_k k_{lRk\varphi}^e \dot{\varphi}'^e_k - f_{lR}^e \right) \delta \dot{A}_{lR}^e \quad (7\text{-}290)$$

式中

$$\left.
\begin{aligned}
k_{lRkR}^e &= \int_{D_e} \frac{\nu_e}{r_e} \left[(b_l b_k + c_l c_k) + \frac{p^2}{r_e^2} N_l^e N_k^e \right] dr dz + j\omega \frac{\sigma_e}{r_e} \int_{D_e} N_l^e N_k^e dr dz \\
&= \frac{\nu_e \Delta_e}{r_e} (b_l b_k + c_l c_k) + \frac{\nu_e p^2}{r_e^3} \Delta_e a + j\omega \frac{\sigma_e}{r_e} \Delta_e a \\
a &= \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & \text{当 } l = k \text{ 时,} \\ \dfrac{1}{12}, & \text{当 } l \neq k \text{ 时.} \end{cases} \\
k_{lRkP}^e &= k_{lPkR}^e = \int_{D_e} \nu_e \frac{2p}{r_e^3} N_l^e N_k^e dr dz = \nu_e \frac{2p}{r_e^3} \Delta_e a \\
k_{lRkZ}^e &= k_{lZkR}^e = 0 \\
k_{lRk\phi}^e &= \int_{D_e} \sigma_e b_k N_l^e dr dz = \frac{1}{3} \sigma_e b_k \Delta_e \\
f_{lR}^e &= \dot{J}_{sr}^e \int_{D_e} N_l^e dr dz = \frac{1}{3} \dot{J}_{sr}^e \Delta_e \\
r_e &= \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_m) \qquad\qquad l, k = i, j, m
\end{aligned}
\right\} \quad (7\text{-}291)$$

同理

$$\int_{D_e} Y_\theta \delta (j\dot{A}_\theta') r dr dz = -\int_{D_e} \left[\frac{\nu_e}{r_e} (\dot{A}_{P,r}^e \delta \dot{A}_{P,r}^e + \dot{A}_{P,z}^e \delta \dot{A}_{P,z}^e) + \nu_e \frac{p}{r_e} \left(\frac{2}{r_e^2} \dot{A}_R^e + \frac{p}{r_e^2} \dot{A}_P^e \right) \delta \dot{A}_P^e \right.$$

$$\left. + \left(j\omega\sigma_e \frac{\dot{A}_P^e}{r_e} - \frac{p}{r_e} \sigma_e \dot{\varphi}^e - \dot{J}_{s\theta}^e \right) \delta \dot{A}_P^e \right] dr dz$$

$$= -\int_{D_e} \left[\frac{\nu_e}{r_e} \left(\sum_k b_k \dot{A}_{kP}^e \sum_l b_l \delta \dot{A}_{lP}^e + \sum_k c_k \dot{A}_{kP}^e \sum_l c_l \delta \dot{A}_{lP}^e \right) \right.$$

$$+ \nu_e \frac{p}{r_e^3} \left(2 \sum_k N_k^e \dot{A}_{kR}^e + p \sum_k N_k^e \dot{A}_{kP}^e \right) \sum_l N_l^e \delta \dot{A}_{lP}^e$$

$$\left. + \left(j\omega\sigma_e \frac{1}{r_e} \sum_k N_k^e \dot{A}_{kP}^e - \frac{p}{r_e} \sigma_e \sum_k N_k^e \dot{\varphi}_k^e - \dot{J}_{s\theta}^e \right) \sum_l N_l^e \delta \dot{A}_{lP}^e \right] dr dz$$

$$= -\sum_l \int_{D_e} \left[\frac{\nu_e}{r_e} \sum_k (b_l b_k + c_l c_k) \dot{A}_{kP}^e \right.$$

$$+ \nu_e \frac{2p}{r_e^3} \sum_k N_l^e N_k^e \dot{A}_{kR}^e + \nu_e \frac{p^2}{r_e^3} \sum_k N_l^e N_k^e \dot{A}_{kP}^e$$

$$\left. + j\omega\sigma_e \frac{1}{r_e} \sum_k N_l^e N_k^e \dot{A}_{kP}^e - \frac{p}{r_e} \sigma_e \sum_k N_l^e N_k^e \dot{\varphi}_k^e - \dot{J}_{s\theta}^e N_l^e \right] \delta \dot{A}_{lP}^e dr dz$$

$$= -\sum_i \Big(\sum_k k^e_{iPkR}\dot{A}_{kR} + \sum_k k^e_{iPkP}\dot{A}^e_{kP} + \sum_k k^e_{iPkz}\dot{A}^e_{kz} + \sum_k k^e_{iPk\varphi}\dot{\varphi}^e_k - f^e_{iP}\Big)\delta\dot{A}^e_{iP} \tag{7-292}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
k^e_{iPkR} &= k^e_{iRkP} = \int_{D_e} \nu_e \frac{2p}{r_e^3} N^e_i N^e_k dr dz = \nu_e \frac{2p\Delta_e}{r_e^3}\alpha \\
k^e_{iPkP} &= k^e_{iRkR} = \int_{D_e}\Big[\frac{\nu_e}{r_e}(b_ib_k + c_ic_k) + \nu_e\frac{p^2}{r_e^3}N^e_iN^e_k + j\omega\sigma_e\frac{1}{r_e}N^e_iN^e_k\Big]drdz \\
&= \frac{\nu_e\Delta_e}{r_e}(b_ib_k + c_ic_k) + \nu_e\frac{p^2\Delta_e}{r_e^3}\alpha + j\omega\sigma_e\frac{\Delta_e}{r_e}\alpha \\
k^e_{iPkz} &= k^e_{izkP} = 0 \\
k^e_{iPk\varphi} &= k^e_{i\varphi kP} = -\int_{D_e}\frac{p\sigma_e}{r_e}N^e_iN^e_k dr dz = -\frac{p\Delta_e}{r_e}\sigma_e\alpha \\
f^e_{iP} &= j^e_{s\theta}\int_{D_e} N^e_i dr dz = \frac{1}{3}j^e_{s\theta}\Delta_e \qquad\qquad l,k = i,j,m
\end{aligned}\right\} \tag{7-293}$$

$$\begin{aligned}
\int_{D_e} Y_z\delta\dot{A}^e_z r dr dz &= \int_{D_e}\Big[\frac{\nu_e}{r_e}(\dot{A}^e_{Z,r}\delta\dot{A}^e_{Z,r} + \dot{A}^e_{Z,z}\delta\dot{A}^e_{Z,z}) + \frac{\nu_e}{r_e}\frac{p^2-1}{r_e^2}\dot{A}^e_Z\delta\dot{A}^e_Z \\
&\quad + \Big(j\omega\sigma_e\frac{\dot{A}^e_Z}{r_e} + \sigma_e\dot{\varphi}^e_{iz} - j^e_{sz}\Big)\delta\dot{A}^e_Z\Big]drdz \\
&= \int_{D_e}\Big[\frac{\nu_e}{r_e}\Big(\sum_k b_k\dot{A}^e_{kZ}\sum_l b_l\delta\dot{A}^e_{lZ} + \sum_k c_k\dot{A}^e_{kZ}\sum_l c_l\delta\dot{A}^e_{lZ}\Big) \\
&\quad + \frac{\nu_e}{r_e}\frac{p^2-1}{r_e^2}\sum_k N^e_k\dot{A}^e_{kZ}\sum_l N^e_l\delta\dot{A}^e_{lZ} \\
&\quad + \Big(j\omega\sigma_e\frac{1}{r_e}\sum_k N^e_k\dot{A}^e_{kZ} + \sigma_e\sum_k c_k\dot{\varphi}^e_k - j^e_{sz}\Big)\sum_l N^e_l\delta\dot{A}^e_{lZ}\Big]drdz \\
&= \sum_i\int_{D_e}\Big[\frac{\nu_e}{r_e}\sum_k(b_ib_k + c_ic_k)\dot{A}^e_{kZ} + \frac{\nu_e}{r_e^3}(p^2-1)\sum_k N^e_iN^e_k\dot{A}^e_{kZ} \\
&\quad + j\omega\sigma_e\frac{1}{r_e}\sum_k N^e_iN^e_k\dot{A}^e_{kZ} + \sigma_e\sum_k c_kN^e_i\dot{\varphi}^e_k - j^e_{sz}N^e_i\Big]\delta\dot{A}^e_{iZ}drdz \\
&= \sum_i\Big(\sum_k k^e_{iZkR}\dot{A}_{kR} + \sum_k k^e_{iZkP}\dot{A}^e_{kP} + \sum_k k^e_{iZkZ}\dot{A}^e_{kZ} \\
&\quad + \sum_k k^e_{iZk\varphi}\dot{\varphi}^e_k - f^e_{iz}\Big)\delta\dot{A}^e_{iZ}
\end{aligned} \tag{7-294}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
k^e_{iZkR} &= k^e_{iRkZ} = 0 \\
k^e_{iZkP} &= k^e_{iPkZ} = 0 \\
k^e_{iZkZ} &= \int_{D_e}\Big[\frac{\nu_e}{r_e}(b_ib_k + c_ic_k) + \frac{\nu_e}{r_e^3}(p^2-1)N^e_iN^e_k + j\omega\frac{\sigma_e}{r_e}N^e_iN^e_k\Big]drdz \\
&= \frac{\nu_e\Delta_e}{r_e}(b_ib_k + c_ic_k) + \frac{\nu_e}{r_e^3}(p^2-1)\Delta_e\alpha + j\omega\frac{\sigma_e}{r_e}\Delta_e\alpha
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
k^e_{lzk\varphi} &= \int_{D_e} \sigma_e c_k N^e_l dr dz = \frac{1}{3}\sigma_e c_k \Delta_e \\
f^e_{lz} &= \dot{J}^e_{sz} \int_{D_e} N^e_l dr dz = \frac{1}{3}\dot{J}^e_{sz}\Delta_e \qquad l,k = i,j,m
\end{aligned}\right\} \tag{7-295}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{D_e} Y_\varphi \delta\dot{\varphi} r dr dz &= \int_{D_e} \sigma_e \left[\left(\dot{A}^e_R + \frac{r_e}{j\omega}\dot{\varphi}^e_{sr}\right)\delta\dot{\varphi}^e_{sr} + \left(\dot{A}^e_Z + \frac{r_e}{j\omega}\dot{\varphi}^e_{sz}\right)\delta\dot{\varphi}^e_{sz}\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{p}{r_e}\dot{A}^e_P - \frac{1}{j\omega}\frac{p^2}{r_e}\dot{\varphi}^e\right)\delta\dot{\varphi}^e\right] dr dz \\
&= \int_{D_e} \sigma_e \left[\left(\sum_k N^e_k \dot{A}^e_{kR} + \frac{r_e}{j\omega}\sum_k b_k \dot{\varphi}^e_k\right)\sum_l b_l \delta\dot{\varphi}^e_l \right. \\
&\quad + \left(\sum_k N^e_k \dot{A}^e_{kZ} + \frac{r_e}{j\omega}\sum_k c_k \dot{\varphi}^e_k\right)\sum_l c_l \delta\dot{\varphi}^e_l \\
&\quad \left. - \left(\frac{p}{r_e}\sum_k N^e_k \dot{A}^e_{kP} - \frac{1}{j\omega}\frac{p^2}{r_e}\sum_k N^e_k \dot{\varphi}^e_k\right)\sum_l N^e_l \delta\dot{\varphi}^e_l\right] dr dz \\
&= \sum_l \int_{D_e} \left[\sum_k b_k N^e_k \dot{A}^e_{kR} + \frac{r_e}{j\omega}\sum_k b_l b_k \dot{\varphi}^e_k + \sum_k c_l N^e_k \dot{A}^e_{kZ} + \frac{r_e}{j\omega}\sum_k c_l c_k \dot{\varphi}^e_k \right. \\
&\quad \left. - \frac{p}{r_e}\sum_k N^e_l N^e_k \dot{A}^e_{kP} + \frac{1}{j\omega}\frac{p^2}{r_e}\sum_k N^e_l N^e_k \dot{\varphi}^e_k\right]\delta\dot{\varphi}^e_l dr dz \\
&= \sum_l \left(\sum_k k^e_{l\varphi kR}\dot{A}^e_{kR} + \sum_k k^e_{l\varphi kP}\dot{A}^e_{kP} + \sum_k k^e_{l\varphi kZ}\dot{A}^e_{kZ} + \sum_k \dot{A}^e_{l\varphi k\varphi}\dot{\varphi}^e_k\right)\delta\dot{\varphi}^e_l
\end{aligned} \tag{7-296}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
k^e_{l\varphi kR} &= \int_{D_e} \sigma_e b_l N^e_k dr dz = \frac{1}{3}\sigma_e b_l \Delta_e \\
k^e_{l\varphi kP} &= k^e_{lPk\varphi} = -\int_{D_e} \sigma_e \frac{p}{r_e} N^e_l N^e_k dr dz = -\sigma_e \frac{p\Delta_e}{r_e}\alpha \\
k^e_{l\varphi kZ} &= \int_{D_e} \sigma_e c_l N^e_k dr dz = \frac{1}{3}\sigma_e c_l \Delta_e \\
k^e_{l\varphi k\varphi} &= \int_{D_e} \sigma_e \left[\frac{r_e}{j\omega}(b_l b_k + c_l c_k) + \frac{1}{j\omega}\frac{p^2}{r_e} N^e_l N^e_k\right] dr dz \\
&= \sigma_e \frac{r_e}{j\omega}\Delta_e (b_l b_k + c_l c_k) + \frac{\sigma_e}{j\omega}\frac{p^2}{r_e}\Delta_e \alpha \\
&= -j\sigma_e \left[\frac{r_e}{\omega}\Delta_e (b_l b_k + c_l c_k) + \frac{1}{\omega}\frac{p^2}{r_e}\Delta_e \alpha\right] \\
&\qquad l,\ k = i,\ j,\ m
\end{aligned}\right\} \tag{7-297}
$$

由此可得单元分析结果为

$$
\frac{\partial I^e_D}{\partial \mathbf{A}^e_\varphi} = \mathbf{k}^e \mathbf{A}^e_\varphi - \mathbf{f}^e \tag{7-298}
$$

式中 $\mathbf{A}^e_\varphi$ 为单元的电磁位列向量；$\mathbf{k}^e$ 为单元系数矩阵；$\mathbf{f}^e$ 为单元右端项列向量；

$$
\mathbf{A}^e_\varphi = \begin{bmatrix} \dot{A}^e_{\varphi i} \\ \dot{A}^e_{\varphi j} \\ \dot{A}^e_{\varphi m} \end{bmatrix},\quad \mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^e_{ii} & \mathbf{k}^e_{ij} & \mathbf{k}^e_{im} \\ \mathbf{k}^e_{ji} & \mathbf{k}^e_{jj} & \mathbf{k}^e_{jm} \\ \mathbf{k}^e_{mi} & \mathbf{k}^e_{mj} & \mathbf{k}^e_{mm} \end{bmatrix},\quad \mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^e_i \\ \mathbf{f}^e_j \\ \mathbf{f}^e_m \end{bmatrix} \tag{7-299}
$$

其中

$$\dot{A}^e_{pk}=\begin{bmatrix}\dot{A}^e_{kR}\\ \dot{A}^e_{kP}\\ \dot{A}^e_{kZ}\\ \dot{\varphi}'^e_{k}\end{bmatrix},\quad \mathbf{k}^e_{ik}=\begin{bmatrix}k^e_{iRkR} & k^e_{iRkP} & k^e_{iRkZ} & k^e_{iRk\varphi}\\ k^e_{iPkR} & k^e_{iPkP} & k^e_{iPkZ} & k^e_{iPk\varphi}\\ k^e_{iZkR} & k^e_{iZkP} & k^e_{iZkZ} & k^e_{iZk\varphi}\\ k^e_{i\varphi kR} & k^e_{i\varphi kP} & k^e_{i\varphi kZ} & k^e_{i\varphi k\varphi}\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}^e_i=\frac{1}{3}\Delta_e\begin{bmatrix}\dot{J}'^e_{sr}\\ \dot{J}'^e_{s\theta}\\ \dot{J}'^e_{sz}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^e_{jk}=(\mathbf{k}^e_{kj})^T \qquad l,k=i,j,m \tag{7-300}$$

再把单元的各个矩阵扩展为单元贡献，然后进行总体合成，即可得到总体电磁位列向量，总体系数矩阵和总体右端项列向量和有限元方程组.

（三）涡流的约束条件

对行波场，由于$\dot{\delta\varphi}$的任意性，式(7-262)可写成

$$\begin{aligned}\int_{D_c}(\nabla\cdot\dot{\mathbf{j}})_m r\,dr\,dz&=\int_{D_c}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\dot{J}'_r}{\partial r}+\frac{\partial \dot{J}'_z}{\partial z}+\frac{p}{r}\dot{J}'_\theta\right)r\,dr\,dz\\&=\oint_{l_c}r(\dot{J}'_r dz+\dot{J}'_z dr)+p\int_{D_c}\dot{J}'_\theta dr\,dz\\&=\oint_{l_c}r(\dot{J}'_r\mathbf{a}_r+\dot{J}'_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{n}\,dl+p\int_{D_c}\dot{J}'_\theta dr\,dz=0\end{aligned}\tag{7-301}$$

式中D_c为导电区中$(\nabla\cdot\dot{J})_m$的幅值平面，l_c为D_c为边界线. 由于在l_c上$(\dot{J}'_r\mathbf{a}_r+\dot{J}'_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{n}=0$,因此

$$\dot{I}_\theta=\int_{D_c}\dot{J}'_\theta dr\,dz=-\int_{D_c}\sigma\left(j\omega\dot{A}_\theta-\frac{p}{r}\dot{\varphi}'\right)dS=0\tag{7-302}$$

上式说明，对行波场，涡流的周向面积分为零.

为满足式(7-302)，可用调整导电区边界上的$\dot{\varphi}$值来达到. 可以证明，$\dot{I}_\theta$与边值$\dot{\varphi}'$成线性关系，若求解区内仅有一个导电区，则

$$\dot{\varphi}'=A\dot{I}_\theta+D\tag{7-304}$$

式中A和D为待定常数. 依次任意给定两个边值$\dot{\varphi}'$，并两次求解有限元方程，得到两组位值，再由式(7-302)算出两个$\dot{I}_\theta$值，可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}'_1&=A\dot{I}_{\theta 1}+D\\ \dot{\varphi}'_2&=A\dot{I}_{\theta 2}+D\end{aligned}\right\}\tag{7-305}$$

由此即可解出D，D即是满足$\dot{I}_\theta=0$时的边值$\dot{\varphi}'$. 再用此$\dot{\varphi}'$值作为导电区的边值，重新求解有限元方程，即可得到正确的解答. 对于求解域内含有多个导电区时边值$\dot{\varphi}'$的确定，将在第十章中说明.

7-12 小　结

本章研究了二维和三维正弦涡流场的有限元分析，并以电机中的几个实际问题作为例子，进行了计算.

对似恒正弦电磁场，从形式上看，亦存在一个复泛函 $I(\dot{A})$. 当 $I(\dot{A})$的一阶变分为零时，等价于相应的似恒电磁场复边值问题；这点与恒定磁场时相类似. 但是，由于复数无大小，所以讨论复泛函的极值是没有意义的. $I(\dot{A})$的实部泛函和虚部泛函的二阶变分，视变差满足不同的条件而可能大于零或小于零，其符号并不保持固定；因此 $I(\dot{A})$的一阶变分为零，并不意味着复泛函的实部或虚部中的任何一个达到极值，而仅仅表示 $I(\dot{A})$达到稳定值（见本章文献 [35]）；这点与恒定磁场时完全不同，需要注意.

二维正弦涡流场问题的边界条件有两种给法：一种是给定整个边界上的 $\dot{\mathbf{H}}_t$；另一种是部分边界上给定 $\dot{\mathbf{H}}_t$，部分给定 $\dot{A}_0$. 对第一种给法，一般在边界上满足 $\oint\dot{\mathbf{H}}\cdot d\mathbf{l}=\dot{I}$，所以解答是唯一和正确的. 对第二种给法，$\dot{A}_0$ 要进行多次调整，才能使边界上满足 $\oint\dot{\mathbf{H}}\cdot d\mathbf{l}=\dot{I}$，以得到正确的结果. 对于非线性情况，要引入有效磁阻率 ν_{ef}，使 **B** 和 **H** 都成为正弦量，再利用复数来运算. 对于电机中的整体电磁场问题，当简化成二维问题时，常需对端部影响进行必要的处理，例如把端部的电阻和漏抗归并到有效部分，或者对电路模型进行必要的修正. 对非线性问题，除需进行磁阻率的迭代之外，有时还要进行电流（或电压）迭代.

对于三维涡流场问题，常用的电磁位是 **A**，φ 和 **T**，Ω. **A**，φ 法的优点是，对工频和中频问题均能得到稳定的数值解，对于含有源电流和多连域导电区的情况亦可直接应用；缺点是变量较多. **T**，Ω 法的优点是，若涡流区仅占总求解区的小部分，则变量可显著减少；缺点是，对含有源电流的情况，要找出与 $\dot{\mathbf{J}}_s$ 相应的特解 $\dot{\mathbf{T}}_s$；对于多连域问题亦要专门处理，以消除 $\dot{\varphi}$的多值问题.

三维正弦涡流场问题，除了可以从变分原理出发进行离散. 亦可以用加权余量法来离散，用伽辽金法来建立有限元方程时，对标量方程，权函数可取为标量形状函数；对向量方程，权函数应当用向量权函数. 对于位值已经给定的节点（即给定第一类边界条件的节点），权函数应取为零. 在 **A**，φ 法中，为使有限元方程组的系数矩阵成为对称阵，应引入 φ；这样，用 $\dot{A}$，$\dot{\phi}$表示时，有限元方程的系数矩阵即成为对称阵. 常用的三维单元有直三棱柱和六面体单元. 对于直三棱柱和六面体砖块单元，可直接导出 $\mathbf{k}_{ij}$中各个元素的计算公式；对于不规则六面体单元，则要引入等参变换和等参元的概念，用数值法来计算.

对于准三维行波电磁场问题，应注意先对三维问题进行变分或加权余量处理，然后再把行波表达式代入，把 θ 去除（即进行降维），而不可先降维再变分，否则将出现错误. 为使周向涡流的面积分值为零，导电区的边值 φ 要进行多次调整.

计算三维涡流场问题时，边界条件常常较难给定．通常，对称面上的条件常常利用对称关系给出；外部边界面则常作为 $\mu=\infty$，$\sigma=\infty$或无穷远条件来近似对待．三维计算的另一个需加注意的问题是，源电密 $\dot{\mathbf{J}}_s$ 离散时，要保证 $\mathrm{div}\dot{\mathbf{J}}_s=0$；对于载流导体的拐弯部分，特别要注意这点．

参 考 文 献

[1] 中田高义、高橋則雄，電気工学の有限要素法，森北出版株式会社，1982.

[2] K. J. Binns, P. J. Lawrenson and C. W. Trowbridge, The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields, John Wiley & Sons, 1992.

[3] M. V. K. Chari, Finite Element Solution of Eddy Current Problems in Magnetic Structures, IEEE Trans. on PAS, 1974.

[4] M. V. K. Chari, Finite Element Analysis of Electric Machinery and Devices, IEEE Trans. on Magnetics, No. 5, 1980.

[5] 谢德馨，用有限元法计算鼠笼转子凸形槽的运行和起动参数，哈尔滨电工学院学报，1981，No. 2.

[6] N. A. Demerdash, T. W. Nehl, Solution of Nonlinear Eddy Current and Loss Problem in the Solid Rotor of Large Turbogenerator Using a Finite Element Approach, IEEE Power Engineering Society Winter Meeting, 1987.

[7] 李觉民、郭立炜，常用铁磁材料的有效磁导率和磁阻率及其解析表达式，哈尔滨电工学院学报，1988，No. 4.

[8] 伊藤元哉、奥田宏史、高橋典義、宮田俊夫，有限要素法む用いだかで形三相誘導電動機の始動電流解析，電気学会論文誌 B，昭和 54-1.

[9] 谢德馨，用有限元法计算鼠笼型感应电动机的起动电流，哈尔滨电工学院学报，1981，No. 3.

[10] S. Williamson, J. W. Ralph, Finite-element Analysis for Nonlinear Magnetic Field Problems with Complex Current Sources, Proc. IEE pt. A, No. 6, 1982.

[11] S. Williamson, J. W. Ralph, Finite-element Analysis of an Induction Motor Fed From a Constant-voltage Source, Proc. IEEE pt. B, No. 1, 1983.

[12] A. Konrad, Eddy Currents and Modelling, IEEE Trans. on Magnetics, No. 5, 1985.

[13] O. Biro, K. Preis, On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of 3-D Eddy Currents, IEEE Trans. on Magnetics, July, 1989.

[14] M. V. K. Chari, A. Konrad, M. A. Palmo and J. D'Angelo, Three Dimensional Vector Potential Analysis for Machine Field Problems, IEEE Trans. on Magnetics, No. 2, 1982.

[15] R. D. Pillsbury, A Three Dimensional Eddy Current Formulation Using Two Potentials: The Magnetic Vector Potential and Total Magnetic Scalar Potential, IEEE Trans. on Magnetics, 1983.

[16] T. Morisue, Magnetic Vector Potential and Electric Scalar Potential in Three-dimensional Eddy Current Problem, IEEE Trans. on Magnetics, March, 1982.

[17] T. Morisue, A New Formulation of the Magnetic Vector Potential Method in 3-D Multiply Connected Regions, IEEE Trans on Magnetics, No. 1, 1988.

[18] C. J. Carpenter, Comparison of Alternative Formulation of 3-dimensional Magnetic Field and Eddy Current Problems at Power Frequencies, Proc. IEE, No. 11, 1977.

[19] Wang Jiabing, Tong Baogian, Calculation of 3D Eddy Current Problems Using a Modified T-Ω Method, IEEE Trans. on Magnetics, No. 1, 1988.

[20] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and Y. Okada, Improvements of the T-Ω Method for 3-D Eddy Current Analysis, IEEE Trans. on Magnetics, No. 1, 1988.

[21] W. Renhart , H. Stögner and K. Preis, Calculation on 3D Eddy Current Problems by Finite Element Method Using Either an Electric or a Magnetic Vector Potential, IEEE Trans. on Magnetics, No. 1, 1988.

[22] O. Biro', K. Preis, W. Renhart, K. R. Richter, G. Vrisk, Performance of Different Vector Potentials Connected 3-D Eddy Current Problems, IEEE Trans on Magnetics, No. 2, 1990.

[23] O. Biro', K. Preis, Finite Element Analysis of 3-D Eddy Currents, IEEE Trans. on Magnetics, No. 2, 1990.

[24] D. Rodger, Finite Element Method for Calculating Power Frequency 3-dimensional Electromagnetic Field Distributions, Proc. IEE, pt. A, No. 5, 1983.

[25] D. Rodger, J. F. Eastham, A Formulation for Low Frequency Eddy Current Solutions, IEEE Trans. on Magnetics, Nov. 1983.

[26] D. Rodger and J. F. Eastham, The Use of Transformations in Applying Boundary Conditions to 3D Vector Field Problems, Proc. IEE, No. 4, 1985.

[27] C. S. Biddlecombe, E. A. Heighway, J. Simkin and C. W. Trowbridge, Method for Eddy Current Computation in Three Dimensions, IEEE Trans. on Magnetics, No. 2, 1982.

[28] C. W. Trowbridge, Low Frequency Electromagnetic Field Computation in Three Dimensions, Comput. Math. Appl. Mech. Eng., Vol. 52, 1985.

[29] R. Albanese, G. Rubinacci, Formulation of Eddy Current Problem, Proc. IEE, pt. A, No. 1, 1990.

[30] M. R. Krakowski, On Certain Properties of the Electric Vector Potential in Eddy Current Problems, pt. 1, Proc. IEE pt. A, No. 7, 1985, pt. 2. Proc. IEE, pt. A, No. 10, 1987.

[31] 奥田宏史，有限要素法による進行波磁界およう す電流解析，電気学会論文誌，昭和 51-B, Vol. 96, No. 8.

[32] K. Ito, N. Susumu, Simulation for Design Purposes of Magnetic Fields in Turbine-driven Generator End Region, IEEE Trans. on PAS, No. 4, 1980.

[33] 陈伟华，三维正弦涡流场的实泛函和复泛函，哈尔滨电工学院学报，1984，No. 3.

[34] 陈伟华、汤蕴璆，汽轮发电机端部磁场的有限元分析，哈尔滨电工学院学报，1986，No. 2.

[35] 吴海容，似稳正弦磁场对偶变分原理的数学分析，哈尔滨电工学院学报，1994，No. 1.

[36] A. Krawczyk, J. A. Tegopoulos, Numerical Modelling of Eddy Currents, Clarendon Press, 1993.

第八章　电磁场的瞬态

本章简要地说明导磁、导电体内似恒电磁场的瞬态及其解法.

求解似恒电磁场瞬态问题的基本方程是涡流方程. 用分离变量法求解涡流方程，由给定的边界条件和初始条件确定通解中的任意常数，即可得到具体问题的解答. 下面用电机工程中的几个实例来说明直角坐标系和极坐标系内一维、二维电磁场瞬态问题的解法，并导出相应的时间常数.

8-1　薄长钢片中恒定磁场的建立和衰减[1]

图 8-1 表示一张薄长钢片，现研究开断和闭合恒定的励磁电流时钢片中磁场的衰减和建立过程.

（一）一维涡流方程及其通解

设钢片的 μ_{Fe}=常值，磁场为 z 方向. 由于钢片很薄，其高度远大于厚度，故磁场强度 H_z 认为仅是坐标 x 的函数；即

$$\mathbf{H}=\mathbf{k}H_z, \qquad H_z=H_z(x,t)$$

于是在瞬态过程中，钢片内的磁场强度 H_z 满足一维涡流方程

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}=\mu\sigma\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{8-1}$$

上式可用分离变量法求解.

设 H_z 为 X 和 T 的乘积，X 仅为坐标 x 的函数，T 仅为时间 t 的函数；即

$$H_z=X(x)\cdot T(t) \tag{8-2}$$

将上式代入式（8-1），可得

$$\frac{X''}{X}=\mu\sigma\frac{T'}{T}=-\alpha_n^2 \tag{8-3}$$

式中 X''为 X 对 x 的二阶导数；T'为 T 对 t 的一阶导数；α_n 为任意常数. 这样，根据式（8-3），原来的偏微分方程（8-1）可分解为两个常微分方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dx^2}+\alpha_n^2X=0\\ \frac{dT}{dt}+\frac{\alpha_n^2}{\mu\sigma}T=0\end{aligned}\right\} \tag{8-4}$$

上式的解答为

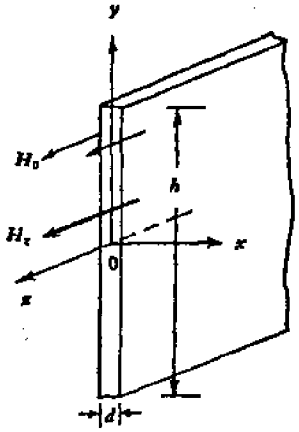


图 8-1　薄钢片中的磁场

$$\left.\begin{aligned} X_n &= A_n\cos\alpha_n x + B_n\sin\alpha_n x \\ T_n &= C_n e^{-\frac{\alpha_n^2}{\mu\sigma}t} \end{aligned}\right\} \tag{8-5}$$

上式为 $\alpha_n\neq 0$ 时的情况. 若 $\alpha_n=0$，$\frac{dT}{dt}=0$，可得稳态时的解答 H_s. 将各个特解线性叠加，最后可得

$$H_z = H_s + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2}{\mu\sigma}t}(D_n\cos\alpha_n x + E_n\sin\alpha_n x) \tag{8-6}$$

式中 D_n 和 E_n 为任意常数，可根据问题的边界条件和初始条件来确定.

下面先研究励磁电流开断时磁场的衰减过程.

（二）磁场的衰减过程

励磁电流开断时，本问题的边界条件和初始条件为：

1. 磁场分布应与通过薄片中央的 y 轴对称；即

$$H_z(x) = H_z(-x) \tag{8-7}$$

2. $t=\infty$时，钢片内各点的磁场强度应衰减到 0；即

$$H_z(x,\infty) = 0 \tag{8-8}$$

3. 励磁开断时（$t=0^+$），由于涡流的缘故，钢片内部各点的磁场强度仍保持为开断前的值 H_0；边界处$\left(x=\pm\frac{d}{2}\right)$的磁场，由于不受片内涡流的影响而立刻下降为 0；故 $t=0$ 时的初始条件为

$$\left.\begin{aligned} H_z\left(\pm\frac{d}{2},0\right) &= 0 \\ H_z(x,0) &= H_0 \qquad \text{内部各点} \end{aligned}\right\}. \tag{8-9}$$

根据条件 1，可知 $E_n=0$. 根据条件 2，可知 $H_s=0$. 根据条件 3 中的第一式，可知

$$\alpha_n = n\frac{\pi}{d}, \qquad n = 1,3,5,\cdots \tag{8-10}$$

于是

$$H_z = \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} D_n e^{-(n\frac{\pi}{d})^2\frac{1}{\mu\sigma}t}\cos n\frac{\pi}{d}x \tag{8-11}$$

根据条件 3 中的第二式，可知

$$H_0 = \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} D_n\cos n\frac{\pi}{d}x \tag{8-12}$$

故

$$D_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{n}H_0\sin n\frac{\pi}{2} \tag{8-13}$$

把 D_n 代入式(8-11)，最后可得

$$H_z(x,t) = \frac{4}{\pi}H_0\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}\cdot\cos n\frac{\pi}{d}x\cdot e^{-\frac{t}{T_n}} \tag{8-14}$$

式中 T_n 为时间常数，

$$T_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2\mu\sigma = \frac{1}{n^2}T_1, \qquad T_1 = \left(\frac{d}{\pi}\right)^2\mu\sigma \tag{8-15}$$

电流密度 J_y 则为

$$J_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4}{d}H_0 \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sin n\frac{\pi}{2} \cdot \sin n\frac{\pi}{d}x \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} \tag{8-16}$$

图 8-2 表示不同瞬间时 H_z 的分布曲线，图 8-3 表示 H_z 衰减时涡流电密 J_y 的分布.

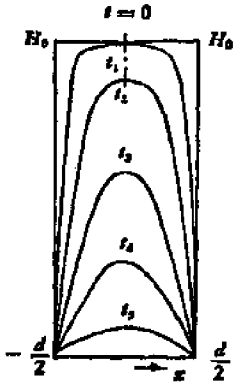


图 8-2 励磁电流开断时钢片内磁场的衰减情况

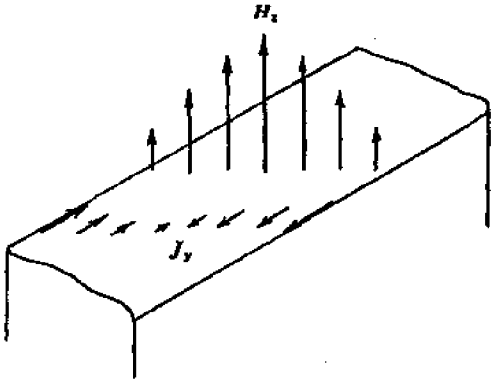


图 8-3 磁场衰减时钢片内涡流电密的分布

钢片内磁通量的衰减规律为

$$\Phi(t) = 2\mu_{Fe}h\int_0^{\frac{d}{2}} H_z(x,t)dx = \frac{8}{\pi}\mu_{Fe}hH_0 \sum_{n=1,3,5,\cdots} \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}\, e^{-\frac{t}{T_n}} \int_0^{\frac{d}{2}} \cos n\frac{\pi}{d}xdx$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\Phi_0 \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2}e^{-\frac{t}{T_n}} \tag{8-17}$$

或

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2}e^{-\frac{t}{T_n}} = 0.81\left(e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{9}e^{-9\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{25}e^{-25\frac{t}{T_1}} + \cdots\right) \tag{8-18}$$

式中 Φ_0 为励磁开断前钢片内的磁通量，$\Phi_0 = \mu_{Fe}H_0hd$. 当 $t = 3.5T_1$ 时，可以认为瞬态实际结束. 对于 0.5mm 厚，$\sigma = 10^7 \frac{1}{\Omega\text{-m}}$，$\mu_{Fe} \approx 1000\mu_0$ 的钢片，此时间约为 1.1ms.

（三）磁场的建立过程

进一步研究突加直流励磁时，钢片内磁场的建立过程.

本问题的初始条件和边界条件为：

1. 磁场分布与 y 轴对称，即

$$H_z(x) = H_z(-x) \tag{8-19}$$

2. $t = 0$ 时

$$\left.\begin{aligned} &H_z\left(\pm\frac{d}{2},0\right) = H_s \\ &H_z(x,0) = 0 \qquad \text{内部各点} \end{aligned}\right\} \tag{8-20}$$

3. $t = \infty$ 时，达到稳态，

$$H_z(x,\infty) = H_s \tag{8-21}$$

根据条件 1，可知 H_z 的通解式(8-6)中的 $E_n = 0$. 根据条件 3，可知

$$H_z = H_s + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\frac{a_n^2}{\mu\sigma}t}\cos a_n x \tag{8-22}$$

根据条件 2 中的第二式，可知

$$a_n = n\frac{\pi}{d}, \qquad n = 1,3,5,\cdots \tag{8-23}$$

根据条件 2 中的第一式，可知

$$0 = H_s + \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} D_n \cos n\frac{\pi}{d}x \tag{8-24}$$

故

$$D_n = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n}H_s \sin n\frac{\pi}{2} \tag{8-25}$$

把 D_n 和 a_n 代入式(8-22)，最后可得

$$\begin{aligned} H_z(x,t) &= H_s - \frac{4}{\pi}H_s \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{d}x \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} \\ &= \frac{4}{\pi}H_s \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{d}x \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_n}}) \end{aligned} \tag{8-26}$$

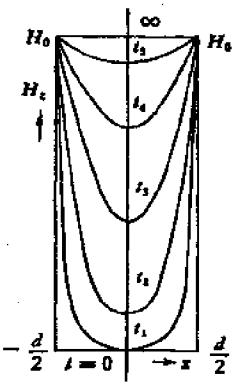


图 8-4　薄钢片中磁场的建立

式中时间常数 T_n 与式(8-15)相同.

电流密度 J_y 为

$$\begin{aligned} J_y &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ &= -\frac{4}{d}H_s \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sin n\frac{\pi}{2}\sin n\frac{\pi}{d}x \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} \end{aligned} \tag{8-27}$$

图 8-4 表示不同瞬间 H_z 的分布曲线.

钢片中磁通量的增长规律为

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 2\mu_{Fe}h\int_0^{\frac{d}{2}} H_z(x,\ t)\ dx \\ &= \frac{8}{\pi^2}\Phi_s \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_n}}\right) \end{aligned} \tag{8-28}$$

式中 $\Phi_s = \mu_{Fe}H_s dh$. 式(8-28)亦可写成

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_s} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_n}}\right) = 1 - 0.81e^{-\frac{t}{T_1}} - 0.09e^{-9\frac{t}{T_1}} - 0.0324e^{-25\frac{t}{T_1}} - \cdots \tag{8-29}$$

8-2　具有矩形截面的实心铁心中恒定磁场的建立和衰减[2—8]

图 8-5 表示一具有矩形截面的实心铁心. 现研究励磁开断或闭合时铁心内磁场的衰减和建立过程.

(一) 二维涡流方程及其解答

设磁场为 z 方向，H_z 为 x，y 和 t 的函数

$$\mathbf{H} = \mathbf{k}H_z, \qquad H_z = H_z(x,y,t)$$

则在瞬态中 H_z 应满足二维涡流方程

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \mu\sigma \frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (8\text{-}30)$$

上式可用分离变量法求解.

设 H_z 为 $X(x)$、$Y(y)$和 $T(t)$的乘积，

$$H_z = X(x)Y(y)T(t) \qquad (8\text{-}31)$$

把上式代入式（8-30），可得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \mu\sigma \frac{T'}{T} \qquad (8\text{-}32)$$

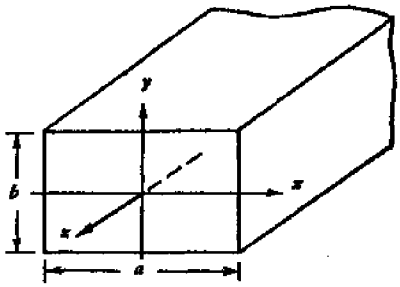


图 8-5　矩形截面的实心铁心

进一步令

$$\frac{X''}{X} = -\alpha_n^2, \qquad \frac{Y''}{Y} = -\beta_m^2 \qquad (8\text{-}33)$$

则

$$\frac{T'}{T} = -\frac{1}{\mu\sigma}(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \qquad (8\text{-}34)$$

式（8-33）和（8-34）的解答为

$$\left.\begin{aligned} X_n &= A_n\cos\alpha_n x + B_n\sin\alpha_n x \\ Y_m &= C_m\cos\beta_m y + D_m\sin\beta_m y \\ T_m &= E_m e^{-\frac{\alpha_n^2+\beta_m^2}{\mu\sigma}t} \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}35)$$

于是 H_z 的通解为

$$H_z(x,y,t) = H_s + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_n\cos\alpha_n x + B_n\sin\alpha_n x) \cdot (C_m\cos\beta_m y + D_m\sin\beta_m y)E_m e^{-\frac{\alpha_n^2+\beta_m^2}{\mu\sigma}t} \qquad (8\text{-}36)$$

（二）磁场的衰减过程

若 $t=0$ 时励磁电流开断，则初始条件和边界条件为

1. 磁场与 x 轴和 y 轴对称；即

$$H_z(x) = H_z(-x), \quad H_z(y) = H_z(-y) \qquad (8\text{-}37)$$

2. $t=0$ 时初始条件为

$$\left.\begin{aligned} &H_z\left(\pm\frac{a}{2},y,0\right) = 0, \quad H_z\left(x,\pm\frac{b}{2},0\right) = 0 \\ &H_z(x,y,0) = H_0(\text{铁心内部各点}) \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}38)$$

3. $t\to\infty$时，整个铁心内磁场为 0；即

$$H_z(x,y,\infty) = 0 \qquad (8\text{-}39)$$

根据条件 1 可知，$B_n=D_m=0$；根据条件 3，$H_s=0$，故

$$H_z(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K_{mn}\cos\alpha_n x\cos\beta_m y \cdot e^{-\frac{\alpha_n^2+\beta_m^2}{\mu\sigma}t} \qquad (8\text{-}40)$$

根据条件 2 可知，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= n\frac{\pi}{a}, \quad n = 1,3,5,\cdots \\ \beta_m &= m\frac{\pi}{b}, \quad m = 1,3,5,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{8-41}$$

同时

$$H_0 = \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} K_{mn}\cos n\frac{\pi}{a}x\cos m\frac{\pi}{b}y \tag{8-42}$$

故

$$K_{mn} = \frac{16}{\pi^2}H_0\frac{1}{mn}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{m\pi}{2} \tag{8-43}$$

把K_{mn}代入式(8-40)，可得

$$H_z(x,y,t) = \frac{16}{\pi^2}H_0\sum_{\substack{n=1,3,5,\cdots \\ m=1,3,5,\cdots}}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{mn}\sin n\frac{\pi}{2}\sin m\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{a}x\cos m\frac{\pi}{b}y\cdot e^{-\frac{t}{T_{mn}}} \tag{8-44}$$

式中时间常数T_{mn}为

$$T_{mn} = \frac{\mu\sigma}{\pi^2\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2\right]} \tag{8-45}$$

电流密度则为

$$J_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{16}{\pi b}H_0\sum_{\substack{n=1,3,5,\cdots \\ m=1,3,5,\cdots}}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}\sin m\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{a}x\sin m\frac{\pi}{b}y\cdot e^{-\frac{t}{T_{mn}}} \tag{8-46}$$

$$J_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{16}{\pi a}H_0\sum_{\substack{n=1,3,5,\cdots \\ m=1,3,5,\cdots}}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{m}\sin n\frac{\pi}{2}\sin m\frac{\pi}{2}\sin n\frac{\pi}{a}x\cos m\frac{\pi}{b}y\cdot e^{-\frac{t}{T_{mn}}} \tag{8-47}$$

铁心内磁通量Φ的衰减规律为

$$\Phi(t) = \mu_{Fe}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}H_z dxdy = \frac{64}{\pi^4}\Phi_0\sum_{\substack{n=1,3,5,\cdots \\ m=1,3,5,\cdots}}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}e^{-\frac{t}{T_{mn}}} \tag{8-48}$$

或

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} &= 0.657\sum_{\substack{n=1,3,5,\cdots \\ m=1,3,5,\cdots}}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{n^2m^2}e^{-\frac{t}{T_{mn}}} \\ &= 0.657\left(e^{-\frac{t}{T_{11}}}+\frac{1}{9}e^{-\frac{t}{T_{13}}}+\frac{1}{9}e^{-\frac{t}{T_{31}}}+\frac{1}{81}e^{-\frac{t}{T_{33}}}+\frac{1}{25}e^{-\frac{t}{T_{15}}}+\cdots\right)\end{aligned} \tag{8-49}$$

式中Φ_0为励磁开断前铁心内的磁通量，$\Phi_0=\mu_{Fe}H_0ab$. 图 8-6 和 8-7 分别表示H_z和Φ的衰减情况.

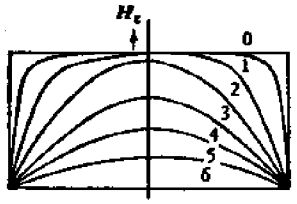


图 8-6 矩形截面的实心铁心内H_z的衰减

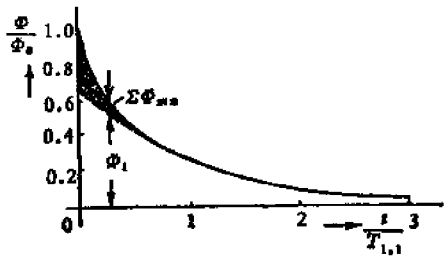


图 8-7 矩形截面的实心铁心内Φ的衰减

（三）磁场的建立过程

若 $t=0$ 时励磁电流接通，则初始条件和边界条件应为

$$\left.\begin{aligned} &H_z\left(\pm\frac{a}{2},y,0\right)=H_s,\quad H_z\left(x,\pm\frac{b}{2},0\right)=H_s \\ &H_z(x,y,0)=0 \qquad (\text{铁心内部各点}) \\ &H_z(x,y,\infty)=H_s \end{aligned}\right\} \tag{8-50}$$

式中 H_s 为磁场强度的稳态值.

根据磁场的对称性和上述初始条件、边界条件，可知

$$H_z(x,y,t)=H_s+\sum_{\substack{m\\ m=1,3,5,\cdots}}^{\infty}\sum K_{mn}\cos\alpha_n x\,\cos\beta_m y\cdot e^{-\frac{t}{T_{mn}}} \tag{8-51}$$

式中的 α_n、β_m 和 T_{mn} 与式(8-41)和(8-45)相同. K_{mn} 则为

$$K_{mn}=-\frac{16}{\pi^2}H_s\frac{1}{mn}\sin n\frac{\pi}{2}\sin m\frac{\pi}{2} \tag{8-52}$$

于是

$$H_z(x,y,t)=H_s-\frac{16}{\pi^2}H_s\sum_{\substack{n\\ m=1,3,5,\cdots}}^{\infty}\sum\frac{1}{nm}\sin n\frac{\pi}{2}\sin m\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{a}x\,\cos m\frac{\pi}{b}y e^{-\frac{t}{T_{mn}}} \tag{8-53}$$

磁通量的增长规律为

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_s}=1-0.657\sum_{\substack{n\\ m=1,3,5,\cdots}}^{\infty}\sum\frac{1}{n^2m^2}e^{-\frac{t}{T_{mn}}} \tag{8-54}$$

其中 $\Phi_s=\mu_{Fe}H_s ab$.

（四）磁路中具有气隙时

若实心磁路中具有气隙，则整个磁路的磁阻就要发生变化. 设气隙中的磁场分布与实心铁心中相同，且 $\delta\ll l_{Fe}$，则可用等效磁导率 μ_{eq} 来代替上述各式中的 μ_{Fe}

$$\mu_{eq}=\frac{l_{Fe}}{\dfrac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}}+\dfrac{\delta}{\mu_0}\dfrac{S_{Fe}}{S_\delta}} \tag{8-55}$$

式中 l_{Fe} 和 S_{Fe} 为实心磁路的长度和截面积，δ 和 S_δ 为气隙长度和截面积.

8-3 圆柱铁心内磁场的建立和衰减[1,8]

现在来研究图 8-8 所示圆柱形铁心的情况.

（一）圆柱坐标中一维涡流方程的解答

若磁场为 z 方向，$\mathbf{H}=\mathbf{a}_z H_z(r,t)$，则在瞬态过程中 H_z 应满足下列一维涡流方程

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r}=\mu\sigma\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{8-56}$$

上式可用分离变量法求解.

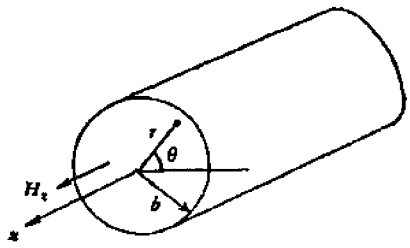


图 8-8　圆柱铁心内的磁场

设 H_z 为 R 和 T 的乘积，

$$H_z=R(r)\cdot T(t) \tag{8-57}$$

把上式代入式(8-56)，可得

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}=\mu\sigma\frac{T'}{T}=-k_n^2 \tag{8-58}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+k_n^2R=0\\&\frac{dT}{dt}+\frac{k_n^2}{\mu\sigma}T=0\end{aligned}\right\} \tag{8-59}$$

上式的解答为

$$\left.\begin{aligned}&R_n=A_nJ_0(k_nr)+B_nY_0(k_nr)\\&T_n=C_ne^{-\frac{k_n^2}{\mu\sigma}t}\end{aligned}\right\} \tag{8-60}$$

所以

$$H_z(r,t)=H_s+\sum_{n=1}^{\infty}[D_nJ_0(k_nr)+E_nY_0(k_nr)]e^{-\frac{k_n^2}{\mu\sigma}t} \tag{8-61}$$

式中 $J_0(kr)$和 $Y_0(kr)$分别为零阶第一类和第二类贝塞尔函数.

（二）磁场的衰减过程

若 $t=0$ 时励磁绕组突然开断，则初始条件和边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&H_z(r,0)=H_0,\quad H_z(b,0)=0\\&H_z(r,\infty)=0\end{aligned}\right\} \tag{8-62}$$

式中 b 的圆柱的半径，H_0 为开断前铁心中的磁场强度.

由于 $r=0$ 时，H_z 为有限，故 $E_n=0$. 由于 $t=\infty$时，$H_z=0$，故 $H_s=0$. 于是

$$H_z(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_nJ_0(k_nr)e^{-\frac{k_n^2}{\mu\sigma}t} \tag{8-63}$$

根据式(8-62)中的第二个条件，可知

$$J_0(k_nb)=0 \tag{8-64}$$

则

$$k_nb=x_n,\qquad 或\ k_n=\frac{x_n}{b} \tag{8-65}$$

x_n 为零阶贝塞尔函数 $J_0(x)=0$ 的根(图 8-9)，$x_1=2.405$，$x_2=5.520$，$x_3=8.654$，$x_4=11.792$，….

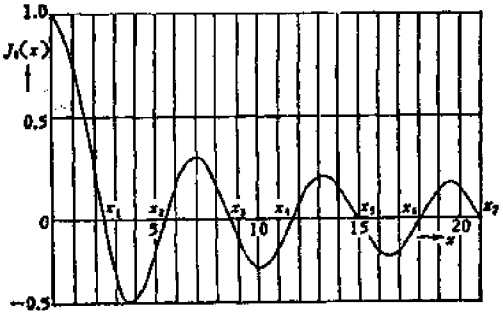


图 8-9　$J_0(x)=0$ 的根

根据式(8-62)中的第一个条件，可得

$$H_0=\sum_{n=1}^{\infty}D_nJ_0(k_nr) \tag{8-66}$$

故

$$D_n=\frac{2}{b^2J_1(k_nb)^2}\int_0^b rH_0J_0(k_nr)dr=\frac{2H_0}{x_n}\frac{1}{J_1(x_n)} \tag{8-67}$$

把 D_n 代入式(8-63)，可得

$$H_z(r,t)=2H_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}\frac{J_0\left(x_n\frac{r}{b}\right)}{J_1(x_n)}e^{-\left(\frac{x_n}{b}\right)^2\frac{1}{\mu\sigma}t} \tag{8-68}$$

磁通量 Φ 则为

$$\Phi(t)=\int_0^{2\pi}\int_0^b\mu_{Fe}H_z r\,dr\,d\theta=4\pi b^2\mu_{Fe}H_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}e^{-\left(\frac{x_n}{b}\right)^2\frac{1}{\mu\sigma}t} \tag{8-69}$$

或

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}e^{-\left(\frac{x_n}{b}\right)^2\frac{1}{\mu\sigma}t} \tag{8-70}$$

式中 $\Phi_0=\mu_{Fe}\pi b^2H_0$. 把式(8-70)展开，可得

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0}=0.692\,e^{-5.78\frac{1}{b^2\mu\sigma}t}+0.131e^{-30.5\frac{1}{b^2\mu\sigma}t}+0.053e^{-75\frac{1}{b^2\mu\sigma}t}+\cdots \tag{8-71}$$

(三) 磁场的建立过程

若 $t=0$ 时励磁电流接通，则初始条件和边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&H_z(r,0)=0,\qquad H_z(b,0)=H_s\\&H_z(r,\infty)=H_s\end{aligned}\right\} \tag{8-72}$$

式中 H_s 为铁心中磁场强度的稳态值.

H_z 的解答应为

$$\begin{aligned}H_z(r,t)&=H_s-2H_s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}\frac{J_0\left(x_n\frac{r}{b}\right)}{J_1(x_n)}e^{-\left(\frac{x_n}{b}\right)^2\frac{1}{\mu\sigma}t}\\&=2H_s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}\frac{J_0\left(x_n\frac{r}{b}\right)}{J_1(x_n)}\left(1-e^{-\left(\frac{x_n}{b}\right)^2\frac{1}{\mu\sigma}t}\right)\end{aligned} \tag{8-73}$$

式中 x_n 为 $J_0(x)=0$ 的根.

磁通量 $\Phi(t)$ 则为

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_s}=1-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}e^{-\left(\frac{x_n}{b}\right)^2\frac{1}{\mu\sigma}t} \tag{8-74}$$

式中 $\Phi_s=\mu_{Fe}H_s\pi b^2$.

8-4 电磁场瞬态的数值解法[9—13]

上面说明了电磁场瞬态的解析解法，本节将说明二维电磁场瞬态的数值解法. 为简单计，设介质为线性、均匀，其磁导率为 μ、电导率为 σ.

对于二维涡流场的瞬态问题，通常有以下两种情况：

(1)磁场仅有 z 向分量 $\mathbf{H}=\mathbf{k}H_z(x,y,t)$，涡流电密为二维平行平面场. 此时 H_z 满足

$$\frac{\partial^2H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2H_z}{\partial y^2}=\mu\sigma\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{8-75}$$

(2)向量磁位仅有 z 向分量 $\mathbf{A}=\mathbf{k}A_z(x,y,t)$，磁场为二维平行平面场. 此时 A_z 满足

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}=-\mu J_z+\mu\sigma\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{8-76}$$

式中 J_z 为源电流密度.

这两种情况可统一表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=p+\mu\sigma\frac{\partial u}{\partial t} \tag{8-77}$$

对情况(1)，$u=H_z$，$p=0$；对情况(2)，$u=A_z$，$p=-\mu J_z$. 设问题的初始条件和边界条件均已给定，下面来研究式(8-77)的数值解法.

(一) 有限差分法

为简单计，设求解域为一矩形，其宽度为 a，高度为 b，如图 8-10 所示；现用有限差分法来求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mu\sigma\frac{\partial u}{\partial t} \tag{8-78}$$

问题的初始条件和边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&t=0\text{ 时，}u(x,y,0)=u_0(x,y)\\&\text{在矩形周界上，}\quad u=u_1(x,y,t)\end{aligned}\right\}\tag{8-79}$$

把场域沿 x 方向等分成 N 格，每格步长为 h；沿 y 方向等分成 M 格，每格步长为 k；时间步长为 Δt；则域内任一点 x，y 和时间 t 可表示为

$$x=ih,\quad y=jk,\quad t=n\Delta t \tag{8-80}$$

时间为 t、坐标为 x，y 处的 u 值可表示为

$$u(x,y,t)=u(ih,jk,n\Delta t)=u_{i,j}^n \tag{8-81}$$

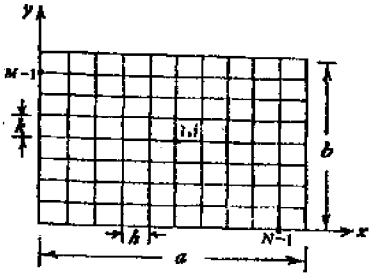


图 8-10 把矩形求解域沿 x 和 y 方向分别进行均匀剖分

显式格式 把式(8-78)的左端对坐标 x，y 进行离散，右端对时间 t 进行离散，可得式(8-78)的离散格式为：

$$\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j}^n-2u_{i,j}^n+u_{i+1,j}^n)+\frac{1}{k^2}(u_{i,j-1}^n-2u_{i,j}^n+u_{i,j+1}^n)=\frac{\mu\sigma}{\Delta t}(u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^n) \tag{8-82}$$

把上式进行整理，可得节点 i，j 处 u 的新值 $u_{i,j}^{n+1}$[即 $t=(n+1)\Delta t$ 时的 $u_{i,j}$值] 与时间为 $n\Delta t$ 时该点和周围四点的旧值之间的关系：

$$u_{i,j}^{n+1}=r_1u_{i-1,j}^n+r_1u_{i+1,j}^n+r_2u_{i,j-1}^n+r_2u_{i,j+1}^n+(1-2r_1-2r_2)u_{i,j}^n \tag{8-83}$$

式中 $r_1=\dfrac{\Delta t}{\mu\sigma h^2}$，$r_2=\dfrac{\Delta t}{\mu\sigma k^2}$. 这样，从初始条件和边界条件出发，对时间逐步推移，即可算出各个瞬间每个节点处的 u 值. 由于式 (8-83) 的右端均采用旧值，所以不用求解方程组即可直接求出各个节点处的新值，因此这种格式称为显式格式.

显式格式的优点是计算简单，缺点是它仅在

$$\frac{\Delta t}{\mu\sigma}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)\leqslant\frac{1}{2} \tag{8-84}$$

时，计算过程才是稳定的. 这样，当网格分得较细（即 h 和 k 较小）时，时间步长 Δt 要取得很小，使整个问题的计算时间很长；所以这种格式是一种低效格式，不太切合实用.

克兰克-尼古尔松法 如果把 $\nabla^2 u$ 的离散取为新值与旧值的平均值，则可得到

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h^2}(u^n_{i-1,j}-2u^n_{i,j}+u^n_{i+1,j})+\frac{1}{h^2}(u^{n+1}_{i-1,j}-2u^{n+1}_{i,j}+u^{n+1}_{i+1,j})\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k^2}(u^n_{i,j-1}-2u^n_{i,j}+u^n_{i,j+1})+\frac{1}{k^2}(u^{n+1}_{i,j-1}-2u^{n+1}_{i,j}+u^{n+1}_{i,j+1})\right]$$
$$=\frac{\mu\sigma}{\Delta t}(u^{n+1}_{i,j}-u^n_{i,j}) \tag{8-85}$$

把上式进行整理，使所有新值都移到等式的左边，旧值都移到等式右边，可得

$$-r_1u^{n+1}_{i-1,j}-r_1u^{n+1}_{i+1,j}-r_2u^{n+1}_{i,j-1}-r_2u^{n+1}_{i,j+1}+2(1+r_1+r_2)u^{n+1}_{i,j}$$
$$=r_1u^n_{i-1,j}+r_1u^n_{i+1,j}+r_2u^n_{i,j-1}+r_2u^n_{i,j+1}+2(1-r_1-r_2)u^n_{i,j} \tag{8-86}$$

这种方法就称为克兰克-尼古尔松(Crank-Nicolson)法.

克兰克-尼古尔松法的优点是，无论 h、k 和 Δt 取多大，计算过程总是稳定的；缺点是，此格式中每一节点的新值均与周围四点的新值有关，故每前进一个时间步长，就要解一次 $(N-1)\cdot(M-1)$ 阶代数方程组，因此较费时间.

交替方向法(ADI 法) 设 $t=n\Delta t$ 时各个节点处 u 的解答为已知，当 $t=(n+1)\Delta t$ 时，对左端项 $\nabla^2 u$ 中的 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 用隐式(即新值)表达，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 用显式(旧值)表达，得到一种离散格式；当 $t=(n+2)\Delta t$ 时，把 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 用显式(旧值)表达，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 用隐式(新值)表达，得到另一种离散格式；把这两种格式依次交替使用，每两步组成一个循环，这种方法就称为交替方向法.

具体来说，$t=(n+1)\Delta t$ 时，采用下列格式：

$$\frac{1}{h^2}[u^{n+1}_{i-1,j}-2u^{n+1}_{i,j}+u^{n+1}_{i+1,j}]+\frac{1}{k^2}[u^n_{i,j-1}-2u^n_{i,j}+u^n_{i,j+1}]=\frac{\mu\sigma}{\Delta t}(u^{n+1}_{i,j}-u^n_{i,j}) \tag{8-87}$$

即

$$-r_1u^{n+1}_{i-1,j}-r_1u^{n+1}_{i+1,j}+(1+2r_1)u^{n+1}_{i,j}=r_2u^n_{i,j-1}+r_2u^n_{i,j+1}+(1-2r_2)u^n_{i,j} \tag{8-88}$$

$t=(n+2)\Delta t$ 时，采用下式

$$\frac{1}{h^2}[u^{n+1}_{i-1,j}-2u^{n+1}_{i,j}+u^{n+1}_{i+1,j}]+\frac{1}{k^2}[u^{n+2}_{i,j-1}-2u^{n+2}_{i,j}+u^{n+2}_{i,j+1}]=\frac{\mu\sigma}{\Delta t}(u^{n+2}_{i,j}-u^{n+1}_{i,j}) \tag{8-89}$$

即

$$-r_2u^{n+2}_{i,j-1}-r_2u^{n+2}_{i,j+1}+(1+2r_2)u^{n+2}_{i,j}=r_1u^{n+1}_{i-1,j}+r_1u^{n+1}_{i+1,j}+(1-2r_1)u^{n+1}_{i,j} \tag{8-90}$$

由于交替计算，所以对矩形区域，不论 h、k 和 Δt 取多大，此法总是稳定的. 另外，在 $t=(n+1)\Delta t$ 时，方程(8-88)中只含有同一水平线上的三个新值，故每条水平线上的 $N-1$ 个节点各自单独组成一组 $N-1$ 阶的三对角方程组；由于整个场域内有 $M-1$ 条水平线，故每前进一个时间步长，需求解 $M-1$ 次 $N-1$ 阶三对角方程组. 同理，在 $t=(n+2)\Delta t$ 时，需求解 $N-1$ 次 $M-1$ 阶三对角方程组. 换言之，交替方向法把克兰克-尼古尔松法中每步需要求解一次 $(M-1)\cdot(N-1)$ 阶方程组，转化为求解 $M-1$ 次 $N-1$ 阶方程和求解 $N-1$ 次 $M-1$ 阶方程，使求解过程大为简化.

（二）有限单元法

电磁场的瞬态亦可以用有限元法来求解.此时整个离散过程一般分成两步来进行:第一步是把时间固定，用伽辽金法把原方程和边界条件在求解域内进行“部分”离散（即仅对空间坐标进行离散），由此可得一个以时间 t 为自变量的一阶矩阵常微分方程；第二步是，把此常微分方程组在时域内进行离散，并得到最终的离散格式. 具体过程如下.

用伽辽金法进行部分离散 前面提到，二维电磁场瞬态问题的微分方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=p+\mu\sigma\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{在 } G \text{ 内} \tag{8-91}$$

式中 $u=A_z$，$p=-\mu J_z$. 设问题的初始条件为

$$t=0 \text{ 时}, \qquad u=u_0(x,y) \qquad \text{在 } G \text{ 内} \tag{8-92}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} u&=u_1(x,y,t), \qquad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}\\ \frac{\partial u}{\partial n}&=q(x,y,t), \qquad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{8-93}$$

把整个求解域 G 剖分成 E 个三角形单元，在单元 e 内，磁位 u^e 可表示为

$$u^e(x,y,t)=\sum_{k=i,j,m}N_k^e(x,y)u_k^e(t) \tag{8-94}$$

式中 $N_k^e(x,y)$为单元 e 的形状函数；$u_k^e(t)$为单元 e 的三个节点上的磁位值. 在整个求解域 G 内，磁位 $u(x,y,t)$可表示为

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{N}N_k(x,y)u_k(t) \tag{8-95}$$

式中 $N_k(x,y)$为节点 k 的整体形状函数；$u_k(t)$为节点 k 的磁位值. 对式(8-91)和(8-93)进行加权积分，并取形状函数 N_l 作为权函数，经过运算和整理，即可得到瞬态问题的伽辽金加权余量表述为

$$\begin{aligned}&\iint_G\mu\sigma\frac{du}{dt}N_l dxdy+\iint_G\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy\\&=-\iint_G pN_l dxdy+\int_{\Gamma_2}qN_l dl \qquad (l=1,2,\cdots,N)\end{aligned} \tag{8-96}$$

或

$$\begin{aligned}&\sum_{e=1}^{E}\iint_{G_e}\mu_e\sigma_e\frac{du^e}{dt}N_l^e dxdy+\sum_{e=1}^{E}\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial u^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)dxdy\\&=-\sum_{e=1}^{E}\iint_{G_e}p_e N_l^e dxdy+\sum_{e=1}^{E2}\iint_{\Gamma_{2e}}q_e N_l^e dl\end{aligned} \tag{8-97}$$

再把式(8-94)代入上式，经过整理，可得 N 个联立方程，写成矩阵形式时有

$$\mathbf{H}\frac{\mathbf{du}}{dt}+\mathbf{Ku}=\mathbf{F} \tag{8-98}$$

式中 u 为节点磁位的总体列向量；H 和 K 分别为$\frac{\mathbf{du}}{dt}$和 u 的总体系数阵；F 为右端项总体列向量. H，K 和 F 是由单元系数阵 $\mathbf{h}^e$，$\mathbf{k}^e$ 和单元右端项列向量 $\mathbf{f}^e$ 经扩展成为单元贡献 $\mathbf{H}^e$，$\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$ 后，经累加而得；$\mathbf{h}^e$，$\mathbf{k}^e$ 和 $\mathbf{f}^e$ 分别为

$$\mathbf{h}^e=\begin{bmatrix} h_{ii}^e & h_{ij}^e & h_{im}^e \\ h_{ji}^e & h_{jj}^e & h_{jm}^e \\ h_{mi}^e & h_{mj}^e & h_{mm}^e \end{bmatrix},\qquad \mathbf{k}^e=\begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}^e=\begin{bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \\ f_m^e \end{bmatrix} \tag{8-99}$$

$\mathbf{h}^e$ 的元素为

$$h_{kl}^e=\iint_{G_e}\mu_e\sigma_e N_k^e N_l^e\,dxdy=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\mu_e\sigma_e\Delta_e, & \text{当 } k=l \text{ 时;}\\ \dfrac{1}{12}\mu_e\sigma_e\Delta_e, & \text{当 } k\neq l \text{ 时.}\end{cases}\qquad k,l=i,j,m \tag{8-100}$$

$\mathbf{k}^e$ 和 $\mathbf{f}^e$ 的元素与恒定磁场时相似，仅差一个 ν_e；即

$$k_{kl}^e=\iint_{G_e}\left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial N_l^e}{\partial x}+\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\right)dxdy=\frac{1}{4\Delta_e}(b_k b_l+c_k c_l)\qquad k,l=i,j,m \tag{8-101}$$

$$f_k^e=-\iint_{G_e}p_e N_l^e\,dxdy+\int_{\Gamma_{2e}}q_e N_l^e\,dl=\frac{1}{3}\mu_e J_{se}(t)\Delta_e+\frac{1}{2}q_e(t)L_e \tag{8-102}$$

式中 $J_{se}(t)$ 为单元 e 内源电密的瞬时值；L_e 为属于第二类边界的单元边长，对于内部单元或第一类边界单元，$L_e=0$.

式(8-98)是一个矩阵常微分方程，当 $t=0$ 时 $\mathbf{u}$ 的初值 $\mathbf{u}_0$ 给定，$\mathbf{u}$ 具有唯一解.

对时间 t 进行差分离散　式(8-98)既可用有限元法离散，亦可用差分法来离散. 把 $0\leqslant t\leqslant\infty$ 这一时域内分成许多时间节点和步长，并引入时域内的形状函数 $N^n(t)$，即可用有限元法进行离散.

如果时间步长 Δt 较小，可用克兰克-尼古尔松法对式(8-98)进行差分离散. 此时有

$$\frac{\mathbf{H}}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n)+\frac{1}{2}\mathbf{K}(\mathbf{u}^{n+1}+\mathbf{u}^n)=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{n+1}+\mathbf{F}^n) \tag{8-103}$$

上式可改写成

$$\left(\frac{\mathbf{H}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\mathbf{K}\right)\mathbf{u}^{n+1}+\left(-\frac{\mathbf{H}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\mathbf{K}\right)\mathbf{u}^n=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{n+1}+\mathbf{F}^n) \tag{8-104}$$

由此，从 $\mathbf{u}$ 的初始条件 $\mathbf{u}_0$ 出发，即可一步步地解出各个瞬间、场域内各点的磁位值.

更普遍地，设 $\mathbf{u}$、$\mathbf{f}$ 和 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ 用下式来近似：

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{u}\doteq\theta\mathbf{u}^n+(1-\theta)\mathbf{u}^{n+1},\qquad \mathbf{f}\doteq\theta\mathbf{f}^n+(1-\theta)\mathbf{f}^{n+1}\\ &\frac{d\mathbf{u}}{dt}\doteq\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\Delta t}\end{aligned}\right\} \tag{8-105}$$

式中 θ 为一可供选择的因子，$0\leqslant\theta\leqslant1$；则式(8-98)可离散为

$$\left[\frac{\mathbf{H}}{\Delta t}+(1-\theta)\mathbf{K}\right]\mathbf{u}^{n+1}+\left[-\frac{\mathbf{H}}{\Delta t}+\theta\mathbf{K}\right]\mathbf{u}^n=\theta\mathbf{f}^n+(1-\theta)\mathbf{f}^{n+1} \tag{8-106}$$

此法就称为 θ 法. 可以看出，当 $\theta=\dfrac{1}{2}$ 时，式 (8-106) 就退化为式 (8-104).

对于由有限元法离散所得到的矩阵方程 (8-98)，一般情况下为一刚性方程，因此式 (8-106) 中 θ 值的选择是很关键的. 从稳定性来看，由于克兰克-尼古尔松法的解答为无条件稳定，所以 θ 似应选为 $\dfrac{1}{2}$；但是当时间步长 Δt 较大时，解答会发生振荡，使精度受

到明显影响．为消除振荡，在满足稳定性的要求下，θ 可取在 0.2—0.4 范围内；具体大小由实际计算确定．

参 考 文 献

[1] R. Rudenberg, Transient Performance of Electric Power System, McGraw-Hill, 1950.

[2] R. Pohl, Rise of Flux Due to Impact Excitation: Retardation by Eddy Current in the Solid Part, Proc. IEE, pt Ⅰ, 1949.

[3] J. J. Brockman, C. E. Linkous, D-C Machines: Response to Impact Excitation, Trans. AIEE, pt Ⅱ, 1955.

[4] N. Kasavamurthy, P. K. Rajagopalan, Rise of Flux in Solid Iron Core Due to Impact Excitation, Proc. IEE, 106C, 1959.

[5] N. Kasavamurthy, P. K. Rajagopalan, Effect of Eddy Current on the Rise and Decay of Flux in Solid Magnetic Core, Proc. IEE, 109C, 1962.

[6] V. Subba Rao, Equivalent Circuit of Solid Iron Core for Impact Excitation Problems, Proc. IEE, No. 2, 1964.

[7] В. В. Фетинсов, Об эквивалентности массивного участка магнитопровода в системе короткозамкнутых катушек с расслоенным сердечникам, Труды ЛПИ, No. 209, 1960.

[8] Э. Г. Кашарский, Специальные вопросы расчета и исследования синхронных машин с массивным ротором, Изд. Наука, 1965.

[9] R. L. Stoll, The Analysis of Eddy Currents, Clarendon Press, 1974.

[10] O. C. Zienkiewicz, K. Morgan, Finite Elements and Approximation, John Wiley & Sons, 1983.

[11] A. Y. Hannalla, Numerical Analysis of Transient Field Problems in Electrical Machines, Proc. IEE, No. 9, 1976.

[12] A. Y. Hannalla, Sudden 3-phase Short Circuit Characteristics of Turbine Generators From Design Data Using Electromagnetic Field Calculations, Proc. IEE, pt. C, No. 4, 1980.

[13] A. Krowczyk, J. A. Tegopoulos, Numerical Modelling of Eddy Currents, Clarendon Press, 1993.

第九章　电磁力和电磁转矩

如所周知，由于切向电磁力(电磁转矩)的存在，旋转电机才能进行电能和机械能之间的转换. 对大型交流发电机，正常运行时电枢绕组在槽内和端部均受到一定的电磁力，在突然短路等瞬态过程中，这些力可以达到相当大的数值，对电机的安全运行影响很大. 所以在研究电机理论和运行问题时，常常要进行一系列有关电磁力的分析和计算.

从产生原因和性质上看，电磁力可分为两类：(1) 载流导体在磁场内所受到的力；(2) 磁质（在电机中主要是铁磁物质）在磁场内受到的力. 本章分别用安培定律、麦克斯韦应力法和虚位移法来计算这些力.

9-1　载流导体和铁磁物质在磁场中受到的电磁力[1—4]

(一) 载流导体在磁场中受到的力

载流导体在磁场中所受到的力，可以归结为导体内的自由电荷在磁场中所受到的有质动力. 单位体积内的力密度 $\mathbf{f}$ 由下式决定：

$$\mathbf{f}=\mathbf{J}\times\mathbf{B} \tag{9-1}$$

式中 $\mathbf{J}$ 为导体内的电流密度；$\mathbf{B}$ 为该点的磁感强度.

若载流导体为一截面很小的线电流，则作用于长度 $d\mathbf{l}$ 上的电磁力 $d\mathbf{F}$ 应为

$$d\mathbf{F}=id\mathbf{l}\times\mathbf{B}$$

整个导体上所受到的力 $\mathbf{F}$ 则为

$$\mathbf{F}=\int_l id\mathbf{l}\times\mathbf{B} \tag{9-2}$$

上式称为安培定律.

如果导体为无限长的长直导线，其长度方向与 z 轴平行，磁场为与 z 轴垂直的二维平行平面场，则式(9-2)可简化为

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{F}=i(\mathbf{l}\times\mathbf{B})=\mathbf{i}F_x+\mathbf{j}F_y\\&F_x=ilB_y\\&F_y=ilB_x\\&F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=ilB\end{aligned}\right\}\ (9\text{-}3)$$

式中 F_x 和 F_y 分别为电磁力的 x 和 y 分量；B_x 和 B_y 为磁感强度的 x 和 y 分量(图 9-1)，$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}$. 在极坐标中，$\mathbf{F}$ 亦可写成

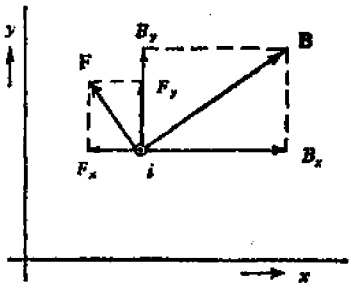


图 9-1　长直载流导线在磁场中所受到的力

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{a}_r F_r + \mathbf{a}_\theta F_\theta,\\ F_r &= ilB_\theta,\ F_\theta = ilB_r.\end{aligned}\right\} \tag{9-4}$$

式(9-3)就是电机工程中常用的毕-萨(Bio-Savart)定律. 电磁力的方向由左手定则确定.

若所研究的区域内有铁磁边界，则可用镜像法来计及铁磁边界对磁场的影响.

(二) 铁磁物质在磁场中受到的力

铁磁物质在磁场中所受到的力可归结为分子电流所受到的力. 如无永久磁矩，由磁场能量的表达式出发，通过虚位移法可以证明，当磁质为线性、且其中含有传导电流密度 **J** 时，力密度 **f** 应为

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu + \mathbf{f}'' \tag{9-5}$$

式中第一项 $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ 为作用于载流导体上的力；后二项为作用在磁质上的力. 其中 $-\frac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu$ 系由磁质内部各点和交界面处 μ 的变化所引起，该力的方向为从 μ 值大的地点指向 μ 值小的地点；若磁质为均匀，则在磁质内部 $-\frac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu=0$. $\mathbf{f}''$ 表示磁质在磁场内受到应力后发生变形，于是各个方面的 μ 值发生变化而引起的力，称为磁致伸缩力①. 若磁质变形时 μ 不发生变化，则 $\mathbf{f}''=0$. 由于 $\mathbf{f}''$ 被磁质内部的局部弹性应力所平衡，所以它只影响力的分布而不影响作用于整个磁质上的总力和总力矩；加上在简化的理想铁心模型中，可以认为磁质变形时 μ 并不随之而变化，因此在许多电工文献中，常把此项略去不计.

9-2 槽内载流导体所受到的径向电磁力[5—7]

电枢槽内导体所受到的电磁力可用毕-萨定律和镜像法来计算. 为简单起见，先设绕组为整距，槽内上、下层导体中的电流具有同一幅值和相位；然后进一步研究短距和磁饱和的影响.

(一) 绕组为整距，$\mu_{Fe}=\infty$时

在图 9-2 中，1 为原电流，Ⅰ、Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ表示四排镜像电流；带“,”的电流表示对右边的铁磁边界反射所得的镜像，带“-”的电流表示对左边的铁磁边界反射所得的镜像. Ⅱ、Ⅳ两排电流为Ⅰ、Ⅰ对槽底反射所得的镜像. 由于上、下层电流和镜像电流为同方向、同大小，所以上、下层导体将相互吸引、并一同受到一个推往槽底的径向电磁力. 把槽电流和镜像电流分成许多单元 Δi 和 Δi_n，则 Δi 与任一 Δi_n 之间的电磁力 ΔF_Δ 应为

$$\Delta F_\Delta = B \cdot \Delta i l = \left(\frac{\mu_0 \Delta i_n}{2\pi r}\right)\Delta i\, l \tag{9-6}$$

式中 r 为 Δi 与 Δi_n 之间的距离，$r=\sqrt{x^2+y^2}$；l 为导体的有效长度；$\Delta i_n=\frac{i_n}{b_{Cu}h_{Cu}}\Delta x\Delta y$，$b_{Cu}$

① $\mathbf{f}''$与磁场强度和$\frac{\partial\mu}{\partial\rho}$的关系，详见本章文献 [1].

和 h_{Cu} 为导体的宽度和高度.

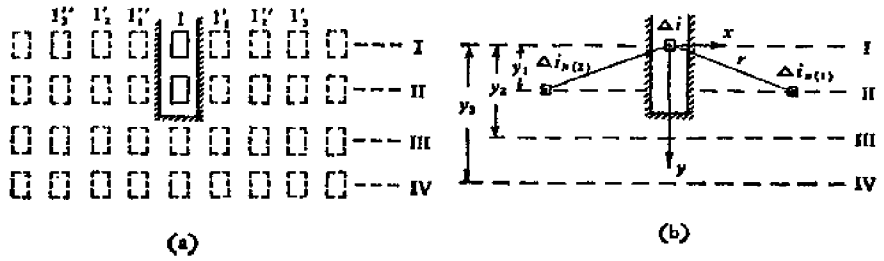


图 9-2 槽内导体及其镜像
(a) 原像和镜像；(b) 计算用坐标

由于镜像位置是对称的，所以一对对称的镜像电流 $\Delta i_{n(1)}$ 和 $\Delta i_{n(2)}$ 作用在 Δi 上的 x 方向合力为零；y 方向合力则为

$$\Delta F_y = 2F_\Delta \cos\alpha = 2F_\Delta \frac{y}{r} = \frac{\mu_0 \Delta i_n y}{\pi(x^2+y^2)} \Delta i \tag{9-7}$$

于是第二排整排电流对 Δi 所产生的合成 $\Delta F_{y(\sum)}$ 应为

$$\Delta F_{y(\sum)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_1-\frac{h_{Cu}}{2}}^{y_1+\frac{h_{Cu}}{2}} dF_y = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_1-\frac{h_{Cu}}{2}}^{y_1+\frac{h_{Cu}}{2}} \frac{\mu_0 y}{\pi(x^2+y^2)} \Delta i \frac{i_n}{b_{Cu} h_{Cu}} dx dy \tag{9-8}$$

式中 y_1 为第二排导体中心处的 y 坐标；x_{n-1} 和 x_n 为第二排中第 n 根导体两边的 x 坐标.

上式的积分比较复杂. 若近似认为整个槽宽 b_s 范围内电流为均匀分布，则原像和镜像将连成一条电流带；此时上式可近似写成

$$\begin{aligned}
\Delta F_{y(\sum)} &\approx \int_0^{\infty} \int_{y_1-\frac{h_{Cu}}{2}}^{y_1+\frac{h_{Cu}}{2}} \frac{\mu_0 y}{\pi(x^2+y^2)} \Delta i \frac{i_n}{b_s h_{Cu}} dx dy \\
&= \frac{\mu_0}{\pi} \Delta i \frac{i_n}{b_s h_{Cu}} \int_{y_1-\frac{h_{Cu}}{2}}^{y_1+\frac{h_{Cu}}{2}} \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{x}{y}\right]_{x=0}^{\infty} dy \\
&= \frac{\mu_0}{2} \frac{\Delta i \cdot i_n}{b_s}
\end{aligned} \tag{9-9}$$

从上式可见，$\Delta F_{y(\sum)}$ 仅与 Δi、i_n 和 b_s 有关，而与 i_n 与 Δi 之间的距离无关；所以第 I 排整个一排电流对上层导体所产生的电磁力 $F_{y(\sum)}$ 应为

$$F_{y(\sum)} = \frac{\mu_0}{2} \frac{i \cdot i_n}{b_s} = \frac{\mu_0}{2} \frac{i^2}{b_s} \tag{9-10}$$

式中镜像电流 $i_n = i$.

槽内上层导体上所受到的总电磁力，应为四排电流对该导体所产生的电磁力 $F_{\text{I}上层}$、$F_{\text{II}上层}$、$F_{\text{III}上层}$ 和 $F_{\text{IV}上层}$ 的合力；即

$$\begin{aligned}
F_{y(上层)} &= F_{\text{I}(上层)} + F_{\text{II}(上层)} + F_{\text{III}(上层)} + F_{\text{IV}(上层)} \\
&= 0 + F_{y(\sum)} + F_{y(\sum)} + F_{y(\sum)} = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 i^2}{b_s}
\end{aligned} \tag{9-11}$$

下层导体上所受到的电磁力则为

$$F_{y(下层)}=F_{Ⅰ(下层)}+F_{Ⅱ(下层)}+F_{Ⅲ(下层)}+F_{Ⅳ(下层)}$$

$$=-F_{y(\sum)}+0+F_{y(\sum)}+F_{y(\sum)}=\frac{\mu_0}{2}\frac{i^2}{b_s} \tag{9-12}$$

由于上层导体的电磁力亦要传到下层导体，所以下层导体上所受到的实际总压力 $\sum F_{y(下层)}$ 为

$$\sum F_{y(下层)}=F_{y(上层)}+F_{y(下层)}=2\frac{\mu_0 i^2}{b_s} \tag{9-13}$$

若 i 为直流，则导体上受到的力为一恒定力．对于交流电机，若 $i=I_m\sin\omega t$，则作用在导体上的电磁力将是脉振的；其最小值为 0，最大值为

$$\left.\begin{aligned} &F_{(上层)max}=\frac{3}{2}\frac{\mu_0 I_m^2}{b_s}, \qquad F_{(下层)max}=\frac{\mu_0}{2}\frac{I_m^2}{b_s}.\\ &\sum F_{(下层)max}=2\frac{\mu_0 I_m^2}{b_s}. \end{aligned}\right\} \tag{9-14}$$

平均值则为上式的 $\frac{1}{2}$．

（二）饱和与短距的影响

上面几个式子均未考虑饱和的影响．当齿部发生饱和时，$\mu_{Fe}\neq\infty$，镜像电流将小于原电流，因此电磁力应当比不计饱和时小．计及齿部饱和时，电磁力的饱和系数 k_F 可用数值法来确定．图 9-3 示出了用解析法近似算出的 $k_F=f(p)$，式中

$$p=2\frac{h_{Cu}}{b_s}\ln\frac{\mu_{Fe}+\mu_0}{\mu_{Fe}-\mu_0} \tag{9-15}$$

h_{Cu} 为槽内铜线的总高度；μ_{Fe} 为齿部的磁导率，由齿部的平均磁密 $B_{z(av)}$ 决定；

$$B_{z(av)}\approx\frac{1}{2}\mu_0\frac{i_{zmax}}{b_s} \tag{9-16}$$

i_{zmax} 为槽电流的最大值．

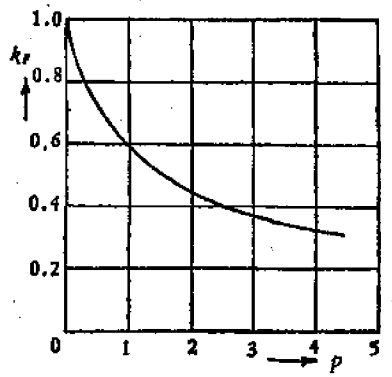


图 9-3 $k_F=f(p)$

从图 9-3 可见，随着齿部的饱和加深，μ_{Fe} 下降，$k_F<1$，电磁力将随之减少．当齿部高度饱和时，与不计饱和时相比较，电磁力可减小 1.5—1.7 倍．

对三相 60°相带绕组，当绕组为短矩、且 $\frac{2}{3}<\frac{y_1}{\tau}<1$ 时，一个极距内有 $3q\left(3\frac{y_1}{\tau}-2\right)$ 个槽的上、下层导体属于同一相；余下 $3q\left(3-3\frac{y_1}{\tau}\right)$ 个槽内，上、下层为异相．此时电磁力仍可用本法计算，不过对异相槽的上、下层电流及其镜像，应当用不同属相的电流代入．

槽内导体所受到的径向脉振电磁力可使线圈在槽部发生松动、磨损，在高电压的作

用下容易引起电晕，使绕组受到损伤．在大型交流发电机结构设计时，必须采取一定的措施，防止其松动．

9-3 旋转电机定、转子线圈间的切向电磁力[8]

先研究气隙为均匀，定子上仅有载流导线 α、转子上仅有载流导线 α' 时，定、转子间的切向电磁力(图 9-4)．

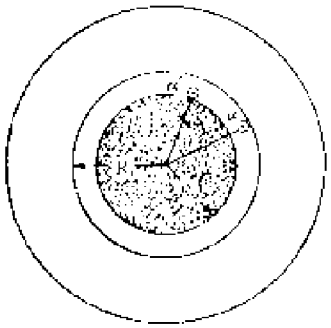


图 9-4 定、转子各有一根载流导体的情况

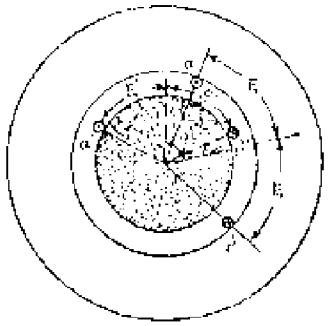


图 9-5 定、转子上各有一个载流线圈的情况

根据式(2-138)，i_α 在 α' 处所产生的径向磁感强度 B_r 为

$$B_r = -\frac{\mu_0 i_\alpha}{2\pi r}\sum_1^\infty \frac{R_\alpha^m}{a^m}\left(\frac{a^{2m}+R_1^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_0^m}+\frac{R_0^m}{r^m}\right)\sin m\theta\Big|_{r=b}$$

故作用在 $i_{\alpha'}$ 上的切向电磁力 $F_{t\alpha'}$ 应为

$$F_{t\alpha'} = B_r l i_{\alpha'} = -\frac{\mu_0 i_\alpha i_{\alpha'} l}{2\pi b}\sum_{m=1}^\infty \frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{a^{2m}+R_1^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{b^m}{R^m}+\frac{R_0^m}{b^m}\right)\sin m\theta \qquad (9\text{-}17)$$

上式中的负号表示，若 i_α 和 $i_{\alpha'}$ 为同向，则电磁力的方向为使 i_α 和 $i_{\alpha'}$ 相互吸引的方向．如导线 α' 在转子表面，α 在定子表面，$b\approx R_0$，$a\approx R_1$，上式就简化为

$$F_{t\alpha'} = -\frac{2\mu_0 i_\alpha i_{\alpha'} l}{\pi R_0}\sum_{m=1}^\infty \frac{R_0^m R_1^m}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\sin m\theta \qquad (9\text{-}18)$$

下面进一步来研究定子上有载流线圈 $\alpha\beta$，转子上有载流线圈 $\alpha'\beta'$ 的情况(图 9-5)．

根据式(2-143)，线圈 $\alpha\beta$ 在转子表面附近 ($r<a$) 处所产生的径向磁感强度 B_r 为

$$B_r = \frac{\mu_0 i}{\pi r}\sum_{m=1}^\infty \frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{r^m}{R_0^m}+\frac{R_0^m}{r^m}\right)k_{ym}\cos m\theta\Big|_{r=b}$$

由此可得线圈 $\alpha'\beta'$ 上所受到的切向电磁力 $F_{t\alpha'\beta'}$ 为

$$\begin{aligned} F_{t\alpha'\beta'} &= \frac{\mu_0 i i' l}{\pi b}\sum_{m=1}^\infty \frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{b^m}{R_0^m}+\frac{R_0^m}{b^m}\right)k_{ym} \\ &\quad\times[\cos m(\theta+\xi')-\cos m(\theta-\xi')] \\ &= -\frac{2\mu_0 i i' l}{\pi b}\sum_{m=1}^\infty \frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{b^m}{R_0^m}+\frac{R_0^m}{b^m}\right)k_{ym}k'_{ym}\sin m\theta \qquad (9\text{-}19) \end{aligned}$$

式中 k_{ym} 和 k'_{ym} 分别为定子和转子绕组的 m 次谐波节距因数. 若 $a\approx R_1$，$b\approx R_0$，则上式可简化成

$$F_{t\alpha'\beta'}=-\frac{8\mu_0 ii'l}{\pi R_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m R_1^m}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}k_{ym}k'_{ym}\sin m\theta \tag{9-20}$$

图 9-6 表示定、转子线圈均为整距时的 $F_{t\alpha'\beta'}=f(\theta)$，图 9-7 则是定、转子线圈节距均为 0.5τ 和定子线圈为整距、转子线圈节距为 0.5τ（或定子线圈节距为 0.5τ、转子线圈为整距）时的 $F_{t\alpha'\beta'}=f(\theta)$.

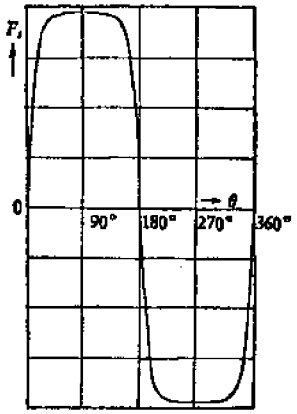


图 9-6 $2\xi=2\xi'=180°$ 时的 $F_{t\alpha'\beta'}=f(\theta)$

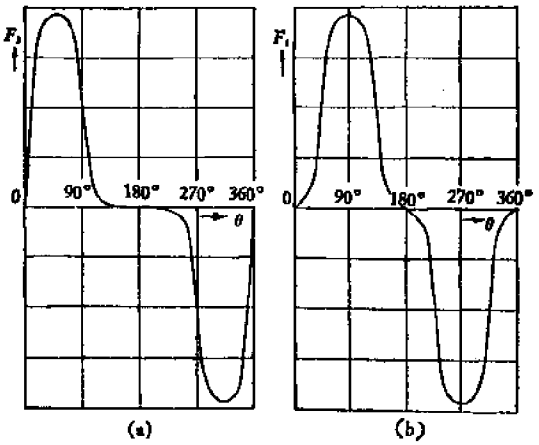


图 9-7 定、转子线圈节距均为 0.5τ（图 a）和定子整距、转子为 0.5τ（图 b）时的 $F_{t\alpha'\beta'}=f(\theta)$

若定子由 q 个线圈组成一个线圈组，转子由 q' 个线圈组成一个线圈组，不难证明，此时转子线圈上所受到的总电磁力 F_{tq} 应为

$$F_{tq}=-\frac{2\mu_0 qi\cdot q'i'l}{\pi b}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m}{a^m}\left(\frac{R_1^{2m}+a^{2m}}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}\right)\left(\frac{b^m}{R_0^m}+\frac{R_0^m}{b^m}\right)k_{wm}k'_{wm}\sin m\theta \tag{9-21}$$

式中 k_{wm} 和 k'_{wm} 分别为定子和转子绕组的 m 次谐波绕组因数. 若 $a\approx R_1$，$b\approx R_0$，则

$$F_{tq}=-\frac{8\mu_0 qq'ii'l}{\pi R_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_0^m R_1^m}{R_1^{2m}-R_0^{2m}}k_{wm}k'_{wm}\sin m\theta \tag{9-22}$$

9-4 电枢齿壁上所受到的切向电磁力

电枢开槽、载流导体放进槽内后，大部分切向力将转移到电枢齿壁上，导体上仅受到很小的切向电磁力.

根据式(9-5)，若不计 $\mathbf{f}''$，且铁内无传导电流，则 $\mathbf{f}=-\frac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu$，故作用在铁磁物质上的力主要由 μ 值随地点的变化而引起. 设齿内 $\mu=$常值，$\mathrm{grad}\mu=0$，故齿内将无力的作用. 在齿与空气的三个交界面 AB、BC 和 CD 处（图 9-8），μ 发生变化，出现了有质

动力. 这说明，在线性情况下，作用在齿上的力全部集中在齿壁和齿顶上.

若坐标轴线的取向如图 9-8 所示，则对齿顶表面，$\frac{\partial \mu}{\partial x}=0$，故 $f_x=0$，所以 BC 面上仅有法向力. 对齿壁两个面 AB 和 CD，$\frac{\partial \mu}{\partial y}=0$，故 $f_y=0$，所以作用在齿壁上的力，对齿壁而言为法向，对电枢而言则为纯切向力.

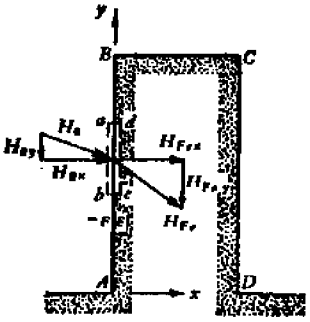


图 9-8　齿壁上的边界条件

考察图 9-8 中由面积 dS、厚度为 2ε 所组成的跨越交界面的体积元 $abcd$，作用在 $abcd$ 内的总力 dF 应为：

$$dF=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_x dS\cdot dx$$

$$=-\frac{1}{2}dS\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left(H^2\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)dx \tag{9-23}$$

式中 H 为齿壁处的磁场强度. 由齿壁处的边界条件可知

$$H_{0y}=H_{\mathrm{Fe}y},\qquad B_{0x}=B_{\mathrm{Fe}x}$$

而

$$B_{0x}=\mu_0 H_{0x},\qquad B_{\mathrm{Fe}x}=\mu_{\mathrm{Fe}}H_{\mathrm{Fe}x}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} H_0^2&=H_{0x}^2+H_{0y}^2=\left(\frac{B_{0x}}{\mu_0}\right)^2+H_{0y}^2\\ H_{\mathrm{Fe}}^2&=H_{\mathrm{Fe}x}^2+H_{\mathrm{Fe}y}^2=\left(\frac{B_{0x}}{\mu_{\mathrm{Fe}}}\right)^2+H_{0y}^2\end{aligned}\right\} \tag{9-24}$$

上式可统一地写成

$$H(x)^2=\left[\frac{B_{0x}}{\mu(x)}\right]^2+H_{0y}^2 \tag{9-25}$$

当 $x\geqslant 0$ 时，$\mu(x)=\mu_{\mathrm{Fe}}$，$H(x)=H_{\mathrm{Fe}}$；当 $x<0$ 时，$\mu(x)=\mu_0$，$H(x)=H_0$.

把式(9-25)代入式(9-23)，可得

$$dF=-\frac{1}{2}dS\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[\frac{B_{0x}^2}{\mu(x)^2}+H_{0y}^2\right]\frac{\partial \mu}{\partial x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}dS\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[-B_{0x}^2\frac{\partial\frac{1}{\mu}}{\partial x}+H_{0y}^2\frac{\partial \mu}{\partial x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{B_{0x}^2}{\mu(x)}-H_{0y}^2\mu(x)\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}dS$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{Fe}}}-\frac{1}{\mu_0}\right)B_{0x}^2-(\mu_{\mathrm{Fe}}-\mu_0)H_{0y}^2\right]dS$$

$$=-\frac{\mu_{\mathrm{Fe}}-\mu_0}{2\mu_{\mathrm{Fe}}\mu_0}\left[B_{0x}^2+\frac{\mu_{\mathrm{Fe}}}{\mu_0}B_{0y}^2\right]dS \tag{9-26}$$

式(9-26)前的负号表示 dF 的方向为与 x 轴相反的方向，即为从铁心指向空气的方向. 通常 $\mu_{Fe}\gg\mu_0$，磁力线进入齿壁时基本上垂直于齿壁，$B_{0y}\approx 0$，此时作用在齿壁单位面积上的电磁力就等于

$$\frac{dF}{dS}\approx\frac{\mu_{Fe}-\mu_0}{2\mu_{Fe}\mu_0}B_{0x}^2\approx\frac{1}{2\mu_0}B_{0x}^2 \tag{9-27}$$

9-5 磁场的张力张量[1—4]

为使分界面上的力和其他一些有质动力问题易于计算，常把磁场的有质动力 **f**(体积力)归结为与这些力等效的一组张力(面积力)，它以某一张力张量 **T** 来表征.

(一) 磁场的张力张量

张力张量 磁场的张力张量 **T** 与有质动力 **f** 等效. 所谓等效，就是指作用在给定体积 V 内磁质上的合力和力矩，恰好等于作用在包围 V 的 S 面上诸张力的合力和力矩；即

$$\mathbf{F}=\oint_S\mathbf{T}\cdot d\mathbf{S}=\int_V\mathbf{f}dV \tag{9-28}$$

或

$$\mathbf{f}=\mathrm{div}\mathbf{T} \tag{9-29}$$

式中 **T** 就称为磁场的张力张量，它是一个二阶张量，在三维直角坐标系中，它有 9 个分量

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}T_{xx} & T_{xy} & T_{xz}\\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz}\\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz}\end{bmatrix} \tag{9-30}$$

T 的散度是一个向量

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{T}=&\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\right)\mathbf{j}\\&+\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{9-31}$$

从式(9-5)可知，对简化的理想铁心模型，若不计 **f**″，则

$$\mathbf{f}=\mathbf{J}\times\mathbf{B}-\frac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu$$

由于 rot **H**=**J**，**J**×**B**=(μ rot **H**)×**H**=μ[(**H**·∇)**H**$-\frac{1}{2}\nabla(H^2)$]，故

$$\begin{aligned}\mathbf{f}&=\mu[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}]-\frac{1}{2}\mu\,\mathrm{grad}(H^2)-\frac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu\\&=\mu[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}]-\frac{1}{2}\mathrm{grad}(\mu H^2)\end{aligned}$$

因 div**B**=0，将上式加上(div**B**)**H**，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{f}&=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{H}+\mathbf{H}\mathrm{div}\mathbf{B}-\frac{1}{2}\mathrm{grad}(\mu H^2)\\&=\nabla\cdot(\mathbf{BH})-\frac{1}{2}\mathrm{grad}(\mu H^2)\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}(B_xH_x) + \frac{\partial}{\partial y}(B_xH_y) + \frac{\partial}{\partial z}(B_xH_z) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(BH)\right]\mathbf{i}$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(B_yH_x) + \frac{\partial}{\partial y}(B_yH_y) + \frac{\partial}{\partial z}(B_yH_z) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(BH)\right]\mathbf{j}$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(B_zH_x) + \frac{\partial}{\partial y}(B_zH_y) + \frac{\partial}{\partial z}(B_zH_z) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(BH)\right]\mathbf{k} \qquad (9\text{-}32)$$

把上式与式(9-30)对照，可知

$$\left.\begin{aligned} &T_{xx} = B_xH_x - \frac{1}{2}BH, \quad T_{yy} = B_yH_y - \frac{1}{2}BH, \quad T_{zz} = B_zH_z - \frac{1}{2}BH \\ &T_{xy} = T_{yx} = B_xH_y, \quad T_{xz} = T_{zx} = B_xH_z, \quad T_{yz} = T_{zy} = B_yH_z \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}33)$$

于是

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} B_xH_x - \frac{1}{2}BH & B_xH_y & B_xH_z \\ B_yH_x & B_yH_y - \frac{1}{2}BH & B_yH_z \\ B_zH_x & B_zH_y & B_zH_z - \frac{1}{2}BH \end{bmatrix} \qquad (9\text{-}34)$$

式(9-34)表示，**T** 是一个对称张量，因此通过坐标变换把 **T** 变换到主轴时，**T** 将成为对角线张量；其对角线分量 λ 可用下式求出：

$$\begin{vmatrix} \left(B_xH_x - \frac{1}{2}BH\right) - \lambda & B_xH_y & B_xH_z \\ B_yH_x & \left(B_yH_y - \frac{1}{2}BH\right) - \lambda & B_yH_z \\ B_zH_x & B_zH_y & \left(B_zH_z - \frac{1}{2}BH\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (9\text{-}35)$$

把上式展开，并考虑到 $H_x^2+H_y^2+H_z^2=H^2$，可得

$$8\lambda^3 + 4\mu H^2\lambda^2 - 2\mu^2H^4\lambda - \mu^3H^6 = 0$$

或

$$\left(\lambda - \frac{\mu}{2}H^2\right)\left(\lambda + \frac{\mu}{2}H^2\right)^2 = 0 \qquad (9\text{-}36)$$

由此可得

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{2}H^2, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\mu}{2}H^2 \qquad (9\text{-}37)$$

于是变换到主轴时有

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}BH & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}BH & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}BH \end{bmatrix} \qquad (9\text{-}38)$$

主轴的指向为：x' 轴与 **B** 平行，y' 轴和 z' 轴与 **B** 垂直．主轴上的张力称为主张力．式

(9-38) 表示，用主张力表示时，磁场的有质动力可以归结为与磁力线方向一致的张力 $\frac{1}{2}BH$，和垂直于磁力线方向的侧压力 $\frac{1}{2}BH$，如图 9-9 所示.

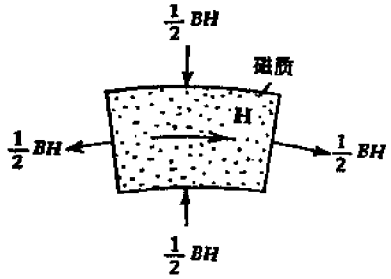


图 9-9　主张力

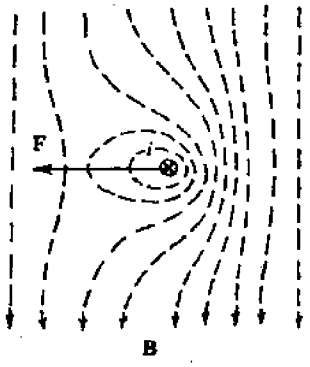


图 9-10　用麦克斯韦张力来解释载流导体在磁场中受到的力

上述张力张量首先由麦克斯韦提出，故通常称为麦克斯韦张力.

利用麦克斯韦张力的概念，可以较形象地解释一系列有质动力的现象. 例如载流导体置放在均匀磁场中时，导体一边的合成磁场较强，另一边较弱，于是作用在导体一边的侧压力大于另一边的侧压力，使导体上受到一个合成的电磁力，其方向为从磁场较强的地点指向磁场较弱的地点，如图 9-10 所示.

磁应力和总磁场力　若 $\mathbf{n}$ 为面积元 $d\mathbf{S}$ 的单位法向量，则作用在 dS 上的磁应力 $\mathbf{t}$（面积力）应为

$$\begin{aligned}\mathbf{t}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}=&\left[\left(B_xH_x-\frac{1}{2}BH\right)\mathbf{ii}+B_xH_y\mathbf{ij}+B_xH_z\mathbf{ik}\right.\\&+B_yH_x\mathbf{ji}+\left(B_yH_y-\frac{1}{2}BH\right)\mathbf{jj}+B_yH_z\mathbf{jk}+B_zH_x\mathbf{ki}\\&\left.+B_zH_y\mathbf{kj}+\left(B_zH_z-\frac{1}{2}BH\right)\mathbf{kk}\right]\cdot(\mathbf{i}n_x+\mathbf{j}n_y+\mathbf{k}n_z)\\=&\mathbf{B}H_xn_x-\frac{1}{2}BH\mathbf{i}n_x+\mathbf{B}H_yn_y-\frac{1}{2}BH\mathbf{j}n_y+\mathbf{B}H_zn_z-\frac{1}{2}BH\mathbf{k}n_z\\=&\mathbf{B}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})-\frac{1}{2}BH\mathbf{n}=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\mathbf{H}-\frac{1}{2}BH\mathbf{n}\end{aligned}\tag{9-39}$$

$\mathbf{t}$ 是一个向量. 把 $\mathbf{t}$ 分成法向分量 t_n 和切向分量 t_t，可知

$$t_n=\frac{1}{2\mu}(B_n^2-B_t^2),\qquad t_t=\frac{1}{2\mu}B_tB_n\tag{9-40}$$

作用在整个闭合曲面 S 上的总电磁力 $\mathbf{F}$ 应为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}=&\oint_S\mathbf{T}\cdot d\mathbf{S}=\oint_S\mathbf{t}dS\\=&\oint_S\left[(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\mathbf{H}-\frac{1}{2}BH\mathbf{n}\right]dS\end{aligned}\tag{9-41}$$

曲面 S 可以任选，只要包括磁场力所作用的整个磁质和载流导体即可.

若进一步考虑到磁质（铁心）的非线性，可以证明，磁应力 t 应是

$$\mathbf{t}=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\mathbf{H}-\mathbf{n}\int_0^H BdH \tag{9-42}$$

相应地，式(9-41)中的$\frac{1}{2}BH$项应当用$\int_0^H BdH$去代替.

（二）两种不同介质交界面上的电磁力

图 9-11 表示两种不同的介质形成交界面 S. 设介质 1 和 2 的磁导率分别为 μ_1 和 μ_2，其中的磁感强度为 B_1 和 B_2. 在交界面上取一小面积 dS，根据式 (9-40)，介质 1 内磁应力的切向和法向分量 t_{1t}和 t_{1n}应为

$$\left.\begin{aligned} t_{1t}&=\frac{1}{\mu_1}B_{1n}B_{1t}\\ t_{1n}&=\frac{1}{2\mu_1}(B_{1n}^2-B_{1t}^2)\end{aligned}\right\} \tag{9-43}$$

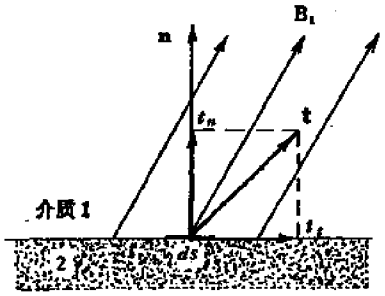


图 9-11　交界面上的磁应力

同理，介质 2 内磁应力的切向和法向分量 t_{2t} 和 t_{2n}为

$$\left.\begin{aligned} t_{2t}&=\frac{1}{\mu_2}B_{2n}B_{2t}\\ t_{2n}&=\frac{1}{2\mu_2}(B_{2n}^2-B_{2t}^2)\end{aligned}\right\} \tag{9-44}$$

所以作用在交界面上单位面积的切向和法向磁应力为

$$\left.\begin{aligned} t_t&=t_{1t}-t_{2t}=\frac{1}{\mu_1}B_{1n}B_{1t}-\frac{1}{\mu_2}B_{2n}B_{2t}\\ t_n&=t_{1n}-t_{2n}=\frac{1}{2\mu_1}(B_{1n}^2-B_{1t}^2)-\frac{1}{2\mu_2}(B_{2n}^2-B_{2t}^2)\end{aligned}\right\} \tag{9-45}$$

式中 B_{1n}、B_{2n}，B_{1t}、B_{2t}分别为 1 和 2 中磁感强度的法向和切向分量，其关系可根据边界条件确定. 下面分成两种情况来讨论.

交界面上无电流片时　此时交界面条件为

$$B_{1n}=B_{2n}=B_n,\qquad H_{1t}=H_{2t}=H_t$$

把上述关系代入式(9-45)，可得

$$\left.\begin{aligned} t_t&=0\\ t_n&=\frac{\mu_2-\mu_1}{2\mu_1\mu_2}(B_n^2+\mu_1\mu_2H_t^2)\end{aligned}\right\} \tag{9-46}$$

不难看出，上式与式(9-26)相同. 式(9-46)说明，当交界面上无电流片时，无论磁场是什么方向，交界面上仅有法向应力，其方向恒由 μ 大的介质指向 μ 小的介质.

若介质 1、2 均为非磁性物质，$\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$，则法向应力 $t_n=0$，磁场通过交界面时，dS 上不受到任何力. 若 1 为空气 $\mu_1=\mu_0$，2 为铁心 $\mu_2=\mu_{Fe}$，则磁力线进入铁心时基本垂直于铁心表面(图 9-12)，此时 $H_{2t}\approx0$，于是

$$t_n=\frac{\mu_{Fe}-\mu_0}{2\mu_{Fe}\mu_0}(B_n^2+\mu_{Fe}\mu_0H_t^2)\approx\frac{B_n^2}{2\mu_0} \tag{9-47}$$

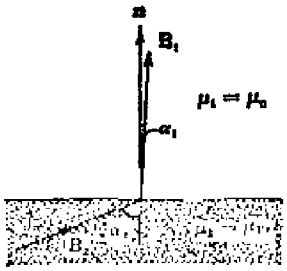


图 9-12　$\mu_1=\mu_0$，$\mu_2=\mu_{Fe}$时磁场的折射

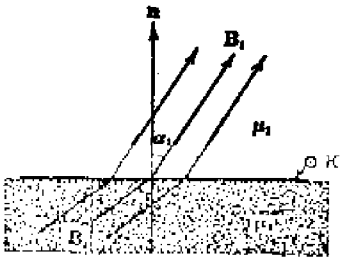


图 9-13　交界面上有电流片 K 时

交界面上有电流片时　此时边界条件为(图 9-13)

$$B_{1n} = B_{2n} = B_n, \qquad H_{1t} - H_{2t} = K$$

于是

$$\left.\begin{aligned} t_t &= B_{1n}H_{1t} - B_{2n}H_{2t} = B_n \cdot K \\ t_n &= \frac{1}{2\mu_1}(B_{1n}^2 - B_{1t}^2) - \frac{1}{2\mu_2}(B_{2n}^2 - B_{2t}^2) \\ &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1\mu_2}B_n^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 H_{2t}^2 - \mu_1 H_{1t}^2) \\ &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1\mu_2}B_n^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)H_{1t}^2 - \mu_2\frac{H_{1t} + H_{2t}}{2}K \end{aligned}\right\} \tag{9-48}$$

若 1、2 均为非磁性物质，则

$$\left.\begin{aligned} t_t &= B_n \cdot K \\ t_n &= -\frac{B_{1t} + B_{2t}}{2}K \end{aligned}\right\} \tag{9-49}$$

显然，上式与安培定律相符合.

若 1 为空气，2 为铁心，则

$$\left.\begin{aligned} t_t &= B_n \cdot K \\ t_n &\approx \frac{B_n^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\mu_{Fe}H_{1t}^2 - \mu_{Fe}\frac{H_{1t} + H_{2t}}{2}K \end{aligned}\right\} \tag{9-50}$$

此时法向应力中除$\frac{B_n^2}{2\mu_0}$项外，还有一项由电流片所引起的电磁力.

下面举例说明磁应力的应用.

9-6　载流导体置于槽内时作用在电枢上的切向电磁力[9—22]

当电枢表面为光滑时，作用在电枢上的切向电磁力完全集中在载流导体上. 电枢开槽、导体放入槽内后，情况发生很大变化. 由于齿部的磁导率要比槽部大很多，所以开槽以后槽内磁密较低，因此槽内载流导体上所受到的电磁力很小，此时切向电磁力将主要集中在电枢的齿壁上. 在第 9-4 节中，我们用磁质上受到的体积力初步分析了这一问题，现在用磁张力进一步来研究这一问题.

（一）电枢齿上的切向电磁力

图 9-14(a)和(b)分别表示空载和负载时主极和槽内载流导体所产生的磁场在气隙和槽内的分布情况. 在 μ=常值 的情况下，把这两个磁场叠加，可得负载时的合成磁场，如图 9-14(c)所示. 把图 9-14(a)和(c)加以比较，可以看出：空载时，左右齿壁上的磁场对称分布，磁场力互相平衡；负载时，气隙和槽内磁场发生畸变，左、右齿壁上的磁场不再对称，左齿壁上的磁应力大于右齿壁上的磁应力，于是整个齿上将受到一个切向的电磁力.

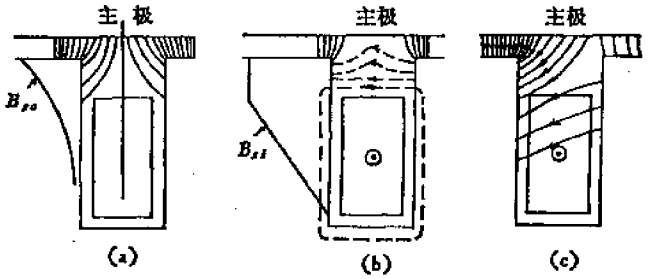


图 9-14　空载和负载时气隙和齿壁的磁场分布

(a) 空载时的主极磁场；(b) 槽电流产生的磁场；(c) 负载时的合成磁场

设 B_{s0}为空载时齿壁上的磁感强度，B_{si}为槽电流在齿壁处所产生的磁感强度；则负载时左齿上的磁感强度 $B_{s1}=B_{s0}+B_{si}$，右齿壁上的磁感强度 $B_{s2}=B_{s0}-B_{si}$，于是由式(9-47)可算出作用在左、右齿壁上的合成应力 t 为

$$t \approx \frac{1}{2\mu_0}(B_{s1}^2 - B_{s2}^2) = \frac{1}{2\mu_0}(B_{s1} + B_{s2})(B_{s1} - B_{s2})$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} 2B_{s0} \cdot 2B_{si} \tag{9-51}$$

作用在整个齿壁面上的切向电磁力 F 应为

$$F = \int_0^h t l dy = \frac{2}{\mu_0} l \int_0^h B_{s0} B_{si} dy \tag{9-52}$$

式中 h 为槽高，l 为电枢的有效长度. 为算出上式的积分值，应求出 B_{s0}和 B_{si}的表达式. 一般情况下这是很复杂的，下面研究一种简化情况.

空载磁场和槽电流所产生的磁场　设电枢的槽形很深 ($h\to\infty$)，载流导体放在槽底，此时可用保角变换法来求 B_{s0}和 B_{si}的分布. 图 9-15 表示 z 平面和 w 平面的对应关系. 由于对称关系，仅需研究图 9-15(a)中 y 轴右边的一半图形. 根据图 9-15 所示对应关系，可知$\frac{dz}{dw}$为

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{w} \sqrt{\frac{w-1}{w+s}} \tag{9-53}$$

式中 $s=\left(\frac{2\delta}{b_s}\right)^2$.

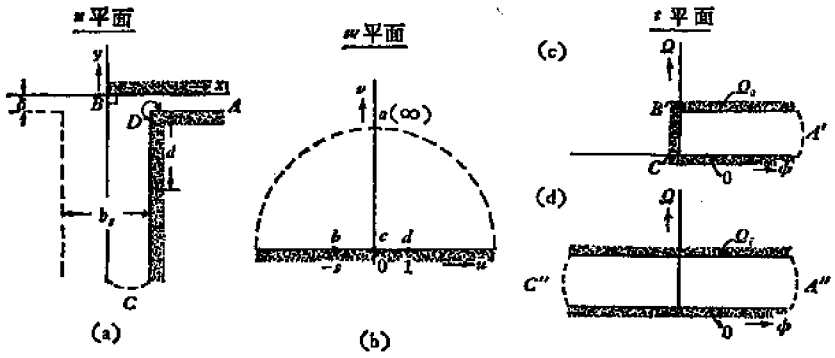


图 9-15 z-w-t 平面的对应关系

对空载情况：在 z 平面中 x 轴为等磁位面，磁位设为 Ω_0；y 轴为磁力线；齿顶和齿壁亦是等位面，磁位设为 0. 此时需要再进行一次许-克变换，才能在 t_1 平面内得到均匀磁场. 根据图 9-15(c)可知，

$$\frac{dt_1}{dw}=\frac{\Omega_0}{\pi}\frac{1}{w^{\frac{1}{2}}(w+s)^{\frac{1}{2}}} \tag{9-54}$$

于是空载时槽内的磁场为

$$\begin{aligned}B_0&=\mu_0\left|\frac{dt_1}{dz}\right|=\mu_0\left|\frac{dt_1}{dw}\frac{dw}{dz}\right|\\&=\mu_0\frac{\Omega_0}{\delta}\left|\sqrt{\frac{w}{w-1}}\right|=B_{\max}\left|\sqrt{\frac{w}{w-1}}\right|\end{aligned} \tag{9-55}$$

齿壁的磁感强度 B_{s0} 为

$$B_{s0}=B_{\max}\left|\sqrt{\frac{w}{w-1}}\right|_{0<w<1(w\text{为实数})} \tag{9-56}$$

由槽电流所产生的磁场：在 z 平面中 x 轴和 y 轴均为 0 磁位，电枢齿顶和齿壁为另一等位面，磁位为 Ω_i；因此应进行对数变换，使 t_2 平面内得到均匀磁场 [图 9-15(d)]

$$\frac{dt_2}{dw}=\frac{\Omega_i}{\pi}\frac{1}{w} \tag{9-57}$$

这样，槽电流产生的槽内磁场为

$$\begin{aligned}B_i&=\mu_0\left|\frac{dt_2}{dz}\right|=\mu_0\left|\frac{dt_2}{dw}\frac{dw}{dz}\right|\\&=\mu_0\frac{\Omega_i}{\delta}\left|\sqrt{\frac{w+s}{w-1}}\right|=\mu_0\frac{i}{2\delta}\left|\sqrt{\frac{w+s}{w-1}}\right|\end{aligned} \tag{9-58}$$

式中 i 为导体中的电流. 齿壁的磁感强度 B_{si} 为

$$B_{si}=\frac{\mu_0 i}{2\delta}\left|\sqrt{\frac{w+s}{w-1}}\right|_{0<w<1} \tag{9-59}$$

齿壁上的切向电磁力 把式(9-56)和(9-59)代入式(9-52)，可得作用在整个齿壁(包括左、右齿壁)上的切向电磁力 F 为

$$F=\frac{2}{\mu_0}l\int_{-\delta}^{-\infty}B_{x0}B_{xi}dy$$

$$=\frac{2}{\mu_0}l\int_1^0 B_{max}\left|\sqrt{\frac{w}{w-1}}\right|\cdot\frac{\mu_0 i}{2\delta}\left|\sqrt{\frac{w+s}{w-1}}\right|\cdot\frac{\delta}{\pi}\frac{1}{w}\sqrt{\frac{w+1}{w+s}}dw$$

$$=B_{max}il\frac{1}{\pi}\int_1^0\left|\frac{dw}{\sqrt{w(w-1)}}\right|=B_{max}il\frac{1}{\pi}\left[2\sin^{-1}\sqrt{w}\right]_1^0$$

$$=-B_{max}il \tag{9-60}$$

上式表示，作用在齿上的电磁力恰好等于光滑电枢时作用在载流导体上的电磁力. 由于槽形极深，槽底处的磁场 B_0 趋近于 0，故此时作用在槽底载流导体上的电磁力为零.

从槽口到深度 d 处齿壁上的切向电磁力 F_d 为

$$F_d=\frac{2}{\mu_0}l\int_{-\delta}^{-(\delta+d)}B_{x0}B_{xi}dy=\frac{1}{\pi}F\left[2\sin^{-1}\sqrt{w}\right]_1^w$$

$$=F\left(\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{w}-1\right)\qquad 0<w<1 \tag{9-61}$$

d 与 w 的关系可由式（9-53）的积分确定：

$$\frac{d}{\delta}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\text{th}^{-1}\sqrt{\frac{s(1-w)}{s+w}}-\text{tg}^{-1}\sqrt{\frac{1-w}{s+w}}\right]\qquad 0<w<1 \tag{9-62}$$

由此即可算出不同$\frac{b_s}{\delta}$时的 $F_d=f\left(\frac{d}{\delta}\right)$，如图 9-16 所示. 从图 9-16 可见，80%以上的切向电磁力将集中在离槽口一个气隙深的范围内；槽宽 b_s 愈窄，集中愈甚.

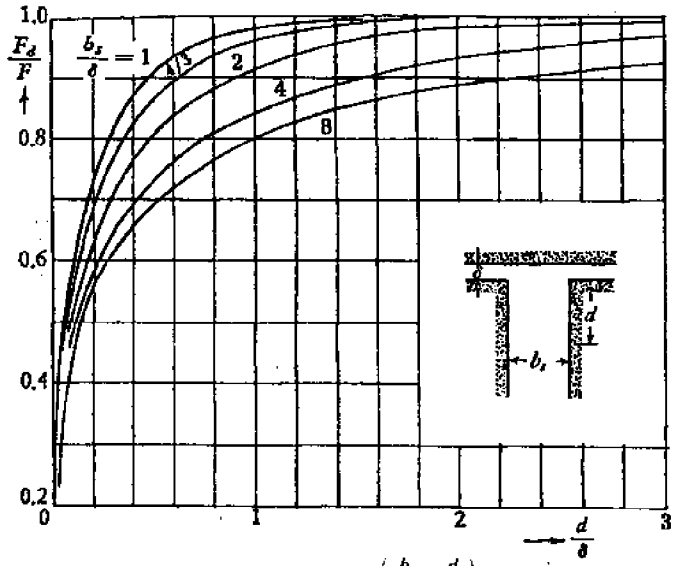


图 9-16 $F_d=f\left(\frac{b_s}{\delta},\frac{d}{\delta}\right)$

（二）槽内线电流所受到的切向力

再来研究线电流在槽内所受到的切向电磁力.

从式(9-55)可知，主极在槽内产生的磁感强度 B_0 为

$$B_0 = B_{max}\left|\sqrt{\frac{w}{w-1}}\right|$$

设载流导体位于槽中心线上，则导体上所受到的切向力 F_i 应为

$$F_i = B_{0(x=0)}li = B_{max}li\left|\sqrt{\frac{w}{w-1}}\right|_{-s<w<0}$$

$$= F_{i0}\left|\sqrt{\frac{w}{w-1}}\right|_{-s<w<0} \tag{9-63}$$

式中 F_{i0} 为导线在光滑电枢上时所受到的力，$F_{i0}=B_{max}li$. y 与 w 之间的关系为

$$\frac{y}{\delta} = 1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\text{th}^{-1}\sqrt{\frac{s+w}{s(1-w)}} + \text{tg}^{-1}\sqrt{\frac{1-w}{s+w}}\right] \tag{9-64}$$

式中 $s=\left(\frac{2\delta}{b_s}\right)^2$. 根据式(9-63)和(9-64)，即可算出不同 $\frac{\delta}{b_s}$ 时的 $F_i=f(y)$，如图 9-17 所示.

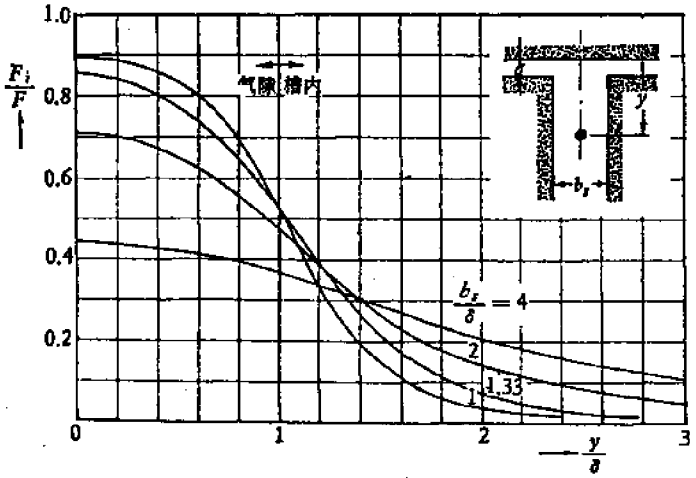


图 9-17 $F_i=f\left(\frac{b_s}{\delta}, \frac{y}{\delta}\right)$

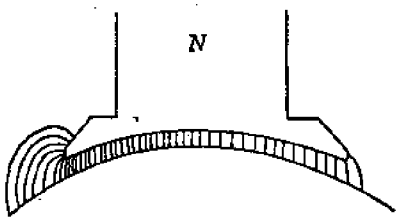


图 9-18 负载时直流电机下的磁场分布

从图 9-17 可以看出，当载流导体进入槽内时，由于齿的屏蔽作用，导体上所受到的力急骤下降；槽愈窄，下降得愈快. 例如，当 $\frac{b_s}{\delta}=4$、$d\approx 2\delta$ 时，导体上的切向力将下降到 F_{i0} 的 10%左右. 由此可知，在实际电机中，槽内导体上所受到的切向电磁力很小，切向电磁力和电磁转矩几乎全部作用在齿壁上.

综合以上两种简化情况的分析，可知负载时电枢上的电磁力主要作用在齿壁的上端，导体上所受到的切向电磁力很小；载流导体放得愈深，导体上的切向力就愈小，当移到

“足够”深度时，导体上的切向力将实际为 0.

对于直流电机和同步电机，负载时由于电枢反应的作用，使气隙磁场发生畸变，主极的一个极尖上磁场增强，一个极尖上磁场削弱，于是左、右两个极尖侧面上所受的磁应力互不相等，使主极受到一个“反作用”的切向电磁力. 若主极上装有补偿绕组，则此切向电磁力将从极尖侧面转移到埋置补偿绕组的槽内齿壁上.

（三）单槽电枢上的总切向电磁力

图 9-19 表示一个开有一个槽的电枢. 下面来证明，无论槽形是什么形状，载流导体在槽内怎样置放，开槽以后，作用在电枢上的总切向电磁力恒等于光滑电枢时作用在载流导体上的力.

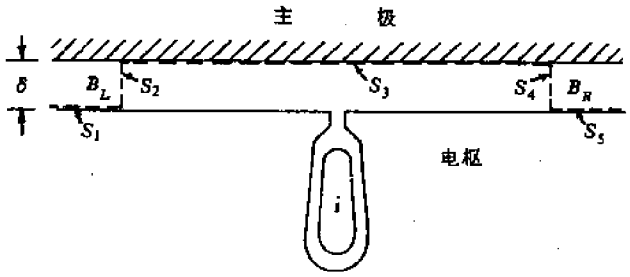


图 9-19　单槽电枢

设铁心的磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$，未开槽时主极在气隙内产生的磁感强度为 B_0. 开槽以后，在距离槽口足够远的距离处，主极在气隙内产生的磁感强度可认为仍是 B_0；槽内载流导体在该处所产生的磁场为 B_i，$B_i=\mu_0\frac{i}{2\delta}$. 于是，在离槽中心线足够远的左、右两边，气隙内的合成磁感强度将为

$$B_L = B_0 + B_i \qquad B_R = B_0 - B_i \tag{9-65}$$

在气隙内作闭合曲面 S，使它包含整个电枢，且使部分曲面 S_1 和 S_5 与电枢表面重合，S_3 与主极表面重合，S_2 与 S_4 在距槽中心足够远处垂直地通过气隙. 由于主极和电枢表面不存在电流片，所以在 S_1、S_3 和 S_5 这三个面上没有切向磁应力. 在 S_2 和 S_4 这两个面上，法向磁应力为

$$\left.\begin{aligned} t_{2n} &= \frac{1}{2\mu_0}(-B_L^2) = -\frac{1}{2\mu_0}(B_0+B_i)^2 \\ t_{4n} &= \frac{1}{2\mu_0}(-B_R^2) = -\frac{1}{2\mu_0}(B_0-B_i)^2 \end{aligned}\right\} \tag{9-66}$$

t_{2n}、t_{4n}对 S_2 和 S_4 是法向应力，对电枢来说则是与旋转方向一致（或相反）的切向力. 这样，作用在整个 S 面上的切向电磁力将等于

$$\begin{aligned} F &= (t_{4n}-t_{2n})\delta l = -\frac{1}{2\mu_0}[(B_0-B_i)^2-(B_0+B_i)^2]\delta l \\ &= \frac{1}{2\mu_0}4B_0B_i\delta l = \frac{2}{\mu_0}B_0\left(\mu_0\frac{i}{2\delta}\right)\delta l = B_0 i l \end{aligned} \tag{9-67}$$

即与光滑电枢时的切向电磁力相同.

9-7 用虚位移法求机-电系统中的电磁力[23—25]

对含有铁心的、以磁场作为耦合场的机电系统，作用于电路和铁心上的总电磁力亦可以用虚位移法求出.

（一）以磁链和位移为独立变量时电磁力的表达式

设所研究的机电装置有 n 个电端口和 m 个机械端口. 先把系统中的损耗部分（电阻、摩擦力等）移出，使机电耦合部分成为无损耗的保守系统，如图 9-20 所示. 再设变量之间的函数关系均为单值，则系统的磁场储能 W_m 就成为该保守系统的状态函数，它仅与系统各变量的终值有关，而与达到终值的途径及系统过去的历史无关. 把磁链 ψ 和位移 x 作为状态变量，磁场储能为

$$W_m = \sum_1^n \int_0^{\psi_i} i_i d\psi_i' = W_m(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n; x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{9-68}$$

设在时间 dt 内，第 k 个机械端口发生虚位移 dx_k，其他端口不动，下面来分析整个系统能量的变化.

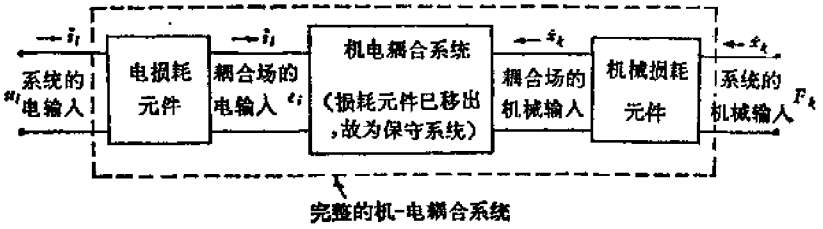


图 9-20 机电系统示意图

由于机-电耦合部分是一个保守系统，根据能量守恒原理，在时间 dt 内输入耦合场的电能 dW_e，应当等于耦合场内磁场储能的变化 dW_m 加上机械能的变化 dW_Ω，即

$$dW_e = dW_m + dW_\Omega \tag{9-69}$$

设第 i 个电路中的感应电势、电流和磁链分别为 e_i、i_i 和 ψ_i，则输入耦合场的电能 dW_e 应为

$$dW_e = \sum_{i=1}^n i_i e_i dt = \sum_1^n i_i \frac{d\psi_i}{dt} dt = \sum_1^n i_i d\psi_i \tag{9-70}$$

设作用在第 k 个机械端口上的电磁力为 F_k，则系统内机械能的变化 dW_Ω 应为

$$dW_\Omega = F_k dx_k \tag{9-71}$$

于是磁场储能的变化 dW_m 为

$$dW_m = \sum_{i=1}^n i_i d\psi_i - F_k dx_k \tag{9-72}$$

从式(9-68)可知，磁场储能是各个 ψ_i 和 x_k 的函数，所以全微分 dW_m 可以写成

$$dW_m = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial \psi_i} d\psi_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial x_j} dx_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W_m}{\partial \psi_i} d\psi_i + \frac{\partial W_m}{\partial x_k} dx_k \tag{9-73}$$

由于$\frac{\partial W_m}{\partial \psi_i} = i_i$，把式(9-73)和(9-72)加以比较，可知

$$F_k = -\frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial x_k} \tag{9-74}$$

上式就是用 ψ 和 x 作为独立变量时，电磁力的表达式.

（二）以电流和位移为独立变量时电磁力的表达式

若用电流 i 和位移 x 作为状态变量，则引入磁共能来计算电磁力较为方便. 磁共能 W'_m 的定义为

$$W'_m(i, x) = \sum_{i=1}^{n} i_i \psi_i - W_m(\psi, x) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{i_i} \psi_i di_i \tag{9-75}$$

磁共能亦是状态函数，对于一个电端口的系统，其意义如图 9-21 所示.

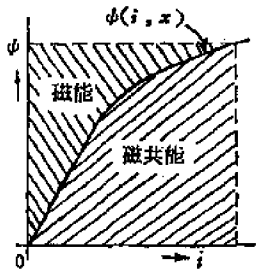


图 9-21　磁能和磁共能的关系

引入磁共能后，

$$dW'_m(i, x) = \sum_{i=1}^{n} d(i_i \psi_i) - dW_m(\psi, x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i_i d\psi_i + \sum_{i=1}^{n} \psi_i di_i - dW_m(\psi, x) \tag{9-76}$$

于是第 k 个机械端口作虚位移 dx_k 时，能量守恒原理可写成

$$dW'_m = \sum_{i=1}^{n} \psi_i di_i + F_k dx_k \tag{9-77}$$

把全微分 dW'_m 用偏导数的形式表出

$$dW'_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W'_m}{\partial i_i} di_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial W'_m}{\partial x_j} dx_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W'_m}{\partial i_i} di_i + \frac{\partial W'_m}{\partial x_k} dx_k \tag{9-78}$$

由于$\frac{\partial W'_m}{\partial i_i} = \psi_i$，把式(9-78)和(9-77)加以比较，可知

$$F_k = \frac{\partial W'_m(i, x)}{\partial x_k} \tag{9-79}$$

上式就是用电流和位移作为独立变量时，电磁力的表达式.

（三）应用电磁力公式时需要注意的问题

式(9-74)和(9-79)都是用虚位移法导出，应用此二式时要注意以下问题：

1. 前式是用 ψ、x 作为独立变量，用磁能的偏导数求出 F_k；后式是用 i、x 作为独立变量，用磁共能的偏导数求出 F_k. 具体计算时采用哪个式子，要看系统的原始表述情况和希望 F_k 这个式子用 i 还是用 ψ 来表达而定.

2. 两个式子的正、负号不同. 前式表示，电磁力为倾使在恒磁链情况下磁能达到最

小值的方向；后式表示，电磁力为倾使在恒电流情况下磁共能达到最大值的方向.

3. 两个公式都是普遍的，并不涉及在物理状态下电流及磁链是否需要保持为常值. 公式中对 x_k 取偏导数时其他的 x 和 ψ（或 i）应保持不变，这是选择独立变量所带来的数学制约，并非对物理状态的制约，这一点不应误解。当然，在某些情况下，物理状态的制约可能恰好与数学上的制约一致；例如在某些过程中，$d\psi=0$，于是电源和磁场之间就没有能量交换，能量转换仅在磁场和力学系统中进行，此时电磁力就等于磁能对位移的负变化率. 对恒电流过程，亦有类似的情况.

表 9-1　用磁场作为耦合场时的电磁力

磁场储能	$W_m=\sum_1^n\int_0^{\psi_i} i_i d\psi_i$
磁共能	$W'_m=\sum_1^n\int_0^{i_i} \psi_i di_i$
磁能与磁共能的关系	$W_m+W'_m=\sum_1^n i_i\psi_i$
作虚位移 dx_k 时能量守恒	$\sum_1^n i_i d\psi_i=dW_m+F_k dx_k$

独立变量	从磁能计算力	从磁共能计算力
电流 i_i，坐标 x_j		$F_k=\dfrac{\partial W'_m}{\partial x_k}$
磁链 ψ_i，坐标 x_j	$F_k=-\dfrac{\partial W'_m}{\partial x_k}$	

（四）电磁转矩

以上研究的是平移的情况. 对转动情况，虚位移将是角虚位移 $d\theta_k$，相应地，电磁力将变成电磁转矩 T_m. 此时式(9-74)和(9-79)应改成

$$T_m=-\frac{\partial W_m(\psi,\theta)}{\partial \theta_k},\quad 或\quad T_m=\frac{\partial W'_m(i,\theta)}{\partial \theta_k} \tag{9-80}$$

上面的式子对线性和非线性系统都适用. 对于线性系统，ψ 正比于 i，系统的电感系数与 i、ψ 无关，于是磁能和磁共能二者相等，

$$W_m=W'_m=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}L_{ir}i_i i_r \tag{9-81}$$

电磁转矩 T_m 则等于

$$T_m=\frac{\partial W'_m}{\partial \theta_k}=\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n i_i i_r\frac{\partial L_{ir}}{\partial \theta_k} \tag{9-82}$$

9-8　交流电机的电磁转矩[23,25—27]

下面用虚位移法导出交流电机的电磁转矩公式.

（一）场的观点

先从场的观点导出用气隙磁场和转矩角表示时交流电机的电磁转矩.

设定子三相合成磁势的幅值为 F_1，转子合成磁势的幅值为 F_2，定、转子磁势在气隙中均为正弦分布，从而可用空间向量表示，如图 9-22 所示．此时气隙合成磁势的幅值 F 应为

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta_{12} \tag{9-83}$$

式中 θ_{12} 为定、转子磁势轴线的空间夹角(电角)．若气隙为均匀，$\mu_{Fe}=\infty$，且认为气隙磁场为纯径向，则气隙磁感强度 B_m 应为

$$B_m \approx \mu_0 \frac{F}{\delta} \tag{9-84}$$

式中 δ 为气隙长度．气隙内的磁共能为

$$W'_m = \frac{1}{2\mu_0}(B^2)_{av}V_\delta = \frac{1}{2\mu_0}\frac{B_m^2}{2}\pi Dl\delta$$

$$= \frac{\mu_0\pi Dl}{4\delta}(F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta_{12}) \tag{9-85}$$

式中 V_δ 表示气隙的体积；D 为定子内径，l 为铁心的有效长度．

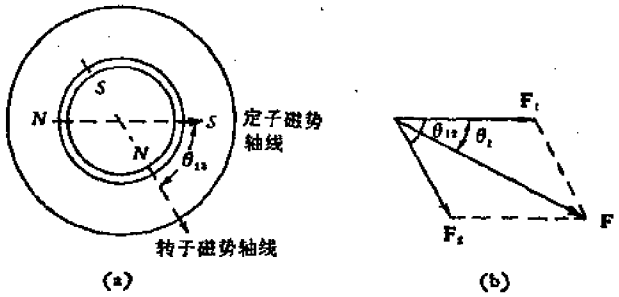


图 9-22　交流电机的定、转子磁势

式(9-85)表示，磁共能 $W'_m = W'_m(i_1, i_2, \theta_{12})$．当转子作角虚位移 $d\theta_k$ 时（机械角），定、转子磁势间的夹角将发生 $d\theta_{12}$ 的变化（电角），$d\theta_{12} = pd\theta_k$，$p$ 为极对数．于是电磁转矩 T_m 为

$$T_m = \frac{\partial W'_m}{\partial \theta_k} = p\frac{\partial W'_m}{\partial \theta_{12}} = -p\frac{\mu_0\pi Dl}{2\delta}F_1F_2\sin\theta_{12} \tag{9-86}$$

考虑到 $\tau = \frac{\pi D}{2p}$，$F_2\sin\theta_{12} = F\sin\theta_1$，上式可改写为

$$T_m = -p^2F_1B_m\tau l\sin\theta_1 = -\frac{\pi}{2}p^2F_1\Phi\sin\theta_1 \tag{9-87}$$

式中 Φ 为气隙合成磁场的磁通量，$\Phi = \frac{2}{\pi}B_m\tau l$；$\theta_1$ 为定子磁势与气隙合成磁场间的夹角，称为转矩角或内功率角．式(9-87)就是隐极交流电机电磁转矩的通用公式，它对感应电机和隐极同步电机都适用．

对于凸极同步电机，若气隙合成磁场为正弦分布，式(9-87)仍然成立，但此时 F_1 应理解为非凸极边(电枢边)的基波磁势，θ_1 则是气隙合成磁场轴线与 F_1 的轴线之间的夹角．

（二）路的观点

电磁转矩亦可以用各绕组内的电流和电感随转子转角的偏导数来表述.

图 9-23 表示一台三相凸极同步电机的示意图. 图中 A、B、C 表示定子三相绕组，f 表示励磁绕组，D 表示直轴阻尼绕组，Q 表示交轴阻尼绕组，θ 为转子直轴与定子 A 相轴线间的夹角（电角）.

若磁路为线性，用电流和电感表示时，电机的磁共能 W_m 为

$$\begin{aligned}W_m=&\frac{1}{2}(L_Ai_A^2+L_Bi_B^2+L_Ci_C^2+L_fi_f^2+L_Di_D^2+L_Qi_Q^2)+M_{AB}i_Ai_B\\&+M_{BC}i_Bi_C+M_{CA}i_Ci_A+M_{Af}i_Ai_f+M_{Bf}i_Bi_f+M_{Cf}i_Ci_f+M_{AD}i_Ai_D\\&+M_{BD}i_Bi_D+M_{CD}i_Ci_D+M_{AQ}i_Ai_Q+M_{BQ}i_Bi_Q+M_{CQ}i_Ci_Q+M_{fD}i_fi_D\end{aligned}\tag{9-88}$$

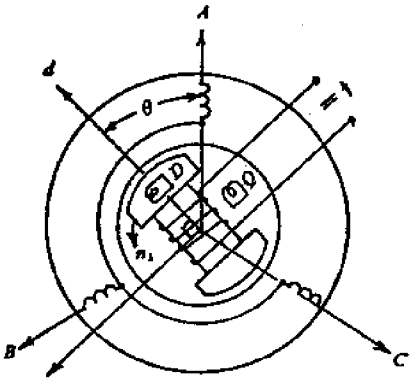


图 9-23　凸极同步电机示意图

对于理想的凸极同步电机，定子的自感系数为

$$\left.\begin{aligned}L_A&=L_{s0}+L_{s2}\cos2\theta\\L_B&=L_{s0}+L_{s2}\cos2(\theta-120°)\\L_C&=L_{s0}+L_{s2}\cos2(\theta+120°)\end{aligned}\right\}\tag{9-89}$$

定子三相绕组间的互感系数为

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=-[M_{s0}+M_{s2}\cos2(\theta+30°)]\\M_{BC}&=-[M_{s0}+M_{s2}\cos2(\theta-90°)]\\M_{CA}&=-[M_{s0}+M_{s2}\cos2(\theta+150°)]\end{aligned}\right\}\tag{9-90}$$

其中 $L_{s2}=M_{s2}$. 定、转子绕组间的互感为

$$\left.\begin{aligned}&M_{Af}=M_{af}\cos\theta,\quad M_{Bf}=M_{af}\cos(\theta-120°),\quad M_{Cf}=M_{af}\cos(\theta+120°)\\&M_{AD}=M_{aD}\cos\theta,\quad M_{BD}=M_{aD}\cos(\theta-120°),\quad M_{CD}=M_{aD}\cos(\theta+120°)\\&M_{AQ}=-M_{aQ}\sin\theta,\quad M_{BQ}=-M_{aQ}\sin(\theta-120°),\quad M_{CQ}=-M_{aQ}\sin(\theta+120°)\end{aligned}\right\}\tag{9-91}$$

转子绕组的自感 L_f、L_D 和 L_Q 以及互感 M_{fD}均为常值而与转子的转角 θ 无关.

这样，从虚位移法可得，电磁转矩 T_m 应为

$$\begin{aligned}T_m=&p\frac{\partial W_m(i,\theta)}{\partial\theta}=p\Big[\frac{1}{2}i_A^2\frac{\partial L_A}{\partial\theta}+\frac{1}{2}i_B^2\frac{\partial L_B}{\partial\theta}+\frac{1}{2}i_C^2\frac{\partial L_C}{\partial\theta}\\&+i_Ai_B\frac{\partial M_{AB}}{\partial\theta}+i_Bi_C\frac{\partial M_{BC}}{\partial\theta}+i_Ci_A\frac{\partial M_{CA}}{\partial\theta}\Big]\\&+p\Big[i_Ai_f\frac{\partial M_{Af}}{\partial\theta}+i_Bi_f\frac{\partial M_{Bf}}{\partial\theta}+i_Ci_f\frac{\partial M_{Cf}}{\partial\theta}+i_Ai_D\frac{\partial M_{AD}}{\partial\theta}+i_Bi_D\frac{\partial M_{BD}}{\partial\theta}\\&+i_Ci_D\frac{\partial M_{CD}}{\partial\theta}+i_Ai_Q\frac{\partial M_{AQ}}{\partial\theta}+i_Bi_Q\frac{\partial M_{BQ}}{\partial\theta}+i_Ci_Q\frac{\partial M_{CQ}}{\partial\theta}\Big]\end{aligned}\tag{9-92}$$

式中第一部分为定子绕组的自感和互感系数随 θ 的变化所产生的转矩，即磁阻转矩 $T_{m(R)}$；第二部分为转子各绕组与定子绕组相互作用所产生的转矩，即主电磁转矩 $T_{m(P)}$.

把式(9-87)—(9-91)代入式(9-92)，可得

$$T_{m(R)}=-pL_{s2}[i_A^2\sin2\theta+i_B^2\sin(2\theta+120°)+i_C^2\sin(2\theta-120°)]$$

$$-pL_{s2}[2i_Ai_B\sin(2\theta-120°)+2i_Bi_C\sin2\theta+2i_Ci_A\sin(2\theta+120°)]$$

$$=\frac{9}{2}pL_{s2}i_di_q=\frac{3}{2}p(L_d-L_q)i_di_q \tag{9-93}$$

$$\begin{aligned}T_{m(P)}=&-pM_{af}i_f[i_A\sin\theta+i_B\sin(\theta-120°)+i_C\sin(\theta+120°)]\\&-pM_{aD}i_D[i_A\sin\theta+i_B\sin(\theta-120°)+i_C\sin(\theta+120°)]\\&-pM_{aQ}i_Q[i_A\cos\theta+i_B\cos(\theta-120°)+i_C\cos(\theta+120°)]\\=&\frac{3}{2}p(M_{af}i_f+M_{aD}i_D)i_q-\frac{3}{2}pM_{aQ}i_Qi_d\end{aligned} \tag{9-94}$$

其中 i_d 和 i_q 分别表示定子电流的直轴和交轴分量，

$$\left.\begin{aligned}i_d&=\frac{2}{3}[i_A\cos\theta+i_B\cos(\theta-120°)+i_C\cos(\theta+120°)]\\i_q&=-\frac{2}{3}[i_A\sin\theta+i_B\sin(\theta-120°)+i_C\sin(\theta+120°)]\end{aligned}\right\} \tag{9-95}$$

L_d 和 L_q 分别表示直轴和交轴同步电感：

$$L_d=L_{s0}+M_{s0}+\frac{3}{2}L_{s2},\qquad L_q=L_{s0}+M_{s0}-\frac{3}{2}L_{s2} \tag{9-96}$$

对隐极同步电机，$L_d=L_q$，于是磁阻转矩 $T_{m(R)}=0$；对凸极电机，$T_{m(R)}\neq0$.

再考虑到定子的直轴和交轴磁链 ψ_d、ψ_q 分别等于

$$\left.\begin{aligned}\psi_d&=\frac{2}{3}[\psi_A\cos\theta+\psi_B\cos(\theta-120°)+\psi_C\cos(\theta+120°)]\\&=L_di_d+M_{af}i_f+M_{aD}i_D\\\psi_q&=-\frac{2}{3}[\psi_A\sin\theta+\psi_B\sin(\theta-120°)+\psi_C\sin(\theta+120°)]\\&=L_qi_q+M_{aQ}i_Q\end{aligned}\right\} \tag{9-97}$$

电磁转矩亦可改写成下状：

$$\begin{aligned}T_m&=\frac{3}{2}p(L_d-L_q)i_di_q+\frac{3}{2}p(M_{af}i_f+M_{aD}i_D)i_q-\frac{3}{2}pM_{aQ}i_Qi_d\\&=\frac{3}{2}p(\psi_di_q-\psi_qi_d)\end{aligned} \tag{9-98}$$

上式就是用电流和电感(磁链)表达时，凸极同步电机的电磁转矩公式；它对稳态和瞬态，对称和不对称运行都适用.

9-9 电磁力和电磁转矩的数值计算[28—37]

电磁力和电磁转矩的解析计算仅适用于磁场分布可用解析式表述，或者磁共能可用集中参数来表述的情况. 当系统或装置内的磁场分布较为复杂时，电磁力和电磁转矩可用数值法来确定.

(一) 麦克斯韦应力法

电磁力的计算 由式 (9-42) 可知，考虑铁心的磁饱和时，麦克斯韦应力为

$$\mathbf{T}=\mathbf{H}B_n-\mathbf{n}\int_0^H BdH$$

把上式应用到空气-铁心交界面或铁心内部，并作一小闭合曲面，即可求出计及饱和时作用在该部分铁心上的电磁力.

如需求出作用在整个转子或定子上的电磁力或电磁转矩，则闭合曲面 S 可选择在空气区内（图 9-24）. 此时曲面上各处 $\mu=\mu_0$，因而总电磁力 $\mathbf{F}$ 和电磁转矩 T_m 为

$$\mathbf{F}=\oint_S\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}B_n-\frac{1}{2\mu_0}B^2\mathbf{n}\right)dS \tag{9-99}$$

$$T_m=\oint_S\left(\frac{1}{\mu_0}B_n\mathbf{r}\times\mathbf{B}-\frac{1}{2\mu_0}B^2\mathbf{r}\times\mathbf{n}\right)\cdot dS \tag{9-100}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为 S 的法向量；$\mathbf{r}$ 为曲面上的场点到旋转轴线间的距离.

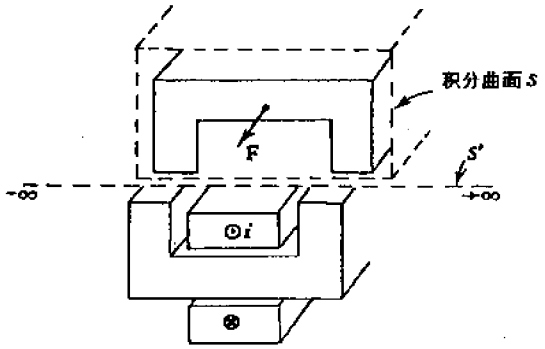


图 9-24　计算总电磁力时的闭合曲面 S

从式(9-99)可见，本法的特点是：

1. 只需计算 S 面上的面积分值；

2. 曲面 S 为任选，只要把电磁力所作用的整个部分(例如定子或转子)都包含在内即可；

3. 为使计算简化，S 通常选在空气区；此时铁心非线性的影响均隐含在所算出的 B 和 B_n 中，无需特殊考虑.

数值计算时的注意事项　为得到电磁力的准确值，算准 B_n、H_t 这两个量是一个关键. 用有限元法计算并以向量磁位 A_z 为基本变量时，在单元交界面处，B_n 是连续的，但 H_t 不一定连续. 特别是在空气和铁心的交界面处，由于 μ 发生突变，铁心侧和空气侧算出的 H_t 值可以相差几倍甚至几十倍. 为得到较为准确的场值，可采取下列措施：

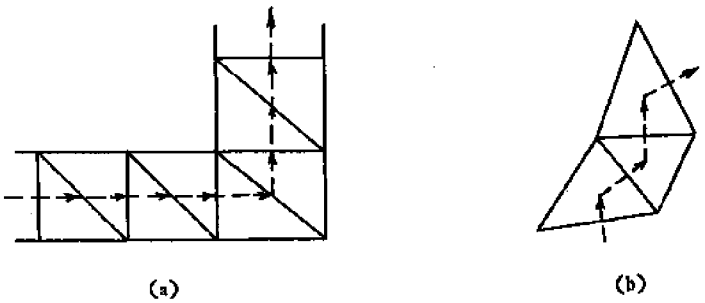
1. 加密网格剖分，特别在铁心-空气交界面处和尖角处要注意加密.

2. 采用二阶元(例如六节点三角元)来计算.

3. 铁心和空气交界面处的 H_t 值，采用交界面两侧 H_t 的平均值或加权平均值作为计算值.

4. 计算总电磁力或电磁转矩时，闭合曲面选在场的变化比较平缓之处，以使场值（计算值）有较高的精度. 除了依靠经验，这点亦可以从算出的场图中作出判断. 此外，

曲面通过各单元时，应力图通过单元的中线，如图 9-25 所示.



(a)　　(b)

图 9-25　积分曲面通过单元时的路径

计算步骤　具体计算步骤如下：

1. 采用较密和恰当的单元剖分或采用二阶元，以得到较准确的节点 A_z 值；
2. 确定面积分的曲面 S 和通过有关单元时曲面的法线方向；
3. 确定有关单元内的 B_n 和 H_t 值；
4. 计算面积元上的 t_n 和 t_t 值；
5. 计算面积分值，求出总电磁力的各个分量和 $\mathbf{F}$ 或电磁转矩 T_m.

（二）虚位移法

用虚位移法来计算电磁力时，有两种方案：一是经典虚位移法；一是局部雅可比导数法.

经典虚位移法　经典虚位移法是用差商来代替微商，通过计算虚位移时磁共能的变化来确定电磁力或电磁转矩：

$$F=\frac{\partial W'_m}{\partial s}\doteq\frac{W'_{m1}-W'_{m0}}{s_1-s_0},\qquad T_m=p\frac{\partial W'_m}{\partial\theta}\doteq p\frac{W'_{m1}-W'_{m0}}{\theta_1-\theta_0}\tag{9-101}$$

式中 W'_{m0}和 W'_{m1}分别为虚位移前、后的磁共能值；s_0 和 s_1（θ_0 和 θ_1）则是虚位移前、后部件的位置. 由此可见，经典虚位移法要进行两次磁场计算，并求出各单元的场值和磁共能密度，再进一步算出总的磁共能，最后用式(9-101)确定 F 或 T_m.

为减少差分求导所引起的误差，可计算三个位置(所研究位置和正、负虚位移两个位置)的磁共能值，再用二次插值建立 W'_m 与 s(或 θ)的函数关系，然后求出所研究位置处的 $\frac{\partial W'_m}{\partial s}\left(\text{或}\frac{\partial W'_m}{\partial\theta}\right)$ 值. 这样可得较为精确和可靠的电磁力值，但计算量将相应增大.

局部雅可比导数法　为从单一位置时的磁场计算结果算出电磁力，文献 [35] 提出局部雅可比导数法.

局部雅可比导数法的第一步亦是用有限元法计算系统(或装置)内的磁场，但在网格剖分时把定子和转子部分单独剖分，然后通过气隙的剖分把定、转子的网格联接起来. 这样，当转子发生微小的虚位移时，定子和转子内的单元形状将保持不变，仅气隙内某一层或某几层中的单元形状发生畸变.

由虚位移法可知，电磁力 F 等于

$$F = -\frac{\partial W_m}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}\int_V \left[\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\right]dV$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s}\sum_{e=1}^{E}\int_{V_e}\left[\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\right]dV \tag{9-102}$$

当单元形状发生变化时，式(9-102)中单元积分的上、下限将发生变动，使微分算符$\frac{\partial}{\partial s}$不能移进积分号内．为解决这一困难，可用等参变换把单元从整体坐标系变换到局部坐标系．这样，在发生虚位移时，畸变单元的总体坐标值虽然发生变化，但在局部坐标系中，单元形状和节点坐标值仍将保持不变，从而算符$\frac{\partial}{\partial s}$即可移入积分号内．

设局部坐标系的坐标为ξ，η，ζ，等参变换的雅可比阵为$\mathbf{J}$，在局部坐标系中基本单元的体积为V_e，则经过等参变换，式(9-102)将成为

$$F = -\frac{\partial}{\partial s}\sum_{1}^{E}\int_{V_e}\left(\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\right)J\,d\xi d\eta d\zeta$$

$$= -\sum_{1}^{E}\int_{V_e}\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\right)Jd\xi d\eta d\zeta$$

$$= -\sum_{1}^{E}\int_{V_e}\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\right)J + \left(\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\right)\frac{\partial J}{\partial s}\right]d\xi d\eta d\zeta$$

$$= -\sum_{1}^{E}\int_{V_e}\left[\mathbf{H}^T\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial s} + \left(\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\right)J^{-1}\frac{\partial J}{\partial s}\right]Jd\xi d\eta d\zeta \tag{9-103}$$

式中J为矩阵$\mathbf{J}$的行列式．考虑到

$$\mathbf{A}^e = \sum_k N_k^e \mathbf{A}_k^e \tag{9-104}$$

$$\mathbf{B}^e = \nabla\times\mathbf{A}^e = \sum_k \nabla\times(N_k^e\mathbf{A}_k^e) = \sum_k (\mathrm{grad}N_k^e)\times\mathbf{A}_k^e \tag{9-105}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^e}{\partial s} = \sum_k\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{grad}N_k^e\right)\times\mathbf{A}_k^e = -\sum_k \mathbf{J}^{-1}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s}\mathrm{grad}N_k^e\times\mathbf{A}_k^e \tag{9-106}$$

于是式（9-103）可改写成

$$F = \sum_{1}^{E'}\int_{V_e}\left[\mathbf{H}^T\sum_k \mathbf{J}^{-1}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s}\,\mathrm{grad}N_k^e\times\mathbf{A}_k^e - \int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\,J^{-1}\frac{\partial J}{\partial s}\right]dV \tag{9-107}$$

可以证明，对非畸变单元（定、转子内各单元），$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s}=\mathbf{0}$，$\frac{\partial J}{\partial s}=0$，所以仅是气隙中的畸变单元对式(9-107)的积分有贡献，若畸变单元总数为E'，在气隙中有$\int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}=\frac{B^2}{2\mu_0}$，则式(9-107)可进一步写成

$$F = \sum_{1}^{E'}\int_{V_e}\left[\frac{\mathbf{B}^T}{\mu_0}\sum_k \mathbf{J}^{-1}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s}\mathrm{grad}N_k^e\times\mathbf{A}_k^e - \frac{B^2}{2\mu_0}J^{-1}\frac{\partial J}{\partial s}\right]dV \tag{9-108}$$

对于一阶三角元或四面体元，$\mathbf{J}^{-1}$和$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s}$均为常数阵，$B$、$J^{-1}$和$\frac{\partial J}{\partial s}$亦是常数，故上式可进一步简写成

$$F = \sum_{1}^{E'}\int_{V_e}\left(\frac{\mathbf{B}^T}{\mu_0}\mathbf{J}^{-1}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s}\,\mathbf{B} - \frac{B^2}{2\mu_0}J^{-1}\frac{\partial J}{\partial s}\right)dV$$

$$=\sum_{1}^{k'}\left(\frac{\mathbf{B}^T}{\mu_0}\mathbf{J}^{-1}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s}\mathbf{B}-\frac{B^2}{2\mu_0}J^{-1}\frac{\partial J}{\partial s}\right)V_e \tag{9-109}$$

式中 V_e 为单元的体积. 从式 (9-109) 可见，此时电磁力的计算将归结为畸变单元中 $\mathbf{J}^{-1}$、$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s}$、$J^{-1}$、$\frac{\partial J}{\partial s}$和 B、V_e 等量的计算，所以此法称为局部雅可比导数法.

局部雅可比导数法的特点是：

1. 仅需进行一次磁场计算.

2. 只需计算气隙畸变单元中的有关量及其体积分，所以计算量较小，精度亦较高；对于线性元，一旦畸变单元中的 B 算出后，电磁力可用式(9-109)较快地算出.

3. 和经典虚位移法一样，此法只能求出总的电磁力或电磁转矩.

局部雅可比导数法的精度同样取决于场量 B 的计算精度和气隙畸变层位置的选择. 如果剖分和畸变层选择得当，可以得到较高的精度.

9-10 小　　结

电磁场是物质的一种形式. 和实物类似，电磁场亦有质量、能量、动量和波动性；此外，电磁场亦具有力学性质，即在电磁场内表现出张力. 场和实物间的作用，和不同部分的场之间的相互作用，由电磁波以光速传递过去. 这种内力在真空中无法直接察觉，当电磁场中有物体存在时，它们就以机械力的形式表现出来，称为有质动力.

本章阐明了磁场中有质动力的三种计算方法. 第一种方法原则上可以算出载流导体和磁质内所受到的力及其分布，但计算比较复杂. 第二种方法是用等效的磁张力（面积力）来代替体积力，这种方法对确定交界面上的电磁力比较方便；但应注意，等效的张力组并不是唯一的. 一般公认，麦克斯韦提出的张力比较符合实际，所以实用上都用它来计算. 过去，法拉第和麦克斯韦利用“以太”和力线管来形象地描述磁场中的机械力是如何体现的，但是近代物理证明，根本不存在“以太”；此外，磁力线和力线管亦不是物理上的实体，而仅仅是一些人为的辅助概念，使人们易于判断磁场中力的方向和大小. 计算电磁力的第三种方法是虚位移法，这种方法在工程上应用很广，但算出的结果是一种总体结果，得不到力的分布.

电磁力亦可以用数值法来计算，此时关键在于把场量算准，另外要选择合适的积分曲面，对虚位移法，可用局部雅可比导数法通过一次计算来确定总的电磁力.

参 考 文 献

[1] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941.

[2] W. K. H. Panofsky, M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, 2nd Edition, 1962.

[3] K. Simonyi, Theoretische Elektrotechnik, VEB Deutscher Verlag, 1956.

[4] И. Е. Тамм. Основы теории электричества, Гостехиздат, 1957.

[5] J. F. Calvert, Forces in Turbine Generator Stator Windings, AIEE Trans. 1931.

[6] Я. Туровский, Техническая электродинамика, ГЭИ, 1974.

[7] M. Rizzo, A. Savini and J. Turowski, Force Calculation in Large Electric Machines, IEEE Trans. on Magnetics, No. 4, 1989.

[8] B. Hague, The Principle of Electromagnetism Applied to Electrical Machines, Dover, 1962.

[9] 古贺健一郎，On the Mechanism of the Torque of Electric Motor，JIEE of Japan，1953.
[10] A. B. Иванов-Смоленский，Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах，Высшая школа，Москва，1989.
[11] C. J. Carpenter，Surface-integral Method of Calculating Forces on Magnetized Iron Part，Proc. IEE，pt. C，1960.
[12] G. W. Carter ，Distribution of Mechanical Forces in Magnetized Material，Proc. IEE，No. 9，1965.
[13] H. E. M. Barlow，Simplified Treatment of Mechanical Forces on Materials in Electromagnetic Field，Proc. IEE，1960.
[14] M. Liwschitz-Garik，C. C. Whipple，D-C Machine，Van Nostrand，2nd Edition，1956.
[15] J. H. Morecroft，A. Turner，Forces on Magnetically Shielded Conductor，AIEE Journal，1929.
[16] G. W. O. Howe，Motor and Generator Torques on the Armature and Poles，Electrician，1935，Vol.114.
[17] G. W. O. Howe，Some Magnetic Misconceptions—Flux Refraction-lateral Pressure，Electrician，Vol. 115，1935.
[18] K. Humbury，Die Entstehung des Drehmoment in Electrischen Maschinen，ETZ，1950.
[19] F. C. Williams，R. S. Mamak，Electromagnetic Forces in Slotted Structures，Proc. IEE，pt. C，1962.
[20] A. T. Dvoracek，Forces on the Teeth in D-C Machine，IEEE Trans. 1963.
[21] A. S. Lansdorf，The Development of Torque in Slotted Armature，IEEE Trans. 1963.
[22] 方启 ，电机中若干典型例子的磁场有质动力分析，哈尔滨电工学院学报，1982，No. 2.
[23] D. C. White，H. H. Woodson，Electromechanical Energy Conversion，John Wiley & Sons，1959.
[24] G. McPherson，Deriving D-C Machine Torque by the Principle of Virtual Work，IEEE Trans. on PAS，No. 5，1971.
[25] A. E. Fitzgerald，C. Kingsley，A. Kusko. Electric Machinery，McGraw-Hill，3rd Edition，1971.
[26] 钟士模，旋转电机的电磁转矩，清华大学学报，1962.
[27] G. L. Godwin，The Nature of A-C Machine Torques，IEEE Trans. on PAS，No. 1，1976.
[28] K. Reichert，H. Freundl，W. Vogt，The Calculation of Forces and Torques with Numerical Field Calculation Methods，Proc. COMPUMAG，Oxford，1976.
[29] J. Penman，M. D. Grieve，Efficient Calculation of Force in Electromagnetic Devices，Proc. IEE，pt. B，No. 4，1986.
[30] T. Tärnhuvud，K. Riechert，Accuracy Problems of Force and Torque Calculation in FE-system，IEEE Trans. on Magnetics，No. 1，1988.
[31] A. N. Wignall，A. J. Gilbert and S. J. Yang，Calculation of Forces on Magnetised Ferrous Cores Using the Maxwell Stress Method，IEEE Trans. on Magnetics，No. 1，1988.
[32] 姚有光、汤蕴璆，用麦克斯韦应力法计算凸极同步电机的电磁转矩，哈尔滨电工学院学报，No. 1. 1989.
[33] I. Mizia，K. Adamiak，A. R. Eastham and G. E. Cawson，Finite Element Force Calculation：Comparison of Methods for electric Machines，IEEE Trans. on Magnetics，No. 1，1988.
[34] J. L. Coulomb，A Methodology for the Determination of Global Electromechanical Quantities from a Finite Element Analysis and Its Application to the Evaluation of Magnetic Forces，Torques and Stiffness，IEEE Trans. on Magnetics，No. 6，1983.
[35] J. L. Coulomb，G. Meunier，Finite Element Implementation of Virtual Work Principle for Magnetic or Electric Force and Torque Computation，IEEE Trans. on Magnetics，No. 5，1984.
[36] S. McFee，D. A. Lowther，Towards Accurate and Consistent Force Calculation in Finite Element Based Computational Magnetostatics，IEEE Trans. on Magnetics，No. 5，1987.
[37] S. McFee，J. P. Webb and D. A Lowther，A Tunable Volume Integration Formulation for Force Calculation in Finite Element Based Computational Magnetostatics，IEEE Trans. on Magnetics，No. 1. 1988.
[38] Z. Ren，Comparison of Different Force Calculation Methods in 3D Finite Element Modelling，IEEE Trans. on Magnetics，vol. 30，1994.

第十章　同步电机内的电磁场问题

前面研究了恒定和时变电磁场的基本理论及其解析和数值解法，本章将说明这些理论和方法在计算同步电机电磁场问题中的应用.先说明同步电机额定励磁电流和稳态、瞬态参数的数值计算，然后说明稳态异步运行时汽轮发电机运算电抗和频率特性的数值计算，最后说明汽轮发电机定、转子绕组端部电流的表达式和端区磁场的数值计算. 同步电机中的其他问题，如杂散损耗等亦可用数值方法来求解.

10-1　同步发电机额定励磁电流的数值计算

额定励磁电流是设计同步电机励磁绕组的出发点，它亦是发电机的主要运行数据之一. 过去，额定励磁电流都用电动势-磁动势图来确定. 实践表明，当磁路饱和程度不太高时，此法所得的结果能满足工程精度要求；但当磁路结构较为特殊，或负载时磁路呈现高饱和时，由于气隙磁势、转子漏磁的计算偏差和直、交轴之间出现磁耦合，此法便会产生显著的误差. 为提高精度，可用数值法来确定额定励磁电流.

（一）基本方法

基本假定　用有限元法分析时，作如下假定：

(1) 磁场沿电机轴向设为不变，因此可作为二维场来处理；

(2) 在稳态对称负载下，同步电机的定、转子基波磁势均为同步速度的旋转磁势波，它们之间保持相对静止，定子基波磁场亦不会在转子主极内感生涡流，因此可以把任一瞬间的磁场作为恒定磁场问题来研究；

(3) 不计曲率，采用直角坐标系；主极极弧用一系列折线来近似.

基本方法　图 10-1 表示负载时凸极同步电机的求解域，定子中置有对称三相绕组（每极每相槽数 $q=4$），并流过对称三相电流，转子励磁绕组中通有励磁电流.

计算额定工况下（$U=U_{\varphi N}$，$I=I_N$，$\cos\varphi=\cos\varphi_N$）的磁场时，定子电流为已知，但励磁电流和内功率因数角 ψ_0 事先无法准确给出；此时可先用通常电磁计算公式所得到的值作为初值来进行非线性磁场计算，然后根据算出的端电压和功率因数，逐步调整励磁电流和内功率因数角，直到 $U=U_{\varphi N}$，$\cos\varphi=\cos\varphi_N$ 为止. 所以在整个计算中，除了磁场要进行非线性的饱和迭代之外，还要进行端电压 U 和内功率因数角 ψ_0 的端点条件迭代. 下面详细说明这两个步骤.

（二）二维非线性磁场的迭代求解

先预选一个额定励磁电流 I_{fN} 和定子电流与直轴间的夹角 λ，$\lambda=90°-\psi_0$，如图 10-2 所示；这样，根据时-空矢量图的统一性，即可确定定子三相电流的瞬时值为：

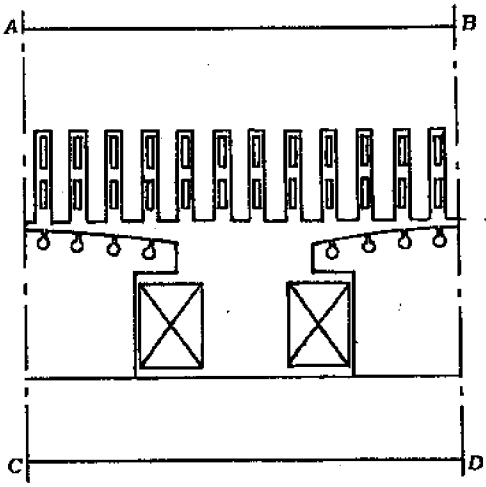


图 10-1　求解场域

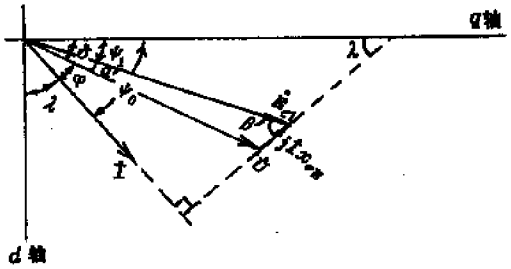


图 10-2 负载时凸极同步发电机的相量图

$$\left.\begin{aligned} i_A&=I_m\sin(90°+\lambda)\\ i_B&=I_m\sin(90°+\lambda-120°)\\ i_C&=I_m\sin(90°+\lambda+120°)\end{aligned}\right\} \tag{10-1}$$

式中 I_m 为定子电流的幅值.

定、转子电流和电密的分布确定后，即可求解向量磁位 A_z 的准泊松方程

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-J_z\\ &A_z|_{AB}=A_z|_{CD}=0\\ &A_z|_{AC}=-A_z|_{BD}\end{aligned}\right\} \tag{10-2}$$

这里，在内、外边界$\overline{AB}$和$\overline{CD}$处，可认为是一磁力线，其 A_z 赋为 0；在主极中心线处的两条边界$\overline{AC}$、$\overline{BD}$上，由于磁场的反向周期性，故 A_z 满足半周期边界条件；如式(10-2)所示.

将图 10-1 所示求解域剖分成 E 个三角形单元，如图 10-3 所示. 把与式(10-2)的边值问题所对应的变分问题离散化，可得一组非线性代数方程组. 用逐次线性化法或牛顿-拉夫生法求解此非线性方程组，经过多次迭代，使 A_z 的解答收敛，然后进行定子端电压的计算.

（三）定子端电压的计算和端点条件迭代

端电压的计算　为计算定子端电压（相电压），先要算出端部漏抗后的定子感应电动势 E_{z1}（图 10-2）. 为此，由定子载流区平均半径处的周向各个节点的 A_z 值，用中心差分算出该半径处的径向磁感强度 $B_r(x)$；对 $B_r(x)$进行谐波分析，可得基波 $B_1(x)$

$$B_1(x)=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}x-\psi_1\right)=B_m\cos\left(\frac{\pi}{\tau}x-\psi_1\right) \tag{10-3}$$

式中 $B_m=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$；a_1，b_1 为基波的正弦和余弦傅氏系数；ψ_1 为 $\dot{E}_{e1}$与 q 轴间的夹角，ψ_1

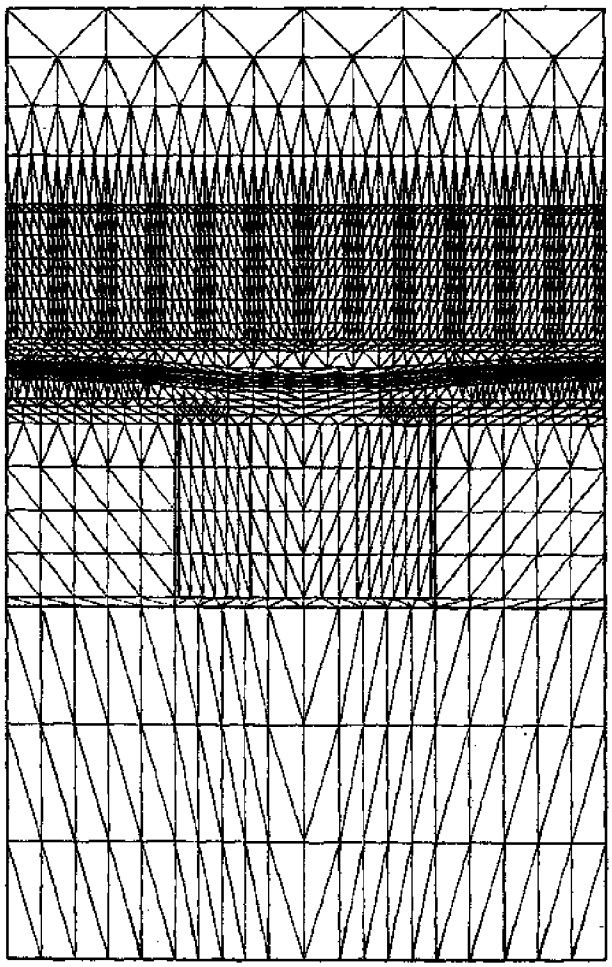


图 10-3　网格剖分

$=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a_1}{b_1}$. 由此即可算出与 E_{e1} 相对应的磁通量 Φ_{e1} 和 E_{e1}

$$\Phi_{e1}=\frac{2}{\pi}B_m\tau l_{eff},\qquad E_{e1}=4.44f_1N_1k_{w1}\Phi_{e1} \tag{10-4}$$

再减去定子的端部漏抗压降 $j\dot{I}x_{\sigma e}$，即可得到端电压 $\dot{U}$（定子电阻略去不计）

$$\dot{U}P=\dot{E}_{e1}-j\dot{I}x_{\sigma e} \tag{10-5}$$

从图 10-2 可见，

$$\beta'=\psi_1+\lambda,\qquad \alpha'=\mathrm{tg}^{-1}\frac{Ix_{\sigma e}\sin\beta'}{E_{e1}-Ix_{\sigma e}\cos\beta'} \tag{10-6}$$

由此可得功率因数角 φ 为（当功角 $\delta<90°$时）

$$\varphi=90°-(\psi_1+\alpha'+\lambda) \tag{10-7}$$

端电压 U 为

$$U=\sqrt{E_{\delta 1}^2+(Ix_{\sigma z})^2-2E_{\delta 1}(Ix_{\sigma z})\cos\beta'} \tag{10-8}$$

端点条件迭代 由上式算出的端电压U（相电压）与额定相电压$U_{\phi N}$的差值应满足

$$\left|\frac{U-U_{\phi N}}{U_{\phi N}}\right|\leqslant\varepsilon_u \tag{10-9}$$

式中ε_u为所规定的电压容差，通常$\varepsilon_u\approx(0.1-0.2)\%$. 如不满足上式，应调整励磁电流，重复进行磁场的饱和迭代和端电压计算，直到满足为止. 同理，算出的功率因数$\cos\varphi$与额定功率因数$\cos\varphi_N$间的差值应满足

$$\left|\frac{\cos\varphi-\cos\varphi_N}{\cos\varphi_N}\right|\leqslant\varepsilon_{\cos\varphi} \tag{10-10}$$

$\varepsilon_{\cos\varphi}$为功率因数的容许差值，通常为$(0.1-0.5)\%$；如不满足，则调整$\lambda$角，重复进行计算，直至式(10-9)和(10-10)都能满足. 最后可得额定励磁电流I_{fN}的正确值.

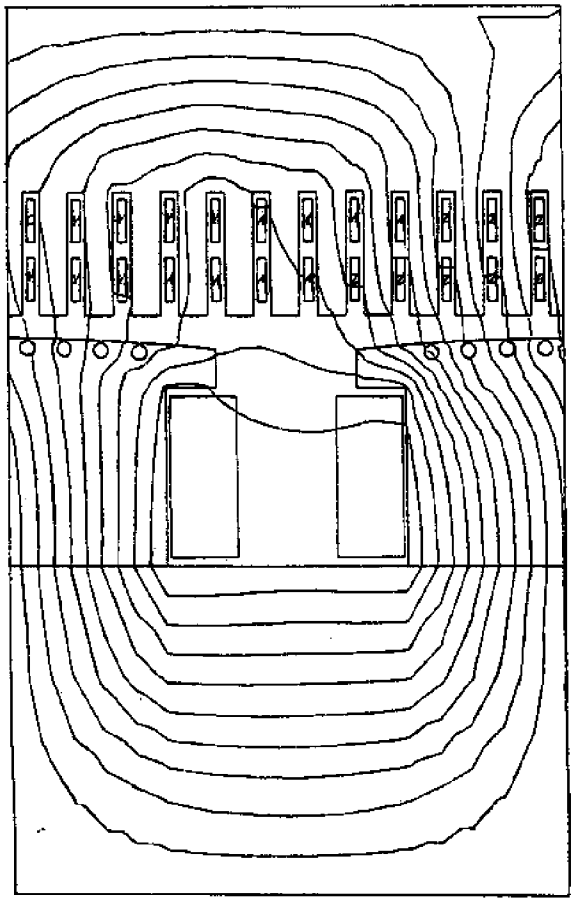


图 10-4 300MW 水轮发电机额定负载时的磁场分布

（四）计算实例

图 10-3 表示一台 300MW、$q=4$ 的大型水轮发电机的网格剖分图，总单元数 $E=4002$，总节点数 $N=2047$. 图 10-4 和图 10-5 分别表示额定负载时的磁场分布图和气隙中心线处的气隙磁场分布.

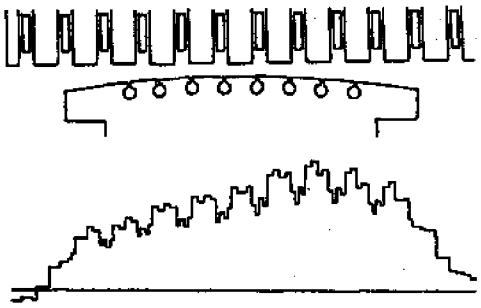


图 10-5　额定负载时的气隙磁场分布

10-2　饱和同步电抗的数值计算[1—12]

参数是决定电机运行性能和造价的重要因素之一. 稳态参数 x_d 和 x_q 直接影响到同步发电机的电压调整率、静态稳定度和发电机与电网并联运行时有功和无功功率的调节，所以准确地算出 x_d 和 x_q 是十分重要的.

传统电机理论利用解析法来计算 x_d 和 x_q，由于采用简化的计算模型和一些必要的假定，使结果带有一定的局限性. 用有限元法计算时，可以尽可能考虑到电机各部分的实际结构和铁心各处的磁饱和，使得出的参数更加符合实际.

下面说明定子为整数槽绕组时，x_d 和 x_q 的数值计算法.

（一）基本方法

要确定某一工况下同步电抗的值，可分成两步进行：

(1) 首先用迭代法求解电机内的二维非线性恒定磁场，并确定该工况下的励磁电流和铁心各个单元的磁阻率 ν；

(2)保持所有单元的 ν 值不变，定子依次加上直轴和交轴磁势，分别求出对应的直轴、交轴磁场和电抗，再加上定子端部漏抗，即可得到该工况下的 x_d 和 x_q.

关于第一步，即确定给定工况下的磁场和磁阻率的分布，可仿照上节确定额定励磁电流的办法进行：先预选一个励磁电流和 λ 角作为初值，然后进行二维非线性磁场的饱和迭代以及端点条件迭代，经过多次调整，最后可得该工况下的励磁电流以及整个电机内的二维磁场和磁阻率 ν 的分布.

下面说明第二步.

（二）x_d 和 x_q 的计算

x_d 的计算 给定工况下铁心各单元的磁阻率求出后，保持此 $\nu(x, y)$ 的分布不变，定子上加直轴磁势（即使 $i_A=I_m, i_B=-\frac{1}{2}I_m, i_C=-\frac{1}{2}I_m, \theta_0=0$；或 $i_A=0, i_B=\frac{\sqrt{3}}{2}I_m$，$i_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}I_m, \theta_0=90°$；其中 I_m 为定子三相电流的幅值，θ_0 为主极轴线与 A 相绕组轴线的夹角），励磁电流为零，用有限元法求解此定子磁势所产生的二维磁场，即求解与下列泊松方程边值问题（图 10-1）相应的变分问题的线性代数方程组

$$\left.\begin{aligned} &\nu(x,y)\left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\right]=-J \\ &A_z|_{AB}=A_z|_{CD}=0 \\ &A_z|_{AC}=-A_z|_{BD} \end{aligned}\right\} \tag{10-11}$$

可得向量磁位 A_z，再进一步算出一相绕组的磁链和对应的电抗 x_{d0}.

以 A 相为例. 对 $i_A=I_m$，$\theta_0=0$ 这种情况，若每极每相槽数为 q（q=整数），A 相的第 k 个线圈上、下层线棒中心处的向量磁位分别为 A_{Uk} 和 A_{Lk}，则一个相带的磁链 ψ_β 应为

$$\psi_\beta=\left|\sum_{k=1}^{q}(A_{Uk}-A_{Lk})l_{eff}\right| \tag{10-12}$$

式中 l_{eff} 为定子的有效长度. A 相电抗的标么值 x_{d0} 则为

$$x_{d0}=2\pi f_1\beta\psi_\beta\frac{1}{aI_{am}}\frac{I_N}{U_{\phi N}} \tag{10-13}$$

式中 β 为定子每相串联的相带数；a 为定子绕组的支路数；I_{am} 为 A 相的支路电流（幅值）；I_N 和 $U_{\phi N}$ 为相电流和相电压的额定值. 把 x_{d0} 加上定子端部漏抗的标么值 $x_{\sigma e}$ 以计及定子端部漏磁的影响，即可得到直轴同步电抗的标么值 x_d

$$x_d=x_{d0}+x_{\sigma e} \tag{10-14}$$

对于 B 相和 C 相，亦可进行类似的计算. 取 A、B、C 三相算出的平均值，可得该工况下直轴同步电抗的饱和值 $x_{d(饱和)}$. 对于 $i_A=0$，$\theta_0=90°$ 这种情况，取 B、C 两相的平均值.

如果定、转子铁心的磁阻率赋以与磁化曲线直线部分相对应的磁阻率，求出的 x_d 即为直轴同步电抗的不饱和值.

x_q 的计算 仍然保持该工况下磁阻率 ν 的分布不变，定子上施加交轴磁势（即使 $i_A=I_m$，$i_B=-\frac{1}{2}I_m$，$i_C=-\frac{1}{2}I_m$，$\theta_0=90°$；或 $i_A=0$，$i_B=\frac{\sqrt{3}}{2}I_m$，$i_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}I_m$，$\theta_0=0°$），励磁电流为零，用有限元法求解与式（10-11）相应的变分问题，可得交轴磁场. 再用与式（10-13）类似的式子求出 x_{q0}，于是

$$x_q=x_{q0}+x_{\sigma e} \tag{10-15}$$

取各相的平均值，可得该工况下交轴同步电抗的饱和值 $x_{q(饱和)}$.

（三）计算实例

仍以上节的 300MW 水轮发电机为例进行计算. 图 10-6 和 10-7 表示对应于额定点的

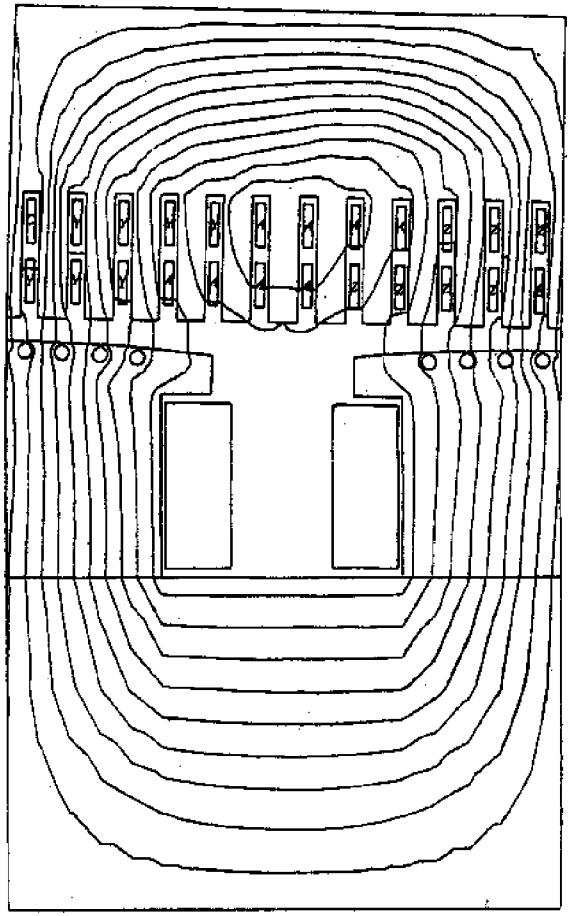


图 10-6　对应于额定点的 x_{d0} 场图

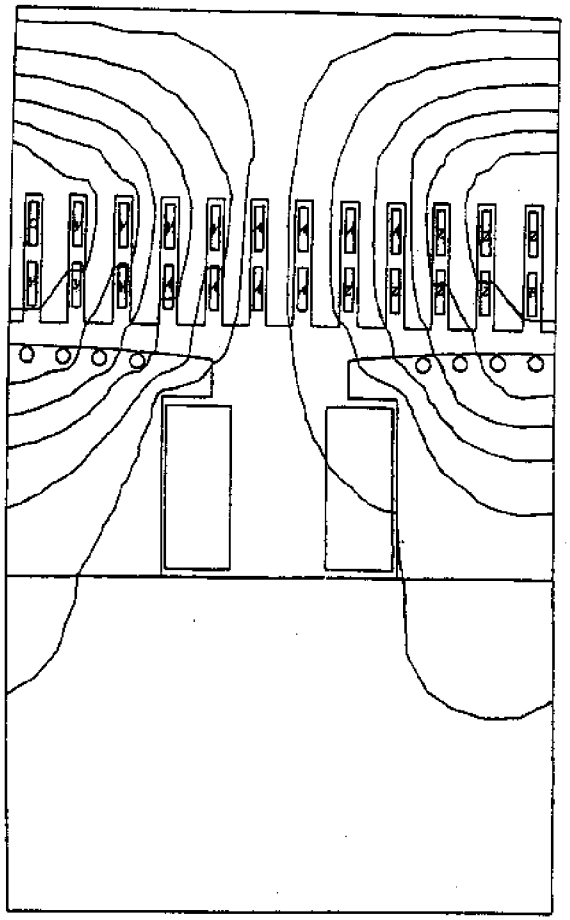


图 10-7　对应于额定点的 x_{q0} 场图

x_{d0}和 x_{q0}的场图. 该机的同步电抗不饱和值的设计值(标么值)为 $x_d=0.94$，$x_q=0.66$；用有限元法算出的值为 $x_d=0.958$，$x_q=0.648$. 图 10-8 表示 $U=U_{\phi N}$，$\cos\varphi=\cos\varphi_N$ 时，$x_{d(\text{饱和})}$，$x_{q(\text{饱和})}=f(I)$. 从图 10-8 可见，随着负载的增大，电机内部的饱和程度加深，所以同步电抗将逐步下降. 额定负载时，直轴和交轴同步电抗的饱和系数分别为 $k_{sd}=\frac{x_{d(\text{饱和})}}{x_d}=0.923$，$k_{sq}=\frac{x_{q(\text{饱和})}}{x_q}=0.921$.

另外，从图 10-6 和 10-7 可见，由于负载时电机内的饱和情况比较复杂，$\nu(x,y)$ 的分布既不对称于 d 轴、亦不对称于 q 轴，因此定子直轴磁势除产生直轴磁场外，还将产生一个微小的交轴磁场；同理，交轴磁势除产生交轴磁场外，还将产生一个微小的直轴磁场；由此将派生出直轴和交轴间的耦合电抗 x_{dq}和 x_{qd}.

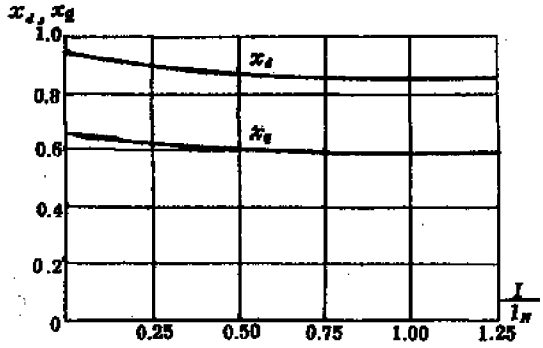


图 10-8 $U=U_{\phi N}$，$\cos\varphi=\cos\varphi_N$ 时，$x_{d(\text{饱和})}$，$x_{q(\text{饱和})}=f(I)$

10-3 瞬态电抗的数值计算[13—17]

瞬态电抗 x_d' 和 x_d'' 是决定同步发电机瞬态行为的主要参数，诸如突然短路时定子的冲击电流，以及由此产生的端部电磁力和轴上的脉振转矩，发电机的瞬态稳定度，振荡时发电机的行为等均取决于瞬态参数；$\frac{x_q''}{x_d''}$的比值则将影响到线间短路时开路相的过电压倍数. 所以准确地算出 x_d'，x_d'' 和 x_q'' 的值是很重要的.

目前制造厂沿用的公式基本上仍是由传统电机理论所导出的解析公式. 随着数值法的广泛应用，国内外已有不少学者用有限元法来计算瞬态参数，从而使计算精度和可靠性日益提高. 下面先介绍直轴瞬态电抗 x_d' 的数值算法.

(一) 基本方法

在计算直轴瞬态电抗时，需要经过以下几步：

(1) 把旋转状态转化为等效的静止状态；

(2) 把励磁绕组端部的漏磁归并到直线部分，使三维磁场问题简化成二维问题；

(3) 对励磁绕组施加串联约束，使每匝电流相等；

(4) 在直轴上施加转差频率 sf_1 的脉振磁势，使 $s=10^8$，求解施加约束后的正弦磁

场，进而求出直轴瞬态电流 x_d'.

下面依次加以说明.

（二）将旋转状态转化为等效的静止状态

实际运行时，转子在旋转，定、转子电流的频率互不相同，它们的磁场难于进行统一的计算. 另外，由于定、转子之间具有相对运动，亦较难进行网格剖分. 为此可将实际的旋转状态转化为等效的静止状态.

把旋转状态转化为等效的静止状态 在定子绕组上施加一组基频 ω_1 的三相正序电流，

$$i_A = I_m\cos\omega_1 t,\quad i_B = I_m\cos(\omega_1 t - 120°),\quad i_C = I_m\cos(\omega_1 t + 120°) \tag{10-16}$$

转子设为异步运行，转差率为 s，则转子转角 θ 用电角度表示时有

$$\theta = (1-s)\omega_1 t + \theta_0 \tag{10-17}$$

式中 θ_0 为 $t=0$ 时转子主极轴线（d 轴）与定子 A 相绕组轴线间的夹角. 由 $dq0$ 变换可知，此时定子电流的 d、q 轴分量为

$$\left.\begin{aligned} i_d &= \frac{2}{3}[i_A\cos\theta + i_B\cos(\theta - 120°) + i_C\cos(\theta + 120°)] \\ &= I_m\cos(s\omega_1 t - \theta_0) \\ i_q &= -\frac{2}{3}[i_A\sin\theta + i_B\sin(\theta - 120°) + i_C\sin(\theta + 120°)] \\ &= I_m\sin(s\omega_1 t - \theta_0) \end{aligned}\right\} \tag{10-18}$$

再考虑转子为静止，主极与 A 相轴线的夹角 $\theta=\theta_0$，定子绕组通入一组转差频率 $s\omega_1$ 的三相正序电流的情况. 此时

$$i_A = I_m\cos s\omega_1 t,\quad i_B = I_m\cos(s\omega_1 t - 120°),\quad i_C = I_m\cos(s\omega_1 t + 120°) \tag{10-19}$$

定子电流的 d、q 轴分量为

$$\left.\begin{aligned} i_d &= \frac{2}{3}[i_A\cos\theta + i_B\cos(\theta - 120°) + i_C\cos(\theta + 120°)] \\ &= I_m\cos(s\omega_1 t - \theta_0) \\ i_q &= -\frac{2}{3}[i_A\sin\theta + i_B\sin(\theta - 120°) + i_C\sin(\theta + 120°)] \\ &= I_m\sin(s\omega_1 t - \theta_0) \end{aligned}\right\} \tag{10-20}$$

式(10-20)与式(10-18)完全相同，这说明对转子而言，转子静止、定子上施加一组转差频率的三相正序电流，与转子以转差速度旋转、定子上施加一组基频三相正序电流，两者是等效的. 对于定子，若不计铁心中的磁滞和涡流，定子磁场亦将是等效的.

从式(10-20)还可以看出，若定子通入三相电流，定子磁势是旋转磁势，此时 i_d 和 i_q 将同时存在.

纯直轴磁势的形成 若转子静止，定子绕组通入一组具有不同幅值的转差频率的单相电流

$$i_A = I_m\cos s\omega_1 t,\quad i_B = -\frac{1}{2}I_m\cos s\omega_1 t,\quad i_C = -\frac{1}{2}I_m\cos s\omega_1 t \tag{10-21}$$

则当主极轴线与定子 A 相轴线重合（即 $\theta_0=0$）时，可以导出

$$\left.\begin{aligned} i_d &= \frac{2}{3}[i_A\cos\theta_0 + i_B\cos(\theta_0-120°) + i_C\cos(\theta_0+120°)] = I_m\cos s\omega_1 t \\ i_q &= -\frac{2}{3}[i_A\sin\theta_0 + i_B\sin(\theta_0-120°) + i_C\sin(\theta_0+120°)] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10\text{-}22)$$

可见此时的定子磁势为纯直轴磁势.

如在定子绕组内通入另一组具有不同幅值的单相交流

$$i_A = 0, \qquad i_B = \frac{\sqrt{3}}{2}I_m\cos s\omega_1 t, \qquad i_C = -\frac{\sqrt{3}}{2}I_m\cos s\omega_1 t \qquad (10\text{-}23)$$

当 $\theta_0=90°$时，亦可以导出

$$i_d = I_m\cos s\omega_1 t, \qquad i_q = 0 \qquad (10\text{-}24)$$

此时亦可得到纯直轴磁势. 以上两种情况均可用于计算直轴瞬态参数，但因定子磁势的空间分布波形和差漏磁稍有不同，故得出的参数值亦稍有差别.

纯交轴磁势的形成 上述两种情况中，若使第一种情况的 $\theta_0=90°$，第二种情况的 $\theta_0=0°$，则此两种情况均有

$$i_q = I_m\cos s\omega_1 t, \qquad i_d = 0 \qquad (10\text{-}25)$$

此时定子磁势为纯交轴磁势，可用以计算交轴超瞬态电抗 x_q''.

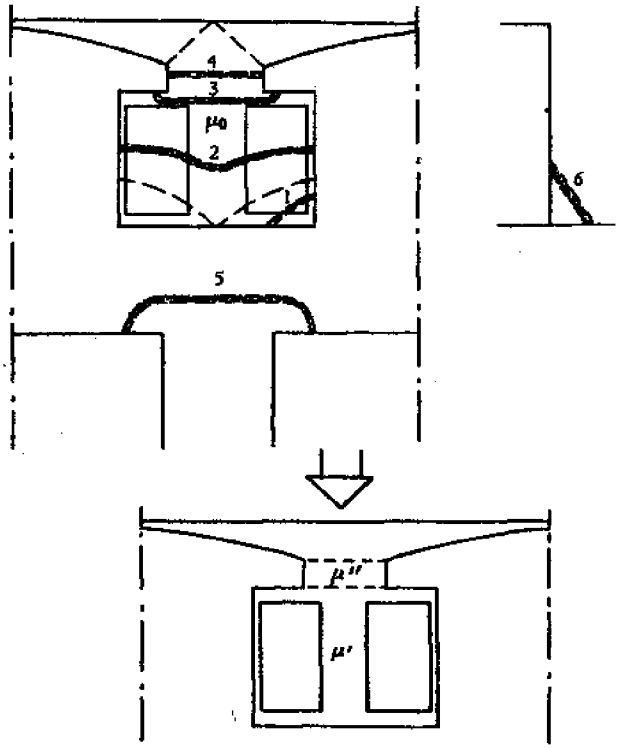


图 10-9 励磁绕组端部漏磁的归并

(a) 实际情况；(b) 等效归并后的磁导率 μ' 和 μ''

（三）励磁绕组端部漏磁的归并

用二维磁场计算参数时，定、转子端部漏磁均未计及. 定子端部漏磁可用端部漏抗 $x_{\sigma e}$ 来计及，励磁绕组的端部漏磁则可用归并到转子直线部分的办法来计及. 下面说明归并的方法.

极身之间和极靴之间空间的磁导率原来为 μ_0，现在分别将其修改为 μ' 和 μ''，使得磁导率为 μ_0 时极身直线部分加上端部的漏磁，恰好与磁导率为 μ' 时极身直线部分的漏磁相等；磁导率为 μ_0 时极靴直线部分加上端部的漏磁，恰好与磁导率为 μ'' 时极靴直线部分的漏磁相等；即

$$\left.\begin{aligned}\mu' \Lambda_m &= \mu_0(\Lambda_m + \Lambda_{me})\\ \mu'' \Lambda_p &= \mu_0(\Lambda_p + \Lambda_{pe})\end{aligned}\right\} \tag{10-26}$$

式中 Λ_m 为极身直线部分的漏磁导，Λ_{me} 为极身端部的漏磁导；Λ_p 为极靴直线部分和底面的漏磁导，Λ_{pe} 为极靴端部的漏磁导；如图 10-9 所示. 由此可得

$$\mu' = \mu_0\left(1+\frac{\Lambda_{me}}{\Lambda_m}\right), \quad \mu'' = \mu_0\left(1+\frac{\Lambda_{pe}}{\Lambda_p}\right) \tag{10-27}$$

这样就可以在二维磁场计算时，同时计及励磁绕组的端部漏磁.

（四）励磁绕组的串联约束

励磁绕组未加串联约束时 当定子施加转差频率 $s\omega_1$ 的直轴脉振磁势、励磁绕组短接时，电机内的磁场为二维正弦电磁场（图 10-1），此时复向量磁位 $\dot{A}_z$ 满足

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_e \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_e \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right) = -\dot{J}_s + js\omega_1 \sigma \dot{A}_z\\ &\dot{A}_z|_{AB} = \dot{A}_z|_{CD} = 0\\ &\dot{A}_z|_{AC} = -\dot{A}_z|_{BD}\end{aligned}\right\} \tag{10-28}$$

式中 $\dot{J}_s$ 为源电密；ν_e 为有效磁阻率；σ 为电导率. 与式（10-28）相应的条件变分问题为

$$\left.\begin{aligned}I = &\int_G \frac{1}{2}\nu_e\left[\left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy - \int_G \dot{J}_s \dot{A}_z dxdy\\ &+\frac{1}{2}js\omega_1\sigma\int_G \dot{A}_z^2 dxdy = \text{stationary}\\ &\dot{A}_z|_{AB} = \dot{A}_z|_{CD} = 0, \qquad \dot{A}_z|_{AC} = -\dot{A}_z|_{BD}\end{aligned}\right\} \tag{10-29}$$

把图 10-1 所示场域剖分成 E 个单元，N 个节点. 把式(10-29)变分离散，可得一复代数方程组

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F} \tag{10-30}$$

式中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{F}$ 分别为 N 个节点磁位 $\dot{A}_z$ 和由 $\frac{1}{3}\dot{J}_s\Delta$ 所组成的列阵；$\mathbf{K}$ 为复系数矩阵（N 阶方阵）. 这是未加约束时的情况.

励磁绕组加上串联约束时 当励磁绕组短接、定子 d 轴上加有脉振磁势时，励磁绕组中将有感应电流流过，同时励磁绕组导体表面将出现分布电荷. 当每匝为串联时，在

表面电荷所产生的标量电位 $\dot{\varphi}$ 的作用下，流过每匝的电流将约束成为相等．此时励磁绕组各单元中，向量磁位 $\dot{A}_z$ 将满足

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_0 \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_0 \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right)=-\dot{J}_z \tag{10-31}$$

式中 $\dot{J}_z$ 为励磁绕组导体内的电密，它由 $\dot{J}_\varphi$ 和 $\dot{J}_i$ 两项组成；$\dot{J}_\varphi$ 为由标量电位所产生的约束电密，$\dot{J}_\varphi=-\sigma\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z}$，它是一个待定的复常数；$\dot{J}_i$ 为感应电密，$\dot{J}_i=-js\omega_1\sigma\dot{A}_z$；即

$$\dot{J}_z=\dot{J}_\varphi+\dot{J}_i=\dot{J}_\varphi-js\omega_1\sigma\dot{A}_z \tag{10-32}$$

下面为简单计，设每对极下励磁绕组为 2×2 匝，每匝内由标量电位所产生的约束电密分别为 $\dot{J}_{\varphi 1}$，$\dot{J}_{\varphi 2}$，$\dot{J}_{\varphi 3}$和 $\dot{J}_{\varphi 4}$．每匝剖分成两个单元，单元面积为 Δ_e，节点编号为 $C1$，$C2$，$C3$，…，$C16$，如图 10-10 所示．对于励磁绕组所属的 8 个单元，由于式（10-31）的右

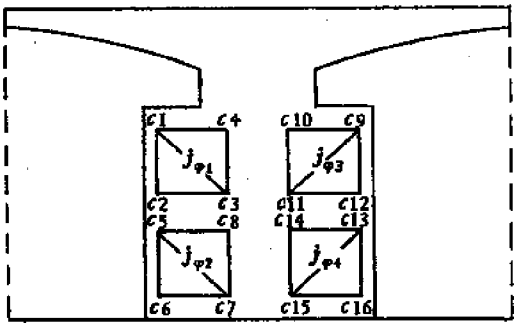


图 10-10　励磁绕组中的约束电密 J_φ

端项中有 $-J_\varphi$，所以单元分析结果将成为下状：

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{A}^e}=\begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{A}_{zi}^e \\ \dot{A}_{zj}^e \\ \dot{A}_{zm}^e \end{bmatrix}-\frac{1}{3}\Delta_e\dot{J}_{\varphi e}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{k}^e\mathbf{A}^e-\frac{1}{3}\Delta_e\mathbf{J}_\varphi^e \tag{10-33}$$

上式说明，对于这 8 个单元，系数阵 $\mathbf{k}^e$ 仍与不加约束时相同；差别在于施加约束时将多出一项由约束电密 J_φ 所产生的 $-\frac{1}{3}\Delta_e\mathbf{J}_\varphi^e$ 项．此时，总体方程将成为

$$\mathbf{KA}+\mathbf{UJ}_\varphi=\mathbf{F} \tag{10-34}$$

式中 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{F}$ 与未加约束时相同；$\mathbf{J}_\varphi$ 为待定的约束电密（共 4 个）所组成的列阵；$\mathbf{U}$ 为 $4\times N$ 阶矩阵，其中仅 4 个元素为 $-\frac{1}{3}\Delta_e$，其余元素均为零．

其次，由于约束电密的引入，励磁绕组每匝电流成为相等，于是有

$$\left.\begin{aligned}
&-js\omega_1\sigma\Delta_c\left[\frac{1}{3}(\dot{A}_{c1}+\dot{A}_{c2}+\dot{A}_{c3})+\frac{1}{3}(\dot{A}_{c1}+\dot{A}_{c3}+\dot{A}_{c4})\right]+\dot{J}_{\varphi 1}2\Delta_c=\dot{I}_f\\
&-js\omega_1\sigma\Delta_c\left[\frac{1}{3}(\dot{A}_{c5}+\dot{A}_{c6}+\dot{A}_{c7})+\frac{1}{3}(\dot{A}_{c5}+\dot{A}_{c7}+\dot{A}_{c8})\right]+\dot{J}_{\varphi 2}2\Delta_c=\dot{I}_f\\
&-js\omega_1\sigma\Delta_c\left[\frac{1}{3}(\dot{A}_{c9}+\dot{A}_{c10}+\dot{A}_{c11})+\frac{1}{3}(\dot{A}_{c9}+\dot{A}_{c11}+\dot{A}_{c12})\right]+\dot{J}_{\varphi 3}2\Delta_c=\dot{I}_f\\
&-js\omega_1\sigma\Delta_c\left[\frac{1}{3}(\dot{A}_{c13}+\dot{A}_{c14}+\dot{A}_{c15})+\frac{1}{3}(\dot{A}_{c13}+\dot{A}_{c15}+\dot{A}_{c16})\right]+\dot{J}_{\varphi 4}2\Delta_c=\dot{I}_f
\end{aligned}\right\}\quad(10\text{-}35)$$

再考虑到励磁绕组为短接，$\oint\dot{\mathbf{E}}_t\cdot d\mathbf{l}=\dot{I}_fR_f$，可得

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{6}js\omega_1(\dot{A}_{c1}+\dot{A}_{c2}+\dot{A}_{c3}+\dot{A}_{c1}+\dot{A}_{c3}+\dot{A}_{c4})2l-\frac{1}{6}js\omega_1(\dot{A}_{c5}+\dot{A}_{c8}+\dot{A}_{c7}\\
&\quad+\dot{A}_{c5}+\dot{A}_{c7}+\dot{A}_{c8})2l-\frac{1}{6}js\omega_1(\dot{A}_{c9}+\dot{A}_{c10}+\dot{A}_{c11}+\dot{A}_{c9}+\dot{A}_{c11}+\dot{A}_{c12})2l\\
&\quad-\frac{1}{6}js\omega_1(\dot{A}_{c13}+\dot{A}_{c14}+\dot{A}_{c15}+\dot{A}_{c13}+\dot{A}_{c15}+\dot{A}_{c16})2l=\dot{I}_f\frac{1}{\sigma}\frac{8l}{2\Delta_c}
\end{aligned}\qquad(10\text{-}36)$$

式中 l 为励磁绕组的半匝长. 消去式(10-35)和(10-36)中的 I_f，可得 4 个约束方程：

$$\left.\begin{aligned}
&-js\omega_1\sigma(2\dot{A}_{c1}+\dot{A}_{c2}+2\dot{A}_{c3}+\dot{A}_{c4})+\frac{1}{3}js\omega_1\sigma(2\dot{A}_{c5}+\dot{A}_{c6}+2\dot{A}_{c7}+\dot{A}_{c8}\\
&\quad+2\dot{A}_{c9}+\dot{A}_{c10}+2\dot{A}_{c11}+\dot{A}_{c12}+2\dot{A}_{c13}+\dot{A}_{c14}+2\dot{A}_{c15}+\dot{A}_{c16})+8\dot{J}_{\varphi 1}=0\\
&-js\omega_1\sigma(2\dot{A}_{c5}+\dot{A}_{c6}+2\dot{A}_{c7}+\dot{A}_{c8})+\frac{1}{3}js\omega_1\sigma(2\dot{A}_{c1}+\dot{A}_{c2}+2\dot{A}_{c3}+\dot{A}_{c4}\\
&\quad+2\dot{A}_{c9}+\dot{A}_{c10}+2\dot{A}_{c11}+\dot{A}_{c12}+2\dot{A}_{c13}+\dot{A}_{c14}+2\dot{A}_{c15}+\dot{A}_{c16})+8\dot{J}_{\varphi 2}=0\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&-js\omega_1\sigma(2\dot{A}_{c13}+\dot{A}_{c14}+2\dot{A}_{c15}+\dot{A}_{c16})+\frac{1}{3}js\omega_1\sigma(2\dot{A}_{c1}+\dot{A}_{c2}+2\dot{A}_{c3}+\dot{A}_{c4}\\
&\quad+2\dot{A}_{c5}+\dot{A}_{c6}+2\dot{A}_{c7}+\dot{A}_{c8}+2\dot{A}_{c9}+\dot{A}_{c10}+2\dot{A}_{c11}+\dot{A}_{c12})+8\dot{J}_{\varphi 4}=0
\end{aligned}\right\}\quad(10\text{-}37)$$

写成矩阵形式时有

$$\mathbf{VA}+\mathbf{TJ}_\varphi=\mathbf{0}\qquad(10\text{-}38)$$

式中 $\mathbf{V}$ 为 $4\times N$ 阶矩阵，大部分元素为零，小部分元素为 $-js\omega_1\sigma$，$-2js\omega_1\sigma$，$\frac{1}{3}js\omega_1\sigma$ 和 $\frac{2}{3}js\omega_1\sigma$；$\mathbf{T}$ 为 4 阶对角线阵，其对角线元素为 8.

把式(10-34)和(10-38)合并，可得

$$\mathbf{K}'\mathbf{A}=\mathbf{F}\qquad(10\text{-}39)$$

其中 $\mathbf{K}'=\mathbf{K}-\mathbf{K}_\Delta$，$\mathbf{K}_\Delta=\mathbf{U}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}$. 不难得到，上式中的新总体系数矩阵 $\mathbf{K}'$ 仍是一个 N 阶对称方阵. 由于 $\mathbf{K}_\Delta$ 中的大部分元素为零，仅在引入均束电密的单元中的各个节点处有值，故只要对 $\mathbf{K}$ 在上述节点所涉及的元素处稍加修改，即可得到 $\mathbf{K}'$. 求解非线性方程组(10-39)，即可得到施加约束时各点的向量磁位；再代入式 (10-38)，即可求出励磁绕组

内的约束电密值.

（五）直轴瞬态电抗 x'_d 的计算

瞬态电抗与运算电抗的关系 对于无阻尼绕组的同步电机，当定子直轴上加有频率为 $s\omega_1$ 的随时间正弦变化的脉振磁势时，直轴运算电抗的倒数为

$$\frac{1}{x_d(js\omega_1)}=\frac{1}{x_d}+\left(\frac{1}{x'_d}-\frac{1}{x_d}\right)\frac{js\omega_1 T'_d}{1+js\omega_1 T'_d} \tag{10-40}$$

式中 T'_d 为直轴瞬态时间常数. 当 $s\to\infty$ 时，$\frac{1}{x_d(j\infty)}\to\frac{1}{x'_d}$，由此可得

$$x'_d=\lim_{s\to\infty}x_d(js\omega_1) \tag{10-41}$$

x'_d 的计算 在转子静止，定子施加高频（$s=10^6$）、电流幅值为 $I_m=\sqrt{2}I_N$ 的直轴脉振磁势，励磁绕组短接并施加串联约束，极身和极靴之间的磁导率分别修改为 μ' 和 μ'' 等条件下，求解式(10-39)，经过多次迭代，使 $\dot{A}_e$ 收敛；然后求取单位定子电流所产生的复磁链，即可求出直轴瞬态电抗 x'_d.

以 A 相为例，当 $\dot{I}_A=\dot{I}_m$，$\theta_0=0$ 时，与式(10-13)相似，

$$x'_d=2\pi f\beta\dot{\psi}_\beta\frac{1}{a\dot{I}_{am}}\frac{I_N}{U_{\phi N}}+x_{\sigma e} \tag{10-42}$$

式中 $\dot{\psi}_\beta$ 为 A 相一个相带的复磁链，$\dot{I}_{am}$ 为 A 相的支路电流，

$$\dot{\psi}_\beta=\sum_{k=1}^{q}(\dot{A}_{Uk}-\dot{A}_{Lk})l_{eff} \tag{10-43}$$

取 A、B、C 三相电抗的平均值作为该短路电流下的 x'_d 值. 依次计算不同定子电流下的 $x'_{d(饱和)}$，可得 $x'_{d(饱和)}=f(I)$. 若把定、转子铁心的 ν_e 值赋以磁化曲线直线部分处的 ν_e 值，算出的 x'_d 即为不饱和值.

（六）计算实例

仍用 300MW 的水轮发电机作为算例，网格剖分图见图 10-3，总节点数 $N=2047$. 对于所研究的电机，$\mu'=1.048\mu_0$，$\mu''=1.069\mu_0$；两个极下励磁绕组共 2×24 匝，剖分时等效地分成 48 块，共 48 个约束方程，每块分成 2 个单元；故 **K** 为 2047 阶方阵，**T** 为 48 阶方阵，**U** 为 2047×48 阶矩阵，**V** 为 48×2047 阶矩阵. 实际计算时，磁阻率的欠松弛因子前、后取为 0.3—0.1，磁感强度的控制误差 $\epsilon_B=0.1\%$，经过 15 次迭代达到收敛.

图 10-11 表示计算 x'_d 时的场图，图 10-12 表示不同定子电流时的 $x'_{d饱和}=f(I)$.

（七）超瞬态电抗 x''_d 和 x''_q 的计算

在计算 x'_d 所要求的条件下，再设置阻尼绕组，并把阻尼槽内的磁导率加以修改以计及端环漏磁的影响. 求解由有限元法离散所得的复非线性方程组，并求取单位定子电流所产生的复磁链，再加上 $x_{\sigma e}$，即可得到直轴超瞬态电抗 x''_d. 图 10-13 表示计算 x''_d 时的场图.

把脉振磁势加到交轴上，励磁绕组的电导率赋以零，同理可求得 x''_q. 图 10-14 表示计算 x''_q 时的场图.

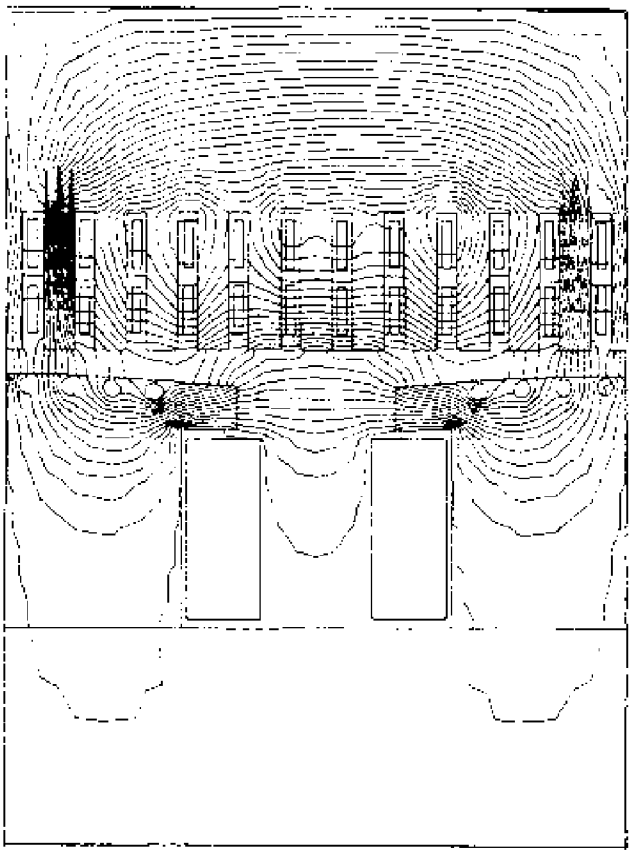


图 10-11　计算 x'_d 时的场图

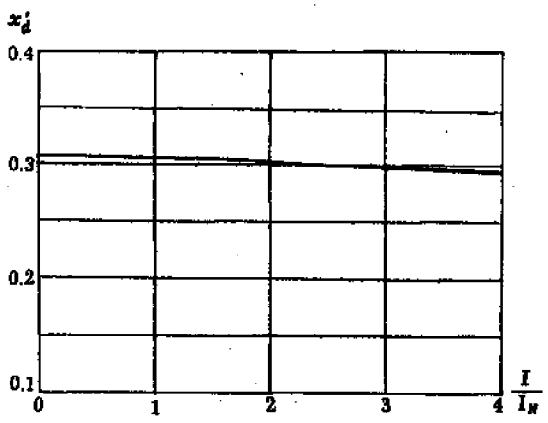


图 10-12　$x'_{d(\text{饱和})}=f(I)$

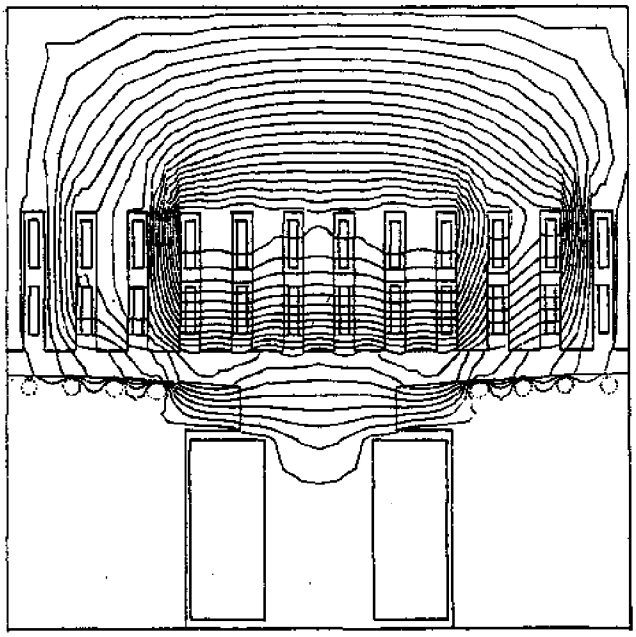


图 10-13　计算 x_d' 时的场图

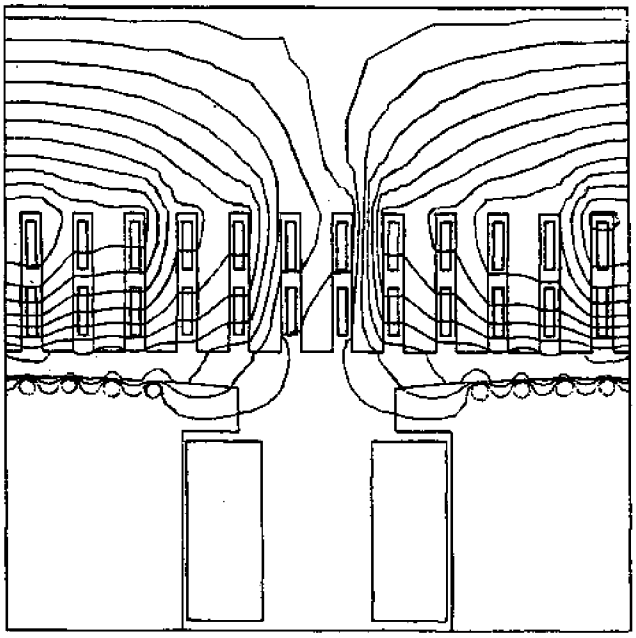


图 10-14　计算 x_q' 时的场图

10-4 异步运行时汽轮发电机的运算电抗及其频率特性[18—30]

异步运行是汽轮发电机的一种非正常运行情况. 当汽轮发电机的励磁绕组发生故障而失去直流励磁($I_f=0$)时,发电机的同步电磁功率下降为零,于是转子将在转差率 $s<0$ 的异步转速下作为感应发电机运行. 异步运行 ($s<0$) 时,发电机一方面从电网吸收滞后的无功功率用作激磁;另一方面由于实心转子和励磁绕组中的感应电流,发电机仍可向电网送出一定的有功功率. 因此,汽轮发电机的异步运行对保持系统稳定是有利的. 另一种情况是同步发电机的稳态不对称运行,此时定子电流中将出现一定的负序分量,此负序电流将在气隙内产生一反向同步旋转的旋转磁场;对于此反向磁场,转子就相当于在 $s=2$ 下作异步运行.

异步运行时,由于 d、q 轴的参数不等,在定子侧产生谐波电流、功率振荡和振动;另外,由于实心转子内的感应涡流,还将引起转子过热,从而限制了异步运行的运行时间和不对称运行时负序电流的数值.

为算出异步运行时汽轮发电机的性能,首先应当确定异步运行时直轴和交轴运算电抗 $x_d(js\omega_1)$,$x_q(js\omega_1)$ 的频率特性. 文献[18—21]在一系列理想化的简化假定下,用解析法求解了实心转子内的二维涡流方程,导出了 $x_d(js\omega_1)$和 $x_q(js\omega_1)$的解析表达式. 实践表明,由于转子上开有齿、槽,形状十分复杂,槽楔又采用金属导电材料,有时还装设阻尼绕组,所有这些使得异步运行时转子中的涡流分布变得极为复杂;因此只有用数值法才能得到接近于实际的计算结果. 本节用有限元法来研究这一问题.

(一) 基本方法

稳态异步运行时,定子 d、q 轴电流是转差频率的正弦交流. 在定子的 d、q 轴上分别加上转差频率的脉振磁势,转子静止不动,励磁绕组加以串联约束,用有限元法求解电机内二维正弦电磁场边值问题,可得电机横断面上各点的向量磁位 $\dot{A}_z$ 和磁场;由此即可算出定子的直轴和交轴复磁链以及该频率下的运算电抗. 依次算出各个转差率 (s 从 0 到 10^6) 下的运算电抗,最后可得异步运行时的频率特性.

基本假定 在整个分析中,作以下假定:

(1) 以转子静止、定子上分别加上转差频率的 d、q 轴电流的办法,来模拟实际的异步运行情况;

(2) 把问题作为二维正弦涡流场问题来处理;

(3) 不计定子铁心中的涡流,定子铁心的磁导率设为常值,电导率设为零;转子的磁导率和电导率均认为是常值;整个问题作为线性问题来处理.

基本方程、边界条件和有限元离散 图 10-15 表示汽轮发电机的求解域. 稳态异步运行时,复向量磁位 $\dot{A}_z$ 满足下列二维涡流方程和边界条件:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_e\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_e\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}\right)=-\dot{J}_s-\dot{J}_\varphi+js\omega\sigma\dot{A}_z\\&\dot{A}_z|_{ABC}=\dot{A}_z|_{ED}=0\\&\dot{A}_z|_{AE}=-\dot{A}_z|_{CD}\end{aligned}\right\}\tag{10-44}$$

式中 $\dot{J}_s$ 为源电密；$\dot{J}_\varphi$ 为约束电密.

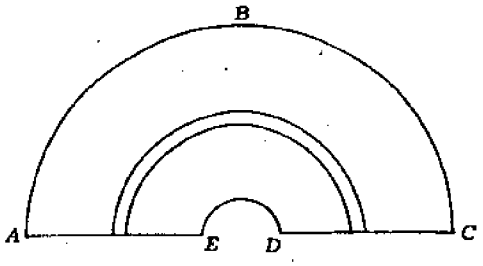


图 10-15　汽轮发电机的求解域

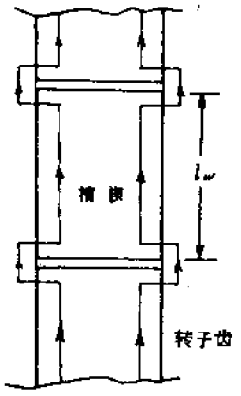


图 10-16　转子槽楔内感应电流的路径

把与式(10-44)所对应的变分问题离散化，并计及励磁绕组的约束条件，可得如下的复矩阵方程

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K} & \mathbf{U}\\ \mathbf{V} & \mathbf{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{A}}\\ \dot{\mathbf{J}}_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{J}}_s\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\tag{10-45}$$

式中 $\mathbf{A}$ 和 $\dot{\mathbf{J}}_s$ 分别为向量磁位 $\dot{A}_z$ 和源电密 $\dot{J}_s$ 的列阵；$\dot{\mathbf{J}}_\varphi$ 为约束电密的列阵. 求解式(10-45)，可得场域内各点的 A_z 值.

运算电抗　当定子上加上直轴脉振磁势时，直轴运算电抗的标么值为

$$x_d(js\omega_1)=2\pi f_1\frac{\dot{\psi}_d}{\dot{I}_d}\frac{I_N}{U_{\varphi N}}+x_m\tag{10-46}$$

式中 $\dot{\psi}_d$ 为 d 轴磁链. 对于 A 相电流为 $\dot{I}_m$，B、C 相电流分别为 $-\frac{1}{2}\dot{I}_m$ 的情况，$\dot{I}_d=\dot{I}_A$，$\dot{\psi}_d=\dot{\psi}_A$. 对二极汽轮发电机，$A$ 相磁链 $\dot{\psi}_A$ 为

$$\dot{\psi}_A=2\sum_{k=1}^{q}(\dot{A}_{Uk}-\dot{A}_{Lk})l_{eff}\tag{10-47}$$

类似地，定子上加上交轴磁势，可以求得交轴运算电抗 $x_q(js\omega_1)$.

槽楔的等效电导率　实际槽楔是分段的. 为便于计算，根据电流的路径，将分段的槽楔化为等效的连续槽楔. 设每个槽楔长为 l_w，在槽楔中部处感应电流沿轴向流动，到距槽楔两端 $\frac{1}{4}l_w$ 处，电流通过槽楔与齿之间的接触电阻转向小齿；在小齿内，电流在 $\frac{1}{4}$ 齿宽内沿轴向流动，直到下一个槽楔的 $\frac{1}{4}l_w$ 处又流回槽楔，如图 10-16 所示. 由此可以画

出相应的等效电路，并算出槽楔的等效电导率.

（二）计算实例

以 1 台二极 125MW 汽轮发电机作为实例进行计算. 定子内径 $D_i=1.14\text{m}$，槽数

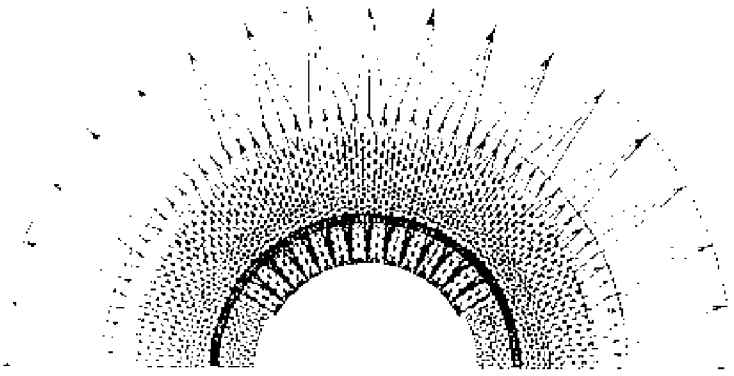


图 10-17 中、高转差率时的网格剖分（$N=2667$）

$Q_s=36$；转子铁心长 $l_r=3.5\text{m}$，槽数 $Q_r=28$，励磁绕组总匝数 $n_f=84$. 转子槽内装有非磁性金属槽楔，每个槽内槽楔分成 12 段. 取槽楔与转子齿之间单位面积的接触电阻为 $0.001\Omega/\text{cm}^2$，算出槽楔的等效电阻率 $\sigma_{w,eq}=3.93\times10^5\,\frac{1}{\Omega\cdot\text{m}}$.

网格剖分 计算转子实心体内的涡流场时，涡流区内的单元剖分十分重要. 剖分不当，场图就不能反映磁场透入转子的实际情况，参数的精度亦无从谈起. 计算表明，在中、高转差率时（$s\geqslant0.05$），转子表面的第一个透入深度内最好分成 4—5 层，并使层内节点的半径和张角随着透入深度的不同而自动调整；高转差时，节点应主要放在转子齿区. 图 10-17 表示定、转子均为开槽，中、高转差率时的网格剖分.

定、转子均为光滑时 图 10-18 表示定、转子表面均为光滑、励磁绕组开路，定子直轴上加有正弦分布的电流片（理想情况），转差率很低（$s=0.0001$）时电机内的磁场分布；其中图(a)为定子 d 轴电流的瞬时值达到最大值（$s\omega_1t=0$ 时）的情况，图(b)为 d 轴电流为零（$s\omega_1t=90°$时）的情况. 从图 10-18(a)可见，此时由于转差率很低，转子的涡流反应较弱，故定子磁通绝大部分将通过转子本体而闭合. 对于图 10-18(b)所示瞬间，定子 d 轴电流为零，此时电机内的全部磁场由转子感应涡流产生，故主要集中在转子本体.

图 10-19 表示转差率 $s=0.01$，$s\omega_1t=0$ 时的场图. 从图可见，此时转差率变大，转子的涡流反应增大，磁通通过转子时出现明显的集肤效应.

定、转子开槽时 图 10-20 表示定、转子均为开槽，励磁绕组短接，转子装有槽楔，直轴脉振磁势的瞬时值达到最大值，转差率 $s=0.0001$，2 和 10^8 时的直轴磁场图. 从图 10-20 (c) 可见，当 $s=10^8$ 时，由于转子的涡流反应极强，磁通将不进入转子齿部和本体，图 10-21 表示 $s=0.0001$ 时的交轴场图.

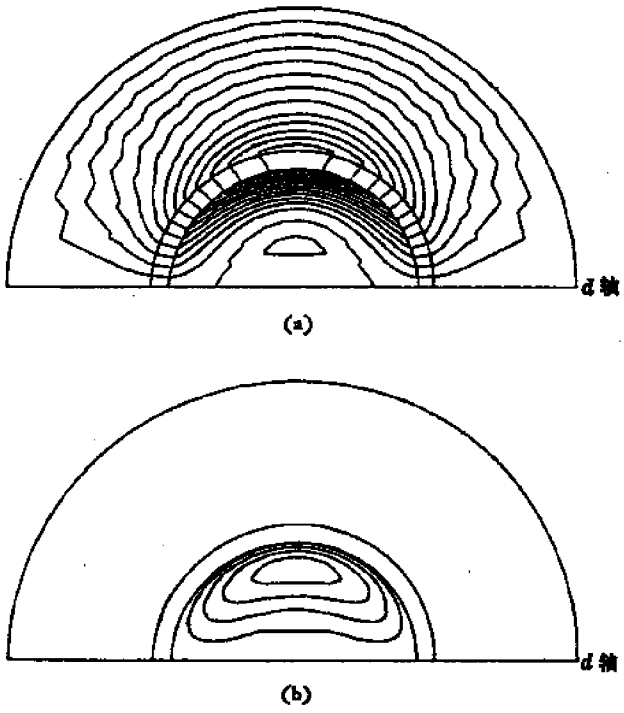


图 10-18　定、转子表面均为光滑，定子 d 轴加有正弦电流片，转差率 $s=0.0001$ 时的场图
(a) $s\omega_1 t=0$；　(b) $s\omega_1 t=90°$

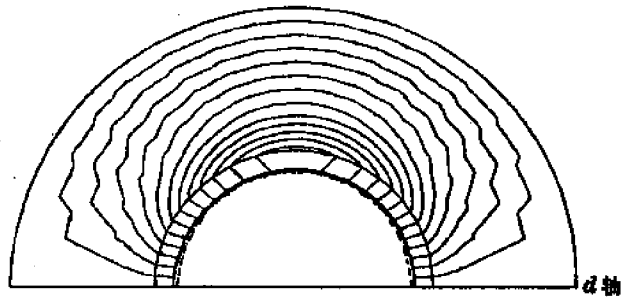
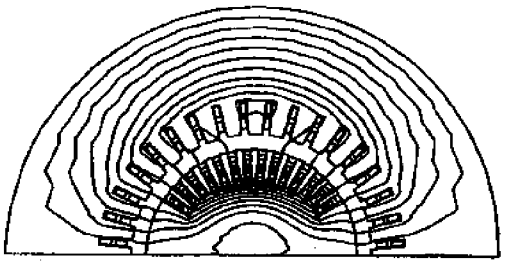
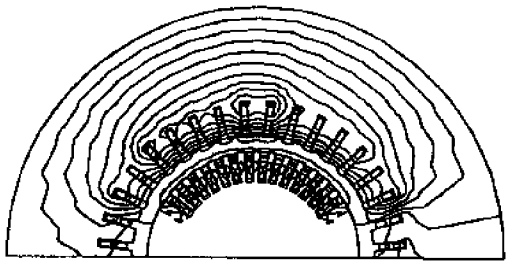


图 10-19　定、转子表面均为光滑，$s=0.01$ 时的直轴场图 ($s\omega_1 t=0$)

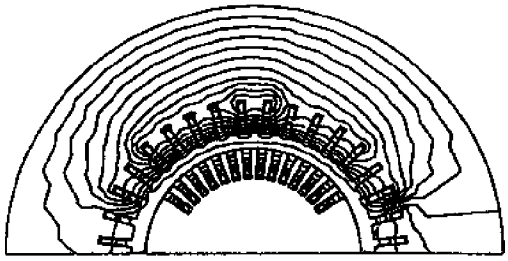
图 10-22 表示定、转子开槽，转子装有槽楔，励磁绕组分别为开路和短路时$\frac{1}{x_d(js\omega_1)}$和$\frac{1}{x_q(js\omega_1)}$的频率特性. 为了对比，图中同时画出了定、转子表面均为光滑的理想情况下的频率特性. 从图可见，实际和理想情况下的频率特性差别较大；这说明实际应用时，需要计及齿槽的作用并用数值法来计算.



(a)



(b)



(c)

图 10-20　定、转子开槽，励磁绕组短接时的直轴场图
(a) $s=0.0001$；(b) $s=2$；(c) $s=10^8$.

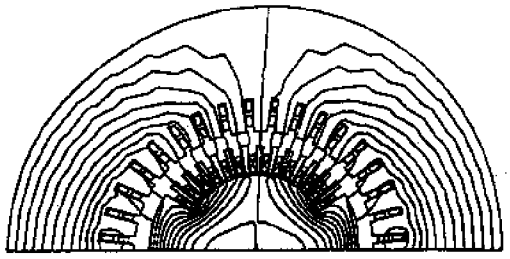


图 10-21　定、转子开槽，$s=0.0001$ 时的交轴场图

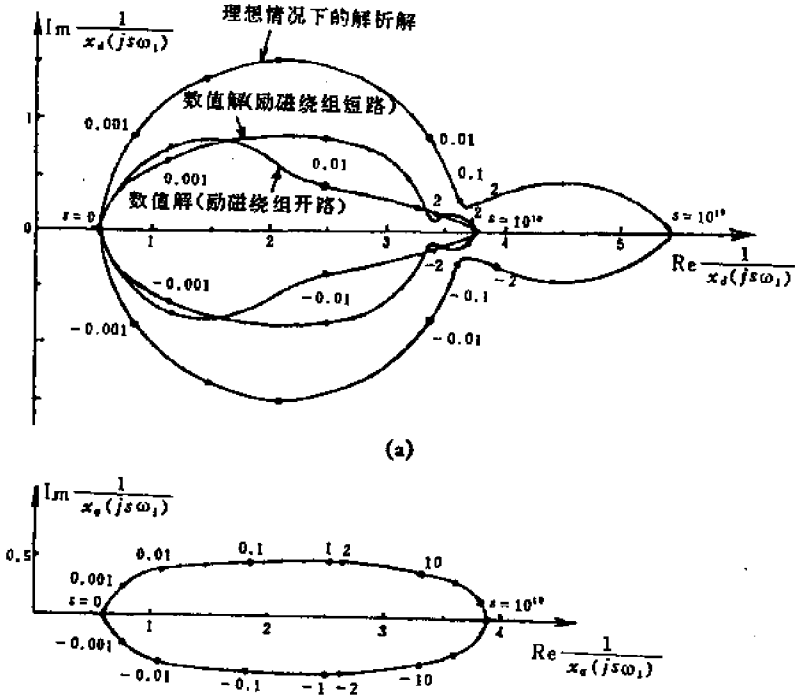


图 10-22　125MW 汽轮发电机的频率特性
(a) d 轴；(b) q 轴

10-5　汽轮发电机的端区磁场[31—35]

随着汽轮发电机单机容量的增长，电机的电磁负荷也急剧增加，因此端部结构件的损耗和局部发热，在事故状态下绕组端部电磁力的计算等问题，已成为研制大型汽轮发电机的重要课题. 这些问题的解决，与电机端区磁场的计算密切相关. 近 30 年来，国内外研究人员在这方面做了许多工作；但由于端区结构和绕组端部的电流分布十分复杂，使端区磁场的计算变得十分困难. 近年来，由于有限元法和数值计算的引入，端区磁场的计算已大体得到解决.

(一) 端部磁场的解法

端部磁场既可用解析法、又可用数值法来求解. 解析法中有分离变量法、位函数法、多重傅氏级数法和利用比奥-沙伐定律进行直接积分等方法. 这些方法中有的忽略了压板和其他结构件中涡流的影响，有的忽略了端盖和机座壁的影响，有的把绕组端部近似作为电流片来处理. 由于各种简化，所以从定量角度来看，解析法得到的结果是不够准确的. 数值法是把端部场作为准三维行波场，在圆柱坐标中用有限元法来求解. 数值法不仅能计及各结构件的实际形状和压板、电磁屏蔽的影响，还能计及磁导率的各向异性性

质，所以数值法的计算结果常常与实测结果很接近.

（二）端区的边界条件

在研究端区磁场时，常常把定子铁心端面作为 $\mu_{Fe}=\infty$，$\sigma=0$ 的磁镜面来看待，这样就可以用镜像法来建立该处的边界条件. 但是，端部载流导体实际是从槽中伸出；另外，定、转子中间还有气隙. 气隙的存在破坏了铁磁边界的连续性，并使定、转子铁心之间产生磁位差，妨碍了镜像法的应用. 针对此情况，文献［31，32］提出一个简单而合理的处理方法：先把气隙闭合，使定、转子端面构成一个完整的磁镜面，然后再用外加的"气隙回转电流"来补偿由气隙所造成的定、转子之间的磁位差，并使端部电流保持连续. 这样做既满足了应用镜像法的条件，又满足了端部电流的连续性. 气隙回转电流 i_δ 的值，可用安培环路定律来确定. 对于单匝线圈，它就等于该线圈所产生的气隙磁势值(图 10-23). 若 $\mu_{Fe}=\infty$，线圈的相对节距为 β，$\beta=\frac{y_1}{\tau}$，则

$$i'_\delta=\frac{2\pi-\beta\pi}{2\pi}i,\qquad i''_\delta=\frac{\beta}{2}i \tag{10-48}$$

若定子铁心端面覆盖以 $\sigma\approx\infty$的高电导率层，考虑到层内涡流对端区时变磁场的屏蔽作用，可近似把边界面作为 $\mu=0$ 的不透磁面来对待. $\mu=0$ 时，镜像电流的方向与 $\mu_{Fe}=\infty$时相反.

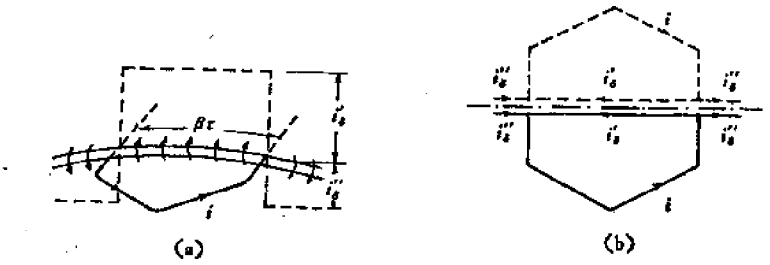


图 10-23 $\mu_{Fe}=\infty$时端部电流及其镜像

(a) 短距线圈及其气隙磁势；(b) 端部电流、气隙回转电流及其镜像

铁心端面成为闭合平面后，即可用镜像法来建立边界条件. 下面分成三种情况来讨论.

铁心端面为 $\mu_{Fe}=\infty$的理想磁镜面时 设 $z<0$ 区为铁磁介质，$\mu_{Fe}=\infty$；$z>0$ 区为端区，$\mu=\mu_0$；$z=0$ 处为分界面；如图 10-24 所示. 端区 $P(x_v,y_v,z_v)$处的电流密度为 j_i (x_v,y_v,z_v)，$i=x$，y，z. 根据镜像法，在 $z<0$ 区的对应位置 $P'(x'_v,y'_v,z'_v)$处，镜像电流密度 $j'_i(x'_v,y'_v,z'_v)$为

$$\left.\begin{aligned} j'_i(x'_v,y'_v,z'_v)&=j_i(x_v,y_v,z_v)\quad i=x\text{ 或 }y\\ j'_z(x'_v,y'_v,z'_v)&=-j_z(x_v,y_v,z_v)\end{aligned}\right\} \tag{10-49}$$

式中 $x'_v=x_v$，$y'_v=y_v$，$z'_v=-z_v$.

因为向量磁位 A 等于

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}dv}{\rho} \tag{10-50}$$

式中 ρ 为电密 $\mathbf{J}$ 到场点 $Q(x,y,z)$ 之间的距离，$\rho=\sqrt{(x-x_v)^2+(y-y_v)^2+(z-z_v)^2}$；所以由原像和镜像电密在 Q 点所生的向量磁位的 z 向分量 A_z 为

$$A_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V\frac{j_z dV}{\rho}+\int_{V'}\frac{j'_z dV'}{\rho'}\right] \tag{10-51}$$

式中 V 和 V' 分别为原像和镜像所在的区域. 考虑到 $j'_z=-j_z$，在分界面上 $\rho'=\rho$，可得分界面上向量磁位 z 分量（即法向分量）的边值为

$$A_{z(z=0)}=0 \tag{10-52}$$

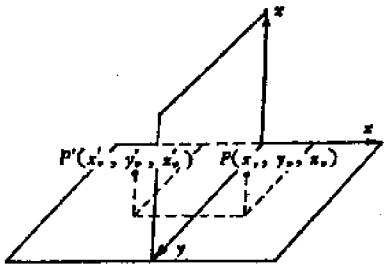


图 10-24　端区电密的原像和镜像

另外，由

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{j_z(z-z_v)dV}{\rho^3} \tag{10-53}$$

可得，原像和镜像在 Q 点处所生的 $\frac{\partial A_z}{\partial z}$ 为

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V\frac{j_z(z-z_v)}{\rho^3}dV+\int_{V'}\frac{j'_z(z-z'_v)}{\rho'^3}dV'\right] \tag{10-54}$$

在分界面上，$z=0$，于是

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}_{(z=0)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V\frac{j_z z_v}{\rho^3}dV+\int_{V'}\frac{j'_z z'_v}{\rho'^3}dV'\right] \tag{10-55}$$

同理

$$\frac{\partial A_y}{\partial z}_{(z=0)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V\frac{j_y z_v}{\rho^3}dV+\int_{V'}\frac{j'_y z'_v}{\rho'^3}dV'\right] \tag{10-56}$$

因为 $j'_x=j_x$，$j'_y=j_y$，$z'_v=-z_v$，在分界面上 $\rho'=\rho$，于是可得在分界面处向量磁位切向分量的法向导数为

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}_{(z=0)}=\frac{\partial A_y}{\partial z}_{(z=0)}=0 \tag{10-57}$$

不难看出，式(10-52)和(10-57)与式(7-237)一致.

铁心端面为 μ=0 的理想磁屏蔽时　这时 $z<0$ 区内 $\mu=0$（对时变场，这种情况相当于 $\sigma=\infty$的情况）. 由镜像法可知，此时

$$\left.\begin{aligned}j'_i(x'_v,y'_v,z'_v)&=-j_i(x_v,y_v,z_v)\quad i=x\text{ 或 }y\\ j'_z(x'_v,y'_v,z'_v)&=j_z(x_v,y_v,z_v)\end{aligned}\right\} \tag{10-58}$$

式中 $x'_v=x_v$，$y'_v=y_v$，$z'_v=-z_v$.

仿照前面的分析，可得交界面($z=0$)上的边界条件为

$$A_{x(z=0)}=A_{y(z=0)}=0,\qquad \frac{\partial A_z}{\partial z}_{(z=0)}=0 \tag{10-59}$$

即向量磁位的切向分量为零，法向分量的法向导数亦为零. 不难看出，式(10-59)与式(7-242)亦是一致的.

铁心端面上有电流片时 若铁磁介质的 $\mu_{Fe}=\infty$，分界面上有电流片，其电负载为 K_x，K_y；则与第一种情况的分析相似，在 $z=0$ 的边界面上向量磁位的法向分量为

$$A_{z(z=0)}=0 \tag{10-60}$$

另外，在分界面上有

$$H_{y(z=0)}=-K_x, \qquad H_{x(z=0)}=K_y \tag{10-61}$$

考虑到

$$B_{z(z=0)}=\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)_{(z=0)}=-\frac{\partial A_y}{\partial z}_{(z=0)}$$

由此可得，分界面上向量磁位切向分量 A_y 的法向导数为

$$\frac{\partial A_y}{\partial z}_{(z=0)}=-\mu_0 K_y \tag{10-62}$$

同理

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}_{(z=0)}=-\mu_0 K_x \tag{10-63}$$

10-6 汽轮发电机定、转子绕组端部电流密度的分布[33—37]

用有限元法求解端区磁场时，首先要给出定、转子绕组端部源电流密度的分布. 本节将研究二极汽轮发电机惯用的定子三相 60°相带、双层篮式绕组端部电流密度的表达式，以及转子同心式励磁绕组端部电流密度的表达式.

数值计算时，通常把端区磁场作为行波场来处理，因此在以下分析中，把端部电密分解成基波和空间谐波；为符合物理情况，端部电密及其谐波都应满足 $\mathrm{div}\mathbf{J}=0$ 的要求.

（一）定子端部的电流密度

整个定子绕组由分属于各相的许多线圈所构成，每个线圈的端部如图 10-25 所示. 为简化分析，把定子绕组端部分成三部分：直线段；圆锥面渐开线段和鼻端. 下面在圆柱坐标中进行分析.

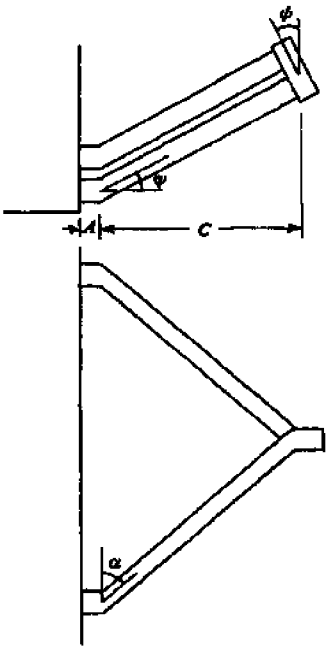


图 10-25 定子绕组端部

直线段 直线段只有轴向（z 方向）电流. 不考虑导体内部的涡流时，可以认为每根线棒内的电流密度 j 为均匀分布

$$j=\frac{i}{bh}=\frac{i_\phi}{abh} \tag{10-64}$$

式中 i 和 i_ϕ 分别为线棒电流和相电流的瞬时值，a 为支路数；b 和 h 分别表示线棒的宽度和高度.

图 10-26 表示一层中属于同一相的线棒中电流密度的分布，图中电流的正方向为沿

z 轴方向. 把属于同一相的 q 个线棒的电密 j 沿切向(θ 方向)展开成傅氏级数，则 ν 次谐波电流密度为

$$j_{z\phi\nu}(\theta,t) = j_{\phi\nu}\sin\nu\theta, \qquad \nu = 1,3,5,\cdots \tag{10-65}$$

其中

$$\begin{aligned} j_{\phi\nu} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} j(\theta)\sin\nu\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{q-1}\int_{\theta_0-\frac{\theta_b}{2}+k\theta_t}^{\theta_0+\frac{\theta_b}{2}+k\theta_t} j(\theta)\sin\nu\theta d\theta \\ &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{i}{h\tau}2qk_{K\nu}k_{d\nu} \\ &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{i_\phi}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{K\nu}k_{d\nu} \end{aligned} \tag{10-66}$$

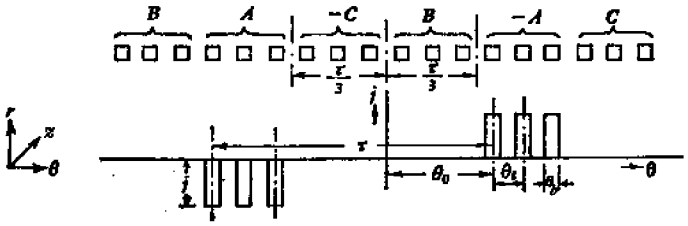


图 10-26　同一层中一相线棒的电密分布

式中 Q 为定子的总槽数，$Q=6q$；q 为每极每相槽数；r 和 τ 分别为导体所在位置的半径和与此半径对应的极距，$\tau=\pi r$；$k_{d\nu}$ 和 $k_{K\nu}$ 分别为绕组和槽电流的 ν 次谐波分布因数；

$$k_{d\nu} = \frac{\sin\nu\frac{q\alpha}{2}}{q\sin\frac{\nu\alpha}{2}}, \qquad k_{K\nu} = \frac{\sin\nu\frac{\theta_b}{2}}{\nu\frac{\theta_b}{2}} = \frac{\sin\frac{\nu b}{2r}}{\frac{\nu b}{2r}} \tag{10-67}$$

θ_b 为与导体宽度对应的电弧度，$\theta_b=\dfrac{b}{r}$.

考虑到三相绕组的轴线在空间互差 120°，于是可得 A、B、C 三相单层线棒的 ν 次谐波电流密度为

$$\left.\begin{aligned} j_{zA\nu}(\theta,t) &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{i_A}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{K\nu}k_{d\nu}\sin\nu\theta \\ j_{zB\nu}(\theta,t) &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{i_B}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{K\nu}k_{d\nu}\sin\nu(\theta-120°) \\ j_{zC\nu}(\theta,t) &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{i_C}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{K\nu}k_{d\nu}\sin\nu(\theta+120°) \\ &\qquad \nu = 1,3,5,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{10-68}$$

稳态对称运行时，三相电流在时间相位上互差 120°，

$$i_A = I_m\sin\omega t, \qquad i_B = I_m\sin(\omega t-120°), \qquad i_C = I_m\sin(\omega t+120°) \tag{10-69}$$

于是上层三相合成电密的 ν 次谐波为

$$\begin{aligned} j_{z\nu(上)} = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{K\nu}k_{d\nu}[&\sin\omega t\sin\nu\theta \\ &+\sin(\omega t-120°)\sin\nu(\theta-120°)+\sin(\omega t+120°)\sin\nu(\theta+120°)] \end{aligned}$$

$$=\pm(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{3}{2}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{K\nu}k_{d\nu}\cos(\omega t\mp\nu\theta)$$

$$=\pm(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{z\nu(上)}\cos(\omega t\mp\nu\theta)\qquad \nu=1,5,7,11,\cdots \tag{10-70}$$

式中 $J_{z\nu(上)}=\frac{3}{2}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{K\nu}k_{d\nu}$；$\nu=1$，7，13，…时，电密波为正转行波，取上面一对负号；$\nu=5$，11，…时，电密波为反转行波，取下面一对正号.

下层线棒在空间的排列规律与上层相同，但相差 $\beta\pi$ 电角，且电流方向与上层相反；故下层三相合成电密的 ν 次谐波为

$$j_{z\nu(下)}=\mp(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{z\nu(下)}\cos[\omega t\mp\nu(\theta-\beta\pi)]\qquad \nu=1,5,7,11,\cdots \tag{10-71}$$

式中 $J_{z\nu(下)}=\frac{3}{2}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{K\nu}k_{d\nu}$；$\nu=1$，7，13，…时，取上面的一对负号；$\nu=5$，11，…时，取下面的一对正号.

这里要注意，$J_{z\nu(上)}$和 $J_{z\nu(下)}$中的半径 r，分别是上层和下层线棒处的半径；另外，由于 $k_{K\nu}$与半径 r 有关，所以上、下层的值亦不同，但就基波而言，上、下层的 $k_{K1}\approx1$.

为使上、下层线圈的电密表达式具有更加对称的形式，且使渐开线段的电密表达式更为简单，把原点从图 10-26 中上层 A 相轴线处移过$\frac{\beta\pi}{2}$电角，使它与 A 相上、下层合成轴线重合. 原点改动后，式(10-70)和(10-71)可改写成

$$\left.\begin{aligned}j_{z\nu(上)}&=\pm(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}j_{z\nu(上)}\cos\left[\omega t\mp\nu\left(\theta+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\\ j_{z\nu(下)}&=\mp(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}j_{z\nu(下)}\cos\left[\omega t\mp\nu\left(\theta-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{10-72}$$

渐开线段 在渐开线段，导体的实际电流密度与直线段相同，但因线圈弯成圆锥曲线，所以空间电流密度出现轴向、切向和径向三个分量. 此外，渐开线段实际是一条由若干段不同圆心、不同半径的圆弧连成的近似渐开线，分析时采用顶角为 2φ 的圆锥面上不变基圆的渐开线来描述，计算时用它在圆柱面上的投影.

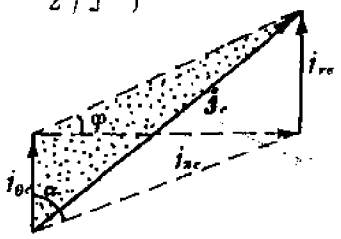


图 10-27 渐开线段电密的 r，θ 和 z 分量

从图 10-27 可见，若线段中某段的电密为 $\mathbf{j}_e$，则其 r，θ 和 z 分量为

$$\frac{j_{ze}}{j_{\theta e}}=\mathrm{tg}\alpha,\qquad \frac{j_{re}}{j_{ze}}=\mathrm{tg}\varphi \tag{10-73}$$

另一方面

$$j_{ze}^2+j_{re}^2+j_{\theta e}^2=j_{\theta e}^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\varphi)=j_e^2 \tag{10-74}$$

式中 α 为 $\mathbf{j}_e$ 在 θ-z 平面上的投影与 θ 轴之间的夹角；φ 为 $\mathbf{j}_e$ 在 r-z 平面上的投影与 z 轴间的夹角. 由此可得

$$\left.\begin{aligned}j_{\theta e}&=\frac{j_e}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\varphi}}=\frac{j_e\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}}\\ j_{ze}&=\frac{j_e\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}},\qquad j_{re}=\frac{j_e\sin\alpha\,\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\mathrm{tg}^2\varphi}}\end{aligned}\right\} \tag{10-75}$$

仿照直线段的电密表达式 (10-72)，上层三相线棒合成电密的 ν 次谐波为

$$j_{w(上)}=\pm(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{3}{2}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{\sigma\nu}k_{d\nu}\cos[\omega t\mp\nu(\theta+\theta_\beta)]$$

$$=\pm(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{w(上)}\cos[\omega t\mp\nu(\theta+\theta_\beta)] \tag{10-76}$$

式中 $J_{w(上)}=\frac{3}{2}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{\sigma\nu}k_{d\nu}$；$k_{\sigma\nu}$与直线段的 $k_{K\nu}$相似，但对应导体宽度的电角 $\theta_b=\frac{\pi}{3q}\frac{b}{H}$，$H$ 为渐开线部分相邻两根线棒中心线间的距离．对下层三相线棒，

$$j_{w(下)}=\mp(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{w(下)}\cos[\omega t\mp\nu(\theta-\theta_\beta)] \tag{10-77}$$

式中 $J_{w(下)}=\frac{3}{2}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{\sigma\nu}k_{d\nu}$．在渐开线段，上、下层线棒间的跨距随着 z 的变化而变化，故式(10-76)和(10-77)中的 θ_β 亦是变化的．θ_β 的准确值应按渐开线的关系求出，如把 θ_β 与 z 之间的关系近似作为线性关系来处理，则

$$\theta_\beta=\frac{\beta\pi}{2}\frac{A+C-z}{C} \tag{10-78}$$

式中 A 和 C 分别为直线段和渐开线段在 z 方向的长度，如图 10-25 所示．

把式(10-76)和(10-77)代入式 (10-75)，可得上层和下层电密 ν 次谐波的 r，θ 和 z 分量分别为

$$\left.\begin{aligned}
j_{rw(上)}&=j_{w(上)}\frac{\sin\alpha\,\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}},\qquad j_{\theta w(上)}=j_{w(上)}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}}\\
j_{zw(上)}&=j_{w(上)}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}}
\end{aligned}\right\} \tag{10-79}$$

$$\left.\begin{aligned}
j_{rw(下)}&=j_{w(下)}\frac{\sin\alpha\,\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}},\qquad j_{\theta w(下)}=-j_{w(下)}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}}\\
j_{zw(下)}&=j_{w(下)}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}}
\end{aligned}\right\} \tag{10-80}$$

可以证明，此时任何一次谐波电密都满足 $\mathrm{div}\mathbf{j}_w=0$ 的要求．

鼻端 鼻端部分的排列情况与直线部分相同，只是其空间位置为上层线棒的位置移过$\frac{\beta\pi}{2}$电角，故鼻端电密的 ν 次谐波 $j_{\nu n}$为

$$j_{\nu n}=\pm(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{3}{2}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{w\nu}k_{d\nu}\cos(\omega t\mp\nu\theta)$$

$$=\pm(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu n}\cos(\omega t\mp\nu\theta) \tag{10-81}$$

式中 $J_{\nu n}=\frac{3}{2}\frac{I_m}{arh}\frac{Q}{3\pi}k_{w\nu}k_{d\nu}$；$k_{w\nu}$类似于直线段的 $k_{K\nu}$．

由于鼻端较小，且离压板较远，故可作近似处理，认为鼻端电密仅有轴向分量 j_{zn}和径向分量 j_{rn}，则

$$j_{zn}=-j_{\nu n}\sin\psi,\qquad j_{rn}=j_{\nu n}\cos\psi \tag{10-82}$$

ψ 角如图 10-25 所示．

（二）定子铁心端面的径向电流片

定子绕组端部电流是由槽内直线部分供给的，在计算端区磁场时，为缩小求解域和建立边界条件，通常把铁心端面作为闭合的铁磁平面；此时为保持端部直线段电密的连

续性，应在铁心端面设置适当的径向返回电流．由于上、下层线棒的电密已经展开成包含有各次谐波电密的连续电流带，所以返回电流将成为相应的含有各次谐波径向电流的电流片．根据电流的连续性，ν 次谐波电流片的电负载 $K_{\nu(端面)}$ 应为

$$K_{\nu(端面)}=\begin{cases}\int_{r}^{r_4} j_{\nu(下)}dr, & r_4\geqslant r\geqslant r_3;\\ \dfrac{r_3}{r}\int_{r_3}^{r_4} j_{\nu(下)}dr, & r_3\geqslant r\geqslant r_2;\\ \dfrac{r_3}{r}\int_{r_3}^{r_4} j_{\nu(下)}dr+\int_{r}^{r_2} j_{\nu(上)}dr, & r_2\geqslant r\geqslant r_1;\\ \dfrac{r_3}{r}\int_{r_3}^{r_4} j_{\nu(下)}dr+\dfrac{r_1}{r}\int_{r_1}^{r_2} j_{\nu(上)}dr, & r_1\geqslant r\geqslant r_\delta.\end{cases}\tag{10-83}$$

式中 $j_{\nu(下)}$ 和 $j_{\nu(上)}$ 为直线段下层和上层线棒的 ν 次谐波电密；r_1，r_2 和 r_3，r_4 分别为上层和下层线棒的内、外半径，r_δ 为气隙半径．如图 10-28 所示．

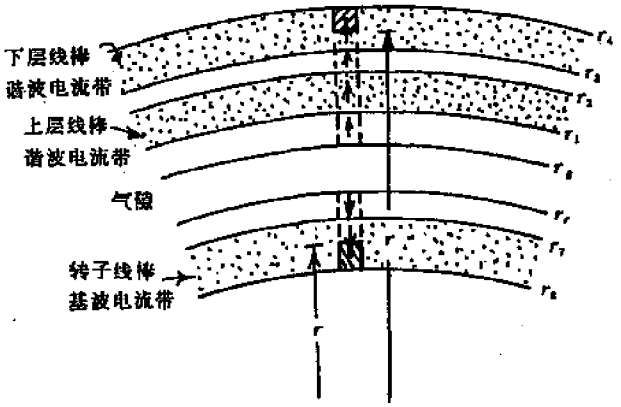


图 10-28　铁心端面的径向返回电流

把 $j_{\nu(下)}$ 和 $j_{\nu(上)}$ 代入上式，可得区域 $r_4\geqslant r\geqslant r_3$ 内，

$$K_{\nu(端面)}=\int_{r}^{r_4} j_{\nu(下)}dr=\mp(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{I_m}{ah}\frac{Q}{3\pi}k_{d\nu}\cos\left[\omega t\mp\nu\left(\theta-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\times\frac{2}{\nu b}\int_{r}^{r_4}\sin\frac{\nu b}{2r}dr\tag{10-84}$$

考虑到 r 和 r_4 相差不大，取

$$\int_{r}^{r_4}\sin\frac{\nu b}{2r}dr\approx(r_4-r)\sin\frac{\nu b}{r+r_4}$$

则式(10-84)可改写成

$$K_{\nu(端面)}=\mp(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{I_m}{abh}\frac{Q}{\pi}k_{d\nu}(r_4-r)\sin\frac{\nu b}{r+r_4}\cos\left[\omega t\mp\nu\left(\theta-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\tag{10-85}$$

在区域 $r_3\geqslant r\geqslant r_4$ 内，

$$K_{\nu(端面)}=\mp(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{1}{\nu}\frac{I_m}{ab}\frac{Q}{\pi}k_{d\nu}\frac{r_3}{r}\sin\frac{\nu b}{r_3+r_4}\cos\left[\omega t\mp\nu\left(\theta-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\tag{10-86}$$

在区域 $r_2 \geqslant r \geqslant r_1$ 内，

$$K_{rv(\text{端面})} = \mp (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{I_m}{ab} \frac{Q}{\pi} k_{dv} \frac{r_3}{r} \sin \frac{\nu b}{r_3 + r_4} \cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]$$
$$\pm (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{I_m}{abh} \frac{Q}{\pi} k_{dv} (r_2 - r) \sin \frac{\nu b}{r + r_2} \cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \mp (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{I_m}{ab} \frac{Q}{\pi} k_{dv} \left\{\frac{r_3}{r} \sin \frac{\nu b}{r_3 + r_4} \cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta - \frac{\beta\theta}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \frac{r_2 - r}{h} \sin \frac{\nu b}{r + r_2} \cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\right\} \tag{10-87}$$

在区域 $r_1 \geqslant r \geqslant r_\delta$ 内，

$$K_{rv(\text{端面})} = \mp (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{I_m}{ab} \frac{Q}{\pi} k_{dv} \frac{r_3}{r} \sin \frac{\nu b}{r_3 + r_4} \cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]$$
$$\pm (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{I_m}{ab} \frac{Q}{\pi} k_{dv} \frac{r_1}{r} \sin \frac{\nu b}{r_1 + r_2} \cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \mp (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{I_m}{ab} \frac{Q}{\pi} k_{dv} \left\{\frac{r_3}{r} \sin \frac{\nu b}{r_3 + r_4} \cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \frac{r_1}{r} \sin \frac{\nu b}{r_1 + r_2} \cos\left[\omega t \mp \nu(\theta + \frac{\beta\pi}{2})\right]\right\} \tag{10-88}$$

在上面四个式子中，$\nu=1$，5，7，11，…；对 $\nu=1$，7，…等正转波，取上面的符号；对 $\nu=5$，11，…等反转波，取下面的符号.

计算表明，对大型汽轮发电机，用 $\frac{r_1+r_2}{2}\sin\frac{\nu b}{2r_{av}}$ 去代替 $r_1\sin\frac{\nu b}{r_1+r_2}$ 和 $r_3\sin\frac{\nu b}{r_3+r_4}$ 误差很小，式中 $r_{av}=\frac{1}{4}(r_1+r_2+r_3+r_4)$；此时式(10-88)可改写成

$$K_{rv(\text{端面})} \approx \mp (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{I_m}{ab} \frac{Q}{\pi} k_{dv} \frac{r_1 + r_3}{2r} \sin \frac{\nu b}{2r_{av}} \left\{\cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \cos\left[\omega t \mp \nu\left(\theta + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\right\}$$
$$= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{2}{\pi} \frac{I_m Q}{ab} k_{dv} k_{pv} \frac{r_1 + r_3}{2r} \sin \frac{\nu b}{2r_{av}} \sin(\omega t \mp \nu\theta) \tag{10-89}$$

式中 k_{pv} 为 ν 次谐波的节距因数，$k_{pv}=\sin\nu\frac{\beta\pi}{2}$. 上式亦可以改写成

$$K_{rv(\text{端面})} = K_{rv(\text{端面})(r=r_\delta)} \frac{r_\delta}{r} \qquad r_1 \geqslant r \geqslant r_\delta \tag{10-90}$$

式中 $K_{rv(\text{端面})(r=r_\delta)}$ 为 $r=r_\delta$ 处的电负载值，

$$K_{rv(\text{端面})(r=r_\delta)} = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{2}{\pi} \frac{I_m Q}{ab} k_{dv} k_{pv} \frac{r_1 + r_3}{2r_\delta} \sin \frac{\nu b}{2r_{av}} \sin(\omega t \mp \nu\theta) \tag{10-91}$$

（三）定子绕组的气隙回转电流

设置气隙回转电流是为了达到以下两个目的：(1) 把气隙闭合，使定、转子端面成为连续的铁磁镜面；(2) 与定子铁心端面的电流片连接起来，使端面电流满足连续性要求；同时用以补偿槽内直线部分电流所生的气隙磁势. 气隙电流有切向和径向两个分量.

切向气隙回转电流 为保持电流的连续性，在气隙表面 $r=r_\delta$ 处，铁心端面径向电流片在弧长 $r_\delta d\theta$ 内的电流值，应与切向气隙电流的减小量 $-dI_{\theta\nu(\delta)}$ 相等；对于其中的 ν 次谐波有

$$dI_{\theta\nu(\delta)} = -K_{r\nu(\text{端面})(r=r_\delta)} r_\delta d\theta \tag{10-92}$$

由此可得

$$\begin{aligned} I_{\theta\nu(\delta)} &= -(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu^2} \frac{2}{\pi} \frac{I_m Q}{ab} k_{d\nu} k_{p\nu} \frac{r_1+r_3}{2} \sin\frac{\nu b}{2r_{av}} \int \sin(\omega t \mp \nu\theta) d(\nu\theta) \\ &= \mp (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu^2} \frac{2}{\pi} \frac{I_m Q}{ab} k_{d\nu} k_{p\nu} \frac{r_1+r_3}{2} \sin\frac{\nu b}{2r_{av}} \cos(\omega t \mp \nu\theta) \end{aligned} \tag{10-93}$$

设此电流沿气隙 δ 均匀分布，则其电负载 $K_{\theta\nu(\delta)}$ 为

$$\begin{aligned} K_{\theta\nu(\delta)} = \frac{I_{\theta\nu(\delta)}}{\delta} &= \mp (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu^2} \frac{2}{\pi} \frac{I_m Q}{ab\delta} k_{d\nu} k_{p\nu} \frac{r_1+r_3}{2} \\ &\times \sin\frac{\nu b}{2r_{av}} \cos(\omega t \mp \nu\theta) \end{aligned} \tag{10-94}$$

径向气隙电流 由于 $K_{\theta\nu(\delta)}$ 随 θ 而变化，故气隙中一定还有径向电流片．设径向电流片的 ν 次谐波电负载为 $K_{r\nu(\delta)}$，则 $K_{\theta\nu(\delta)}$ 和 $K_{r\nu(\delta)}$ 之间应满足 $\mathrm{div}\mathbf{j}_\nu = 0$；即

$$\frac{\partial K_{\theta\nu(\delta)}}{\partial\theta} + \frac{\partial(rK_{r\nu(\delta)})}{\partial r} = 0 \tag{10-95}$$

此外，在转子表面 $r=r_r$ 和气隙表面 $r=r_\delta$ 处，$K_{r\nu(\delta)}$ 应满足

$$\left.\begin{aligned} K_{r\nu(\delta)} &= 0, \qquad r = r_r \text{ 时}; \\ K_{r\nu(\delta)} &= K_{r\nu(\text{端面})}, \qquad r = r_\delta \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{10-96}$$

由此可解得

$$\begin{aligned} K_{r\nu(\delta)} &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{2}{\pi} \frac{I_m Q}{ab\sigma} \left(1 - \frac{r_r}{r}\right) k_{d\nu} k_{p\nu} \\ &\times \frac{r_1+r_3}{2} \sin\frac{\nu b}{2r_{av}} \sin(\omega t \mp \nu\theta) \end{aligned} \tag{10-97}$$

图 10-29 表示定子铁心端面电流片和定子气隙回转电流，转子铁心端面电流片和转子气隙回转电流的示意图．

下面来研究转子端部电流密度的表达式．

（四）转子端部的电流密度

图 10-30 表示转子同心式绕组端部的展开图．转子绕组端部亦可分成直线段和拐弯连线段两部分．

直线段 与定子绕组端部相似，直线段（$0 \leqslant z \leqslant A_2$）只有轴向（$z$ 方向）电流．若 γ 为转子下线部分与整个圆周的比值；q_2 为每极线圈数，n_2 为每槽内的导体数；N_2 为每极匝数，$N_2 = n_2 q_2$．把直线段的轴向电流密度 J_2 在转子坐标系中沿 θ' 轴展开成傅氏级数，则基波幅值 J_{z2} 应为

$$J_{z2} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{2q_2-1} \int_{\theta_0'-\frac{\theta_b'}{2}+k\theta_t'}^{\theta_0'+\frac{\theta_b'}{2}+k\theta_t'} J_2(\theta') \sin\theta' d\theta'$$

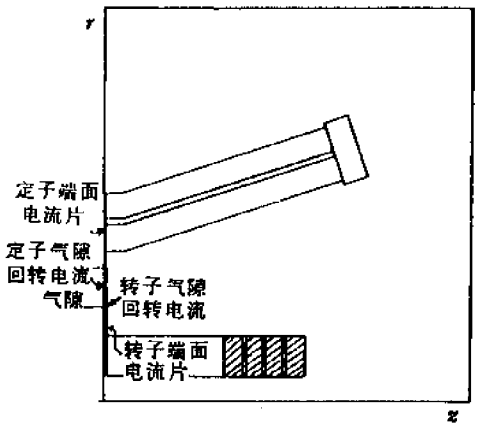


图 10-29　定、转子铁心端面电流和气隙回转电流示意图

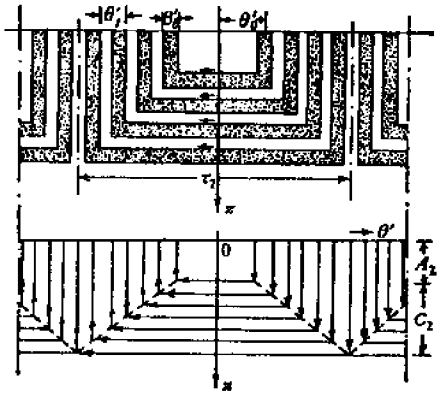


图 10-30　转子绕组端部展开图

$$= \frac{4}{\pi}\frac{n_2 I_2}{h_2 b_2}\sin\frac{b_2\pi}{2\tau}\frac{\sin\gamma\dfrac{\pi}{2}}{\sin\dfrac{\gamma\pi}{4q_2}}$$

$$= \frac{4n_2 I_2 q_2}{h_2 \tau_2} k_{K2} k_{d2} \tag{10-98}$$

式中 k_{d2}为转子绕组的基波分布因数；k_{K2}为槽电流的基波分布因数；b_2 和 h_2 为转子导体的宽度和高度；

$$k_{K2} = \frac{\sin\dfrac{b_2\pi}{2\tau}}{\dfrac{b_2\pi}{2\tau}} \approx 1, \qquad k_{d2} = \frac{\sin\gamma\dfrac{\pi}{2}}{2q_2\sin\dfrac{\gamma\pi}{4q_2}} \approx \frac{\sin\gamma\dfrac{\pi}{2}}{\gamma\dfrac{\pi}{2}} \tag{10-99}$$

把式(10-99)代入式(10-98)，可得

$$J_{z2} \approx \frac{4n_2q_2I_2}{h_2\tau_2}\frac{\sin\gamma\frac{\pi}{2}}{\gamma\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{\pi^2\gamma}\frac{N_2I_2}{h_2r_2}\sin\gamma\frac{\pi}{2} \tag{10-100}$$

由于转子为同步旋转，故把转子坐标系转换到定子坐标系时，有

$$j_{z2} = J_{z2}\sin(\omega t - \theta + \theta_0) \tag{10-101}$$

式中 θ_0 为负载时转子基波磁动势超前于定子基波磁动势的电角度.

拐弯连线段 在拐弯连线段($A_2 \leqslant z \leqslant A_2+C_2$)，随着 z 的增加，产生轴向电流的线圈数逐渐减少；若近似认为

$$\gamma(z) = \gamma\left(1 - \frac{z-A_2}{C_2}\right) \tag{10-102}$$

则由式(10-98)可得，轴向基波电密 J_{zz2} 为

$$\begin{aligned} J_{zz2} &= \frac{4}{\pi}\frac{n_2I_2}{h_2b_2}\sin\frac{b_2\pi}{2\tau_2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}\gamma(z)}{\sin\frac{\gamma\pi}{4q}} \\ &= \frac{J_{z2}}{\sin\gamma\frac{\pi}{2}}\sin\gamma\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{z-A_2}{C_2}\right) \approx \frac{8}{\pi^2\gamma}\frac{N_2I_2}{h_2\gamma}\sin\gamma\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{z-A_2}{C_2}\right) \end{aligned} \tag{10-103}$$

转换到定子坐标系时，

$$j_{zz2} = J_{zz2}\sin(\omega t - \theta + \theta_0) \tag{10-104}$$

除轴向电流外，此段内还有切向电流. 根据电流的连续性，可导出转换到定子坐标系时切向基波电密 $j_{\theta z2}$ 为

$$\begin{aligned} j_{\theta z2} &= \frac{J_{z2}r}{\sin\gamma\frac{\pi}{2}}\frac{\gamma\pi}{2C_2}\cos\gamma\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{z-A_2}{C_2}\right)\cos(\omega t-\theta+\theta_0) \\ &\approx \frac{4}{\pi}\frac{N_2I_2}{h_2C_2}\cos\gamma\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{z-A_2}{C_2}\right)\cos(\omega t-\theta+\theta_0) \end{aligned} \tag{10-105}$$

(五) 转子铁心端面的径向电流片

在计算端区磁场时，通常亦把转子铁心端面作为闭合的铁磁镜面. 此时为保持转子端部电流的连续性，在转子铁心端面应设置径向电流片. 不难看出，在 $r_7 \geqslant r \geqslant r_6$ 内（图10-28），径向电流片的电负载 $K_{r2(端面)}$ 应为

$$\begin{aligned} K_{r2(端面)} &= \int_{r_6}^{r} j_{z2}dr = \frac{4}{\pi}\frac{n_2I_2 2q}{h_2b_2}k_{d2}\sin(\omega t-\theta-\theta_0)\int_{r_6}^{r}\sin\frac{b_2}{2r}dr \\ &\approx \frac{8}{\pi}\frac{N_2I_2}{h_2b_2}k_{d2}(r-r_6)\sin\frac{b_2}{r+r_6}\sin(\omega t-\theta+\theta_0) \end{aligned} \tag{10-106}$$

在 $r_r \geqslant r \geqslant r_7$ 内，

$$K_{r2(端面)} = \frac{8}{\pi}\frac{N_2I_2}{b_2}k_{d2}\frac{r_7}{r}\sin\frac{b_2}{r_7+r_6}\sin(\omega t-\theta+\theta_0) \tag{10-107}$$

上面两个式子中的径向电流为从 r_r 流向 r_6，它与径向单位向量 $\mathbf{e}_r$ 的方向相反，故实际计

算时应加负号.

（六）转子的气隙回转电流

切向气隙电流 由转子方面形成的切向基波气隙回转电流 $I_{\theta 2(\delta)}$ 为

$$I_{\theta 2(\delta)}=-\int K_{r2(\text{端面})(r=r_7)} r_7 d\theta$$

$$=-\frac{8}{\pi}\frac{N_2 I_2}{b_2}k_{d2}r_7\sin\frac{b_2}{r_7+r_6}\cos(\omega t-\theta+\theta_0) \tag{10-108}$$

相应的电负载为

$$K_{\theta 2(\delta)}=\frac{I_{\theta 2(\delta)}}{\delta}=-\frac{8}{\pi}\frac{N_2 I_2}{b_2\delta}k_{d2}r_7\sin\frac{b_2}{r_7+r_6}\cos(\omega t-\theta+\theta_0) \tag{10-109}$$

径向气隙电流 设气隙中的径向电流片的电负载为 $K_{r2(\delta)}$，由电流的连续性可知，$\frac{\partial K_{\theta 2(\delta)}}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial r}(rK_{r2(\delta)})=0$；另外，当 $r=r_8$ 时，$K_{r2(\delta)}=0$；$r=r_7$ 时，$K_{r2(\delta)}=K_{r2(\text{端面})}$. 由此可确定

$$K_{r2(\delta)}=\frac{8}{\pi}\frac{N_2 I_2}{b_2\delta}k_{d2}r_7\sin\frac{b_2}{r_7+r_6}\left(1-\frac{r_8}{r}\right)\sin(\omega t-\theta+\theta_0) \tag{10-110}$$

10-7 汽轮发电机端区磁场的有限元计算[38—53]

前面两节研究了汽轮发电机定、转子绕组端部电流密度的分布和端区的边界条件，本节进一步研究端区磁场的有限元计算.

由于绕组端部的源电流密度是一系列行波电密（基波和谐波）的叠加，所以端区磁场可作为准三维行波场来处理. 与其他行波场问题比较，端区问题的特点是，某些介质的磁导率和电导率是各向异性；因此离散化的结果将比 7-11 节中的结果更加复杂.

端区磁场计算时，通常作以下假定：

（1）忽略源电流密度和场量的高次空间谐波，仅用基波来分析；

（2）各边界沿周向均为连续；

（3）定、转子铁心端面为闭合的铁磁平面，以虚拟的气隙回转电流来代替气隙的影响，用铁心端面的径向电流片和气隙电流来保持定、转子电流系统的连续性；

（4）定、转子铁心端面的磁导率和电导率取为 $\mu_{Fe}=\infty$，$\sigma_{Fe}=0$；转轴上无涡流，磁导率 $\mu_{Fe}=\infty$；端盖和机座的磁导率和电导率取为 $\mu=0$，$\sigma=\infty$；磁屏蔽为各向异性，磁导率[μ]和电导率[σ]均为张量，

$$[\mu]=\begin{bmatrix}\mu_r & & \\ & \mu_\theta & \\ & & \mu_z\end{bmatrix},\qquad [\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_r & & \\ & \sigma_\theta & \\ & & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{10-111}$$

转子护环和中心环随转子同步旋转，它们和定子端部压指均为非磁性，故忽略其影响.

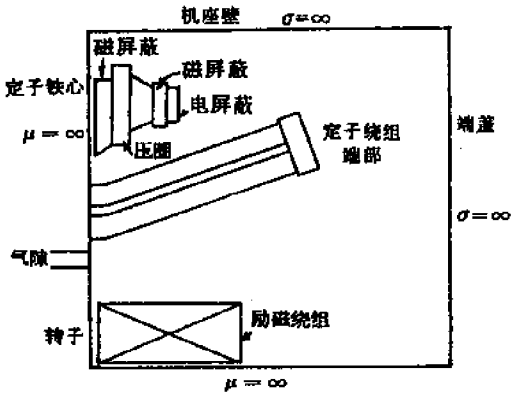


图 10-31　汽轮发电机的端区

（一）端区磁场的边值问题

用 $\dot{\mathbf{A}}$-$\dot{\varphi}$法求解. 对于端区行波磁场，在圆柱坐标下，设复向量位 $\dot{\mathbf{A}}$、复标量位 $\dot{\varphi}$和复源电流密度 $\dot{\mathbf{J}}_s$ 分别为

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{A}}(r,\theta,z)=\dot{\mathbf{A}}'(r,z)e^{-jp\theta}=(\dot{A}'_r\mathbf{a}_r+j\dot{A}'_\theta\mathbf{a}_\theta+\dot{A}'_z\mathbf{a}_z)e^{-jp\theta}\\
&\dot{\varphi}(r,\theta,z)=\dot{\varphi}'(r,z)e^{-jp\theta}\\
&\dot{\mathbf{J}}_s(r,\theta,z)=\dot{\mathbf{J}}'_s(r,z)e^{-jp\theta}=(\dot{J}'_r\mathbf{a}_r+j\dot{J}'_\theta\mathbf{a}_\theta+\dot{J}'_z\mathbf{a}_z)e^{-jp\theta}
\end{aligned}\right\}\tag{10-112}$$

式中 p 为极对数；对汽轮发电机，通常 $p=1$.

基本方程　此时在各向异性介质中，行波场的方程为：

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times[\nu]\nabla\times\dot{\mathbf{A}}-\nabla(\nu_\theta\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})+j\omega[\sigma]\dot{\mathbf{A}}+[\sigma]\nabla\dot{\varphi}=\dot{\mathbf{J}}_s\\
&-\nabla\cdot\left\{[\sigma]\left(\dot{\mathbf{A}}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right\}=0
\end{aligned}\right\}\tag{10-113}$$

式中 $[\nu]$ 为磁阻率张量，$[\nu]=[\mu]^{-1}$；在式(10-113)的第一式中，把$\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}$的权系数取为 ν_θ.

考虑到

$$\begin{aligned}
\nabla\times[\nu]\nabla\times\dot{\mathbf{A}}=&\left\{\left[\frac{\nu_z p}{r^2}\left(\dot{A}'_\theta+r\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+p\dot{A}'_r\right)-\nu_\theta\left(\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial z\partial r}\right)\right]\mathbf{a}_r\right.\\
&+j\left[-\nu_r\left(\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial z}+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial z^2}\right)-\nu_z\left(-\frac{\dot{A}'_\theta}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial r^2}\right.\right.\\
&\left.-\frac{p}{r^2}\dot{A}'_r+\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}\right)\Big]\mathbf{a}_\theta+\frac{1}{r}\left[\nu_\theta\left(\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial z}-\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial r}\right)+\nu_{\theta r}\left(\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial r\partial z}-\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial r^2}\right)\right.\\
&\left.\left.+\nu_r\left(\frac{p^2}{r}\dot{A}'_z+p\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial z}\right)\right]\mathbf{a}_z\right\}e^{-jp\theta}\\
=&\ (\nabla\times[\nu]\nabla\times\dot{\mathbf{A}})_m e^{-jp\theta}
\end{aligned}\tag{10-114}$$

$$\nabla(\nu_\theta\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}) = \left\{\nu_\theta\left(-\frac{1}{r^2}\dot{A}'_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial r^2}-\frac{p}{r^2}\dot{A}'_\theta+\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial r\partial z}\right)\mathbf{a}_r-j\frac{\nu_\theta p}{r}\left(\frac{1}{r}\dot{A}'_r+\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{p}{r}\dot{A}'_\theta+\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\theta+\nu_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial z}+\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial z\partial r}+\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial z}+\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{a}_z\right\}e^{-jp\theta}$$
$$= (\nabla\nu_\theta\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})_m e^{-jp\theta} \tag{10-115}$$

$$[\sigma]\nabla\dot{\varphi} = [\sigma]\left\{\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial r}\mathbf{a}_r-j\frac{p}{r}\dot{\varphi}\mathbf{a}_\theta+\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial z}\mathbf{a}_z\right\}e^{-jp\theta}$$
$$= [\sigma](\nabla\dot{\varphi})_m e^{-jp\theta} \tag{10-116}$$

$$\nabla\cdot\left\{[\sigma]\left(\dot{\mathbf{A}}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sigma_r\left(\dot{A}'_r+\frac{1}{j\omega}\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial r}\right)\right]+\frac{p}{r}\left[\sigma_\theta\left(\dot{A}'_\theta-\frac{1}{j\omega}\frac{p}{r}\dot{\varphi}'\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma_z\left(\dot{A}'_z+\frac{1}{j\omega}\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial z}\right)\right]\right\}e^{-jp\theta}$$
$$= \left\{\nabla\cdot[\sigma]\left(\dot{\mathbf{A}}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right\}_m e^{-jp\theta} \tag{10-117}$$

式中带有下标 m 的括号内的式子，等于相应的大括号内的式子，它们都仅为 r，z 的函数，不再包括 $e^{-jp\theta}$这个因子. 这样，式(10-113)可改写为

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla\times[\nu]\nabla\times\dot{\mathbf{A}})_m-(\nabla\nu_\theta\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})_m+j\omega[\sigma]\dot{\mathbf{A}}'+[\sigma](\nabla\dot{\varphi})_m=\dot{\mathbf{J}}'_s\\&-\left\{\nabla\cdot[\sigma]\left(\dot{\mathbf{A}}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right\}_m=0\end{aligned}\right\} \tag{10-118}$$

边界条件和约束条件 对于图 10-31 中 $\mu=\infty$ 的边界面，可得 $\dot{\mathbf{A}}'$的边界条件近似为

$$\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{A}}'=0,\qquad \frac{\partial\dot{A}'_t}{\partial n}=\frac{\partial\dot{A}'_n}{\partial l}=0 \tag{10-119}$$

对于 $\sigma=\infty$的边界面，边界条件近似为

$$\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}'=0,\qquad \frac{\partial\dot{A}'_n}{\partial n}=0 \tag{10-120}$$

这里下标 n 和 l 分别表示垂直和平行于边界面的分量.

在导电介质与空气的交界面上，$\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}=0$，即

$$\left(\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n}+j\omega\dot{A}'_n\right)_{\text{cond}}=0 \tag{10-121}$$

此外，各滑流区的周向总涡流值应当等于零，即

$$\dot{I}_{\theta i}=\int_{D_i}\dot{J}'_\theta dS=0\qquad (i=1,2,\cdots) \tag{10-122}$$

式(10-118)—(10-122)构成了端区行波场的复边值问题.

（二）行波电磁场问题的复泛函和变分

行波电磁场的复泛函和变分 与上述边值问题相应的复泛函为

$$I=\int_V\left\{\frac{1}{2}\nabla\times\dot{\mathbf{A}}\cdot([\nu]\nabla\times\dot{\mathbf{A}})+\frac{1}{2}\nu_\theta(\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})^2+\frac{1}{2}j\omega\dot{\mathbf{A}}\cdot([\sigma]\dot{\mathbf{A}})\right.$$
$$\left.+\dot{\mathbf{A}}\cdot([\sigma]\nabla\dot{\varphi})+\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\cdot([\sigma]\nabla\dot{\varphi})-\dot{\mathbf{A}}\cdot\dot{\mathbf{J}}_s\right\}dV \tag{10-123}$$

上式的变分为

$$\delta I=\int_V\{(\nabla\times[\nu]\nabla\times\dot{\mathbf{A}})_m-(\nabla\nu_\theta\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})_m+j\omega[\sigma]\dot{\mathbf{A}}'+[\sigma](\nabla\dot{\varphi}\dot{\varphi})_m-\dot{\mathbf{J}}'_s\}e^{-jp\theta}$$
$$\delta(\dot{\mathbf{A}}'e^{-jp\theta})dV-\int_V\left\{\nabla\cdot[\sigma]\left(\dot{\mathbf{A}}+j\frac{1}{\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right\}_m e^{-jp\theta}\delta(\dot{\varphi}e^{-jp\theta})dV \tag{10-124}$$

在 $\theta=0$ 的平面 D 内，上式成为

$$\delta I_D=\int_D\{(\nabla\times[\nu]\nabla\times\dot{\mathbf{A}})_m-(\nabla\nu_\theta\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}})_m+j\omega[\sigma]\dot{\mathbf{A}}'+[\sigma](\nabla\dot{\varphi})_m-\dot{\mathbf{J}}'_s\}\delta\dot{\mathbf{A}}'$$
$$2\pi rdrdz-\int_D\left\{\nabla\cdot[\sigma]\left(\dot{\mathbf{A}}+\frac{1}{j\omega}\nabla\dot{\varphi}\right)\right\}_m\delta\dot{\varphi}\,2\pi rdrdz$$
$$=\int_D[Y_r\delta\dot{A}'_r+Y_\theta\delta(j\dot{A}'_\theta)+Y_z\delta\dot{A}'_z+Y_\varphi\delta\dot{\varphi}]2\pi rdrdz \tag{10-125}$$

式中

$$Y_r=\nu_\theta\left(\frac{p}{r^2}\dot{A}'_\theta+\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+\frac{p^2}{r^2}\dot{A}'_r\right)-\nu_\theta\left(-\frac{1}{r^2}\dot{A}'_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_r}{\partial r^2}\right.$$
$$\left.-\frac{p}{r^2}\dot{A}'_\theta+\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}_r}{\partial z^2}\right)+j\omega\sigma_r\dot{A}'_r+\sigma_r\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial r}-\dot{J}'_{sr} \tag{10-126}$$

$$Y_\theta=j\left[-\nu_r\left(\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial z}+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial z^2}\right)-\nu_z\left(-\frac{1}{r^2}\dot{A}'_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\dot{A}'_\theta}{\partial r^2}-\frac{p}{r^2}\dot{A}'_r+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{p}{r}\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}\right)+\nu_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{p}{r}\dot{A}'_r+p\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\frac{p^2}{r}\dot{A}'_\theta+p\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial z}\right)+j\omega\sigma_\theta\dot{A}'_\theta-\sigma_\theta\frac{p}{r}\dot{\varphi}-\dot{J}'_{s\theta}\right] \tag{10-127}$$

$$Y_z=-\nu_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial r}+r\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial r^2}+p\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial z}+r\frac{\partial^2\dot{A}'_z}{\partial z^2}\right)+\nu_r\frac{1}{r}\left(\frac{p^2}{r}\dot{A}'_z+p\frac{\partial\dot{A}'_\theta}{\partial z}\right)$$
$$+j\omega\sigma_z\dot{A}'_z+\sigma_z\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial z}-\dot{J}'_{sz} \tag{10-128}$$

$$Y_\varphi=\sigma_r\frac{1}{r}\left[r\frac{\partial\dot{A}'_r}{\partial r}+\dot{A}'_r+\frac{1}{j\omega}\left(r\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial r^2}+\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial r}\right)\right]+\sigma_\theta\frac{1}{r}\left(p\dot{A}'_\theta-\frac{1}{j\omega}\frac{p^2}{r}\ddot{\varphi}\right)$$
$$+\sigma_z\left(\frac{\partial\dot{A}'_z}{\partial z}+\frac{1}{j\omega}\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial z^2}\right) \tag{10-129}$$

当 $\delta I_D=0$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&\int_D Y_r\delta\dot{A}'_r rdrdz=0,\qquad\int_D Y_\theta\delta(j\dot{A}'_\theta)rdrdz=0,\\&\int_D Y_z\delta\dot{A}'_z rdrdz=0,\qquad\int_D Y_\varphi\delta\ddot{\varphi}rdrdz=0.\end{aligned}\right\} \tag{10-130}$$

变量替换 作下列变量替换

$$\dot{A}_R = r\dot{A}'_r, \qquad \dot{A}_P = r\dot{A}'_\theta, \qquad \dot{A}_Z = r\dot{A}'_z \tag{10-131}$$

将上式代入式(10-130)，再利用格林公式，经整理后可得

$$\begin{aligned}\int_D Y_r\delta\dot{A}'_r r dr dz = \int_D \Big[& \nu_\theta \frac{1}{r}(\dot{A}_{R,r}\delta\dot{A}_{R,r} + \dot{A}_{R,z}\delta\dot{A}_{R,z}) + \nu_z \frac{1}{r}\frac{p^2\dot{A}_R}{r^2}\delta\dot{A}_R \\ & + j\omega\sigma_r \frac{1}{r}\dot{A}_R\delta\dot{A}_R + \nu_\theta \frac{1}{r}\left(\frac{2p}{r^2}\dot{A}_P - \frac{p\dot{A}_{P,r}}{r}\right)\delta\dot{A}_R + \nu_z \frac{1}{r}\frac{p\dot{A}_{P,r}}{r}\delta\dot{A}_R \\ & + \sigma_r \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial r}\delta\dot{A}_R - \dot{J}'_{sr}\delta\dot{A}_R\Big] dr dz = 0\end{aligned} \tag{10-132}$$

$$\begin{aligned}\int_D Y_\theta\delta(j\dot{A}'_\theta) r dr dz = j^2\int_D \Big[& -\nu_r \frac{p}{r^2}\dot{A}_{Z,z}\delta\dot{A}_P + \nu_r \frac{1}{r}\dot{A}_{P,z}\delta\dot{A}_{P,z} \\ & + \nu_z \frac{1}{r}\left(\dot{A}_{P,z}\delta\dot{A}_{P,r} + \frac{p}{r}\dot{A}_R\delta\dot{A}_{P,r}\right) \\ & + \nu_\theta \frac{1}{r}\left(\frac{2p}{r^2}\dot{A}_R\delta\dot{A}_P - \frac{p}{r}\dot{A}_R\delta\dot{A}_{P,r} + \frac{p^2}{r^2}\dot{A}_P\delta\dot{A}_P + \frac{p}{r}\dot{A}_{Z,z}\delta\dot{A}_P\right) \\ & + \left(j\omega\sigma_\theta\frac{\dot{A}_P}{r} - \sigma_\theta\frac{p}{r}\dot{\varphi} - \dot{J}'_{s\theta}\right)\delta\dot{A}_P\Big] dr dz = 0\end{aligned} \tag{10-133}$$

$$\begin{aligned}\int_D Y_z\delta\dot{A}'_z r dr dz = \int_D \Big[& \nu_r \frac{1}{r}\left(\frac{p^2}{r^2}\dot{A}_Z\delta\dot{A}_Z - \frac{p}{r}\dot{A}_P\delta\dot{A}_{Z,z}\right) + \nu_\theta \frac{1}{r}(\dot{A}_{Z,r}\delta\dot{A}_{Z,r} \\ & + \dot{A}_{Z,z}\delta\dot{A}_{Z,z} - \frac{1}{r^2}\dot{A}_Z\delta\dot{A}_Z + \frac{p}{r}\dot{A}_P\delta\dot{A}_{Z,z}) + \left(j\omega\sigma_z\frac{\dot{A}_Z}{r} + \sigma_z\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial z}\right. \\ & \left. - \dot{J}'_{sz}\right)\delta\dot{A}_Z\Big] dr dz = 0\end{aligned} \tag{10-134}$$

$$\begin{aligned}\int_D Y_\varphi\delta\dot{\varphi} r dr dz = \int_D \Big[& \sigma_r\left(\dot{A}_R + \frac{r}{j\omega}\ddot{\varphi}_{,r}\right)\delta\ddot{\varphi}_{,r} - \sigma_\theta\left(\frac{p}{r}\dot{A}_P - \frac{1}{j\omega}\frac{p^2}{r}\dot{\varphi}\right)\delta\dot{\varphi} \\ & + \sigma_z\left(\dot{A}_Z + \frac{r}{j\omega}\ddot{\varphi}_{,z}\right)\delta\ddot{\varphi}_{,z}\Big] dr dz = 0\end{aligned} \tag{10-135}$$

式中 $\dot{A}_{R,r}$ 表示 $\frac{\partial\dot{A}_R}{\partial r}$，$\dot{A}_{R,z}$ 表示 $\frac{\partial\dot{A}_R}{\partial z}$，余类推.

（三）有限元离散

在 r，z 平面内用三角元进行单元分析. 单元的形状函数 N_i^e 为

$$N_i^e = a_i + b_i r + c_i z \qquad (i,j,m) \tag{10-136}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} & a_i = \frac{1}{2\Delta_e}(r_j z_m - r_m z_j), \qquad b_i = \frac{1}{2\Delta_e}(z_j - z_m), \\ & c_i = \frac{1}{2\Delta_e}(r_m - r_j), \qquad 2\Delta_e = r_i(z_j - z_m) + r_j(z_m - z_i) + r_m(z_i - z_j) \end{aligned}\right\} \tag{10-137}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_R^e &= \sum_{k=i,j,m} N_k^e \dot{A}_{Rk}^e, \qquad \dot{A}_P^e = \sum_{k=i,j,m} N_k^e \dot{A}_{Pk}^e, \\ \dot{A}_Z^e &= \sum_{k=i,j,m} N_k^e \dot{A}_{zk}^e, \qquad \ddot{\varphi}^e = \sum_{k=i,j,m} N_k^e \ddot{\varphi}_k^e \end{aligned}\right\} \tag{10-138}$$

把以上关系代入式(10-132)—(10-135)，并设 $r_e=\frac{1}{3}(r_i+r_j+r_m)$，经过单元分析，可得单元系数阵 $\mathbf{k}^e$(12 阶方阵)和电磁位列阵 $\mathbf{A}_\varphi^e$(12×1 阶矩阵)分别为：

$$\mathbf{k}^e=\begin{bmatrix} k_{iRiR}^e & k_{iRiP}^e & 0 & k_{iRi\varphi}^e & k_{iRjR}^e & k_{iRjP}^e & 0 & k_{iRj\varphi}^e & k_{iRmR}^e & k_{iRmP}^e & 0 & k_{iRm\varphi}^e \\ k_{iPiR}^e & k_{iPiP}^e & k_{iPiZ}^e & k_{iPi\varphi}^e & k_{iPjR}^e & k_{iPjP}^e & k_{iPjZ}^e & k_{iPj\varphi}^e & k_{iPmR}^e & k_{iPmP}^e & k_{iPmZ}^e & k_{iPm\varphi}^e \\ 0 & k_{iZiP}^e & k_{iZiZ}^e & k_{iZi\varphi}^e & 0 & k_{iZjP}^e & k_{iZjZ}^e & k_{iZj\varphi}^e & 0 & k_{iZmP}^e & k_{iZmZ}^e & k_{iZm\varphi}^e \\ k_{i\varphi iR}^e & k_{i\varphi iP}^e & k_{i\varphi iZ}^e & k_{i\varphi i\varphi}^e & k_{i\varphi jR}^e & k_{i\varphi jP}^e & k_{i\varphi jZ}^e & k_{i\varphi j\varphi}^e & k_{i\varphi mR}^e & k_{i\varphi mP}^e & k_{i\varphi mZ}^e & k_{i\varphi m\varphi}^e \\ \hdashline & \mathbf{k}_{ji}^e & & & & \mathbf{k}_{jj}^e & & & & \mathbf{k}_{jm}^e & & \\ \hdashline & \mathbf{k}_{mi}^e & & & & \mathbf{k}_{mj}^e & & & & \mathbf{k}_{mm}^e & & \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{A}}_\varphi^e=\begin{bmatrix} \dot{A}_{iR}^e \\ \dot{A}_{iP}^e \\ \dot{A}_{iZ}^e \\ \dot{\varphi}_i^e \\ \dot{A}_{jR}^e \\ \dot{A}_{jP}^e \\ \dot{A}_{jZ}^e \\ \dot{\varphi}_j^e \\ \dot{A}_{mR}^e \\ \dot{A}_{mP}^e \\ \dot{A}_{mZ}^e \\ \dot{\varphi}_m^e \end{bmatrix} \tag{10-139}$$

其中 $\mathbf{k}_{ij}^e$ 中的各个元素为

$$\left.\begin{aligned} k_{iRjR}^e &= \nu_\theta \frac{\Delta_e}{r_e}(b_ib_j+c_ic_j)+\nu_z\frac{p^2}{r_e^3}\Delta_e\alpha+j\omega\frac{\sigma_r}{r_e}\Delta_e\alpha \\ k_{iPjP}^e &= \nu_z\frac{\Delta_e}{r_e}b_ib_j+\nu_r\frac{\Delta_e}{r_e}c_ic_j+\nu_\theta\frac{p^2}{r_e^3}\Delta_e\alpha+j\omega\frac{\sigma_\theta}{r_e}\Delta_e\alpha \\ k_{iZjZ}^e &= \nu_\theta\frac{\Delta_e}{r_e}\left(b_ib_j+c_ic_j-\frac{\alpha}{r_e^2}\right)+\nu_r\frac{p^2}{r_r^3}\Delta_e\alpha+j\omega\frac{\sigma_z}{r_e}\Delta_e\alpha \\ k_{iPjR}^e &= \nu_\theta\frac{2p\Delta_e\alpha}{r_e^3}+\frac{p\Delta_e}{3r_e^2}b_i(\nu_z-\nu_\theta) \\ k_{iRjP}^e &= \nu_\theta\frac{2p\Delta_e\alpha}{r_e^3}+\frac{p\Delta_e}{3r_e^2}b_j(\nu_z-\nu_\theta), \\ k_{i\varphi jR}^e &= \sigma_r b_i\frac{\Delta_e}{3}, \qquad k_{iRj\varphi}^e=\sigma_r b_j\frac{\Delta_e}{3}, \\ k_{iZjP}^e &= \frac{p\Delta_e}{3r_e^2}c_i(\nu_\theta-\nu_r), \qquad k_{iPjZ}^e=\frac{p\Delta_e}{3r_e^2}c_j(\nu_\theta-\nu_r) \\ k_{i\varphi jP}^e &= k_{iPj\varphi}^e=-\sigma_\theta\frac{p\Delta_e\alpha}{r_e}, \qquad k_{i\varphi jZ}^e=\sigma_z c_i\frac{\Delta_e}{3}, \qquad k_{iZj\varphi}^e=\sigma_z c_j\frac{\Delta_e}{3} \\ k_{i\varphi j\varphi}^e &= -j\frac{\Delta_e r_e}{\omega}(\sigma_r b_ib_j+\sigma_z c_ic_j)-j\sigma_\theta\frac{\Delta_e p^2}{\omega r_e}\alpha \\ \alpha &= \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & \text{当 } i=j; \\ \dfrac{1}{12}, & \text{当 } i\neq j. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{10-140}$$

单元右端项列阵 $\mathbf{f}^e$ 的转置为

$$(\mathbf{f}^e)^T = \frac{1}{3}\Delta_e[\dot{J}'^e_{re}\ \dot{J}'^e_{\theta e}\ \dot{J}'^e_{ze}\ 0\ \dot{J}'^e_{re}\ \dot{J}'^e_{\theta e}\ \dot{J}'^e_{ze}\ \ 0\ \dot{J}'^e_{re}\ \dot{J}'^e_{\theta e}\ \dot{J}'^e_{ze}\ 0]^T \qquad (10\text{-}141)$$

再进行总体合成，可得总体系数矩阵，总体电磁位列阵和总体右端项列阵，以及相应的总体方程．求解总体方程，即可得到各个节点上的 $\dot{\mathbf{A}}$ 和 $\dot{\varphi}$.

在非涡流区内，$\sigma=0$，单元系数阵中有 3 行和 3 列为零元素．此时可设非涡流区的电导率为一极小的值，全域内用 12×12 的单元系数阵；亦可以在涡流区内形成 12×12 的单元系数阵，在非涡流区内形成 9×9 的单元系数阵．计算表明，两种方法算出的 $\dot{\mathbf{B}}$ 和 $\dot{\mathbf{J}}$ 完全相同，但后者的未知数、存储量和计算时间较少；另外对 $\dot{\varphi}$ 来说，前者的边界是全域的外边界，而后者则是涡流区的边界，这将为调整涡流区边界上的 $\dot{\varphi}$ 值提供更简便的数学模型.

（四）端部涡流区边界上标量电位的确定

在第 7-11 节中已经说明，对于行波场，涡流区内涡流的周向积分值应当等于零．对于含有 n 个导电介质的涡流场，有

$$\dot{I}_{\theta i} = \int_{D_i} \dot{J}_{\theta i} dS = -\int_{D_i} \sigma_{ei}\left(j\omega \dot{A}'_{\theta i} - \frac{p}{r}\dot{\varphi}'_i\right) dS = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \quad (10\text{-}142)$$

为了满足上式，可以通过调整涡流区边界上某任选点的边值 $\dot{\varphi}'_i$ 来达到．可以证明，$\dot{I}_{\theta i}$ 与各边值 $\dot{\varphi}'_i$ 线性相关，即

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\varphi}'_1 &= A_{11}\dot{I}_{\theta 1} + A_{12}\dot{I}_{\theta 2} + \cdots + A_{1n}\dot{I}_{\theta n} + D_1 \\
\dot{\varphi}'_2 &= A_{21}\dot{I}_{\theta 1} + A_{22}\dot{I}_{\theta 2} + \cdots + A_{2n}\dot{I}_{\theta n} + D_2 \\
&\vdots \\
\dot{\varphi}'_n &= A_{n1}\dot{I}_{\theta 1} + A_{n2}\dot{I}_{\theta 2} + \cdots + A_{nn}\dot{I}_{\theta n} + D_n
\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}143)$$

式中 A_{11}，A_{12}，…，A_{nn}，D_1，D_2，…，D_n 为复常数．从式(10-143)可见，当 $\dot{I}_{\theta 1}=\dot{I}_{\theta 2}=\cdots=\dot{I}_{\theta n}=0$ 时，$\dot{\varphi}'_1=D_1$，$\dot{\varphi}'_2=D_2$，…，$\dot{\varphi}'_n=D_n$；由此可见，D_1，D_2，…，D_n 即为各涡流区的正确边值.

对于图 10-31 所示含有 5 个涡流区的端区，D_1，D_2，…，D_n 的求法如下：

(1) 先设各涡流区上任选点的边值为 $\dot{\varphi}'_{ia}$ ($i=1$，2，…，5)，并用这组边值由有限元法求解边值问题(10-118)—(10-122)，得到各节点的 $\dot{\mathbf{A}}'$ 和 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}'$，并算得

$$\dot{I}_{\theta ia} = -\int_{D_i} \sigma_e\left(j\omega \dot{A}'_\theta - \frac{p}{r}\dot{\varphi}'\right) dS \qquad (i = 1,2,\cdots,5)$$

$\dot{\varphi}'_{ia}$ 与 $\dot{I}'_{\theta ia}$ 之间有下列关系：

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\varphi}'_{1a} &= A_{11}\dot{I}_{\theta 1a} + A_{12}\dot{I}_{\theta 2a} + \cdots + A_{15}\dot{I}_{\theta 5a} + D_1 \\
&\vdots \\
\dot{\varphi}'_{5a} &= A_{51}\dot{I}_{\theta 1a} + A_{52}\dot{I}_{\theta 2a} + \cdots + A_{55}\dot{I}_{\theta 5a} + D_5
\end{aligned}\right\}$$

(2) 再设这些点的边值为另一组任意常数 $\dot{\varphi}'_{ib}$ ($i=1$，2，…，5)，求解边值问题后

重行计算 $\dot{I}_{\theta ib}(i=1,2,\cdots,5)$，可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}'_{1b} &= A_{11}\dot{I}_{\theta 1b} + A_{12}\dot{I}_{\theta 2b} + \cdots + A_{15}\dot{I}_{\theta 5b} + D_1\\ &\vdots\\ \dot{\varphi}'_{5b} &= A_{51}\dot{I}_{\theta 1b} + A_{52}\dot{I}_{\theta 2b} + \cdots + A_{55}\dot{I}_{\theta 5b} + D_5\end{aligned}\right\}$$

（3）再设这些点的边值为 $\dot{\varphi}'_{ic}$，$\dot{\varphi}'_{id}$，…，共 6 次，并分别算得 $\dot{I}_{\theta ic}$，$\dot{I}_{\theta id}$，…；6 次计算后，共得 30 个线性代数方程.

（4）然后以 $\dot{\varphi}'_{ia}$、$\dot{\varphi}'_{ib}$，…，$\dot{\varphi}'_{if}$为已知数，重新组成 5 组方程（每组 6 个方程）：

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_{\theta 1a}A_{11} + \dot{I}_{\theta 2a}A_{12} + \cdots + \dot{I}_{\theta 5a}A_{15} + D_1 &= \dot{\varphi}'_{1a}\\ &\vdots\\ \dot{I}_{\theta 1f}A_{11} + \dot{I}_{\theta 2f}A_{12} + \cdots + \dot{I}_{\theta 5f}A_{15} + D_1 &= \dot{\varphi}'_{1f}\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}144)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_{\theta 1a}A_{51} + \dot{I}_{\theta 2a}A_{52} + \cdots + \dot{I}_{\theta 5a}A_{55} + D_5 &= \dot{\varphi}'_{5a}\\ &\vdots\\ \dot{I}_{\theta 1f}A_{51} + \dot{I}_{\theta 2f}A_{52} + \cdots + \dot{I}_{\theta 5f}A_{55} + D_5 &= \dot{\varphi}'_{5f}\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}145)$$

即可解出 A_{11}，A_{12}，…，A_{55}，D_1，…，D_5 等 30 个系数；其中 D_1，…，D_5 即为五个涡流区的正确边值 $\dot{\varphi}'_1$，$\dot{\varphi}'_2$，…，$\dot{\varphi}'_5$. 用这 5 个 $\dot{\varphi}'$ 值作为边值，重求行波场的边值问题，可保证式（10-142）成立，且解答为唯一. 最后再计算 $\dot{\mathbf{B}}'$ 和 $\dot{\mathbf{J}}'$

$$\dot{\mathbf{B}}' = \nabla \times \dot{\mathbf{A}}, \qquad \dot{\mathbf{J}}' = -j\omega[\sigma]\dot{\mathbf{A}}' - [\sigma](\nabla\dot{\varphi})_m \qquad (10\text{-}146)$$

本章文献 [49] 和 [50] 以一台 300MW 的汽轮发电机为实例，对发电机在空载、三相短路和进相运行等三种工况下发电机的端区磁场进行了计算. 该机端部有五个导电区（电屏蔽，第一、第二磁屏蔽，压圈内环和外环）. 计算表明，当涡流区边界上的 $\dot{\varphi}'_i$ 值不作调整时，压圈内环算出的 $\dot{I}_{\theta i}$值很大；采用上述方法对 $\dot{\varphi}'_i$ 进行调整，$\dot{I}_{\theta i}$（$i=1$，2，…，5）即变成 0. 为验证唯一性，另设六组与第一次不同的任意 $\dot{\varphi}'_i$ 值，再进行调整；结果表明，两次调整后所得的最终 $\dot{\varphi}'_i$ 值相同，这说明调整结果与所设的 $\dot{\varphi}'_i$ 值无关.

参 考 文 献

[1] P. Alger, The Calculation of the Armature Reactances of Synchronous Machine, AIEE Trans. 1928.

[2] L. A. Kilgore, Calculation of Synchronous Machine Constants—Reactances and Time Constants Affecting Transient Characteristics, AIEE Trans. 1931.

[3] L. A. Kilgore, Effect of Saturation on Machine Reactance, AIEE Trans. 1935.

[4] C. Kingsley, Saturated Synchronous Reactances, Electrical Engineering, March, 1935.

[5] D. Hamdi-Sepen, Saturation Effects in Synchronous Machines, AIEE Trans. 1954.

[6] M. E. Talaat, A New Approach to the Calculation of Synchronous Machine Reactances, pt. I, AIEE Trans. 1955; pt. Ⅱ, AIEE Trans. 1956.

[7] Я. Б. Данилевич, В. В. Домбровский и Е. Я. Казовский, Параметры электрических машин переменного тока, Над. Наука, 1965.

[8] E. F. Fuchs and E. A. Erdelyi, Determination of Waterwheel Alternator Steady-State Reactances from Flux Plots, IEEE Trans. on PAS, 1972.

[9] E. F. Fuchs, E. A. Erdelyi, Nonlinear Theory of Turboalternators Magnetic Fields at No-load and Balanced Loads, pt. Ⅰ and Ⅱ, IEEE Trans. on PAS, No. 4, 1973.

[10] 王建设，凸极同步电机饱和同步电抗的数值计算，哈尔滨电工学院学报，No. 2，1985.

[11] 乔静秋、汤蕴璆，同步电机的正交磁化和直、交轴的耦合电抗，哈尔滨电工学院学报，No. 2，1988.

[12] 姚有光、汤蕴璆，凸极同步电机饱和功角特性的数值计算，哈尔滨电工学院学报，No. 1，1987.

[13] E. A. Fuchs, E. F. Erdelyi, Determination of Waterwheel Alternator Transient Reactances from Flux Plots, IEEE Trans. on PAS, 1972.

[14] E. F. Fuchs, E. A. Erdelyi, Nonlinear Salient Pole Alternators Subtransient Reactances and Damper Winding Currents, IEEE Trans. on PAS, 1974.

[15] C. N. Ashtiani, D. A. Lowther, Simulation of the Transient and Subtransient Reactances of a Large Waterwheel Generator by Finite Elements, IEEE Trans. on PAS, No. 7, 1984.

[16] 王建设、汤蕴璆，凸极同步发电机运算电抗频率特性及饱和瞬态电抗的有限元计算，哈尔滨电工学院学报，No. 3. 1986

[17] 汤蕴璆、梁艳萍，二维正弦时变电磁场的串联约束问题，哈尔滨电工学院学报，No. 2. 1995.

[18] C. Concordia, H. Poritsky, Synchronous Machine with Solid Cylindrical Rotor, AIEE Trans. 1937.

[19] C. Concordia, Synchronous Machine with Solid Cylindrical Rotor, pt. Ⅱ, AIEE Trans. 1960.

[20] A. J. Wood, An Analysis of Solid Rotor Machines—Operational Impedances and Equivalent Circuits, AIEE Trans. 1960.

[21] A. J. Wood, C. Concordia, An Analysis of Solid Rotor Machines Ⅲ—The Effects of Curvature, AIEE Trans. 1960.

[22] A. J. Wood, C. Concordia, An Analysis of Solid Rotor Machines Ⅲ—Finite Length Effects, AIEE Trans. 1960.

[23] A. J. Wood, C. Concordia, An Analysis of Solid Rotor Machines Ⅳ—An Approximate Nonlinear Analysis, AIEE Trans. 1960.

[24] P: Bharali, B. Adkins, Operational Impedances of Turbogenerators with Solid Rotors. Proc. IEE, 1963.

[25] N. A. Demerdash, T. W. Nehl, Use of Numerical Analysis of Nonlinear Eddy Current Problems by Finite Elements in the Determination of Parameters of Electrical Machines with Solid Rotors, IEEE Trans. on Magnetics, No. 6. 1979.

[26] S. H. Minnich, M. V. K. Chari, J. F. Berkery, Operational Inductances of Turbine Generators by the Finite Element Method, IEEE Trans. on PAS, 1983.

[27] 郭立炜、汤蕴璆，汽轮发电机的运算电抗和频率特性，哈尔滨电工学院学报，No. 3. 1988.

[28] 郭立炜、汤蕴璆，考虑曲率时汽轮发电机的运算电抗和等效电路，哈尔滨电工学院学报，No. 3. 1989.

[29] 郭立炜、汤蕴璆，汽轮发电机运算电抗和频率特性的数值计算，哈尔滨电工学院学报，No. 4. 1988.

[30] 郭立炜、汤蕴璆，汽轮发电机的非线性涡流场和运算电抗的数值计算，哈尔滨电工学院学报，No. 2. 1989.

[31] P. Hammond, Electric and Magnetic Images, Proc. IEE, pt. C, 1960.

[32] C. J. Carpenter, The Application of the Method of Images to Machine End-winding Fields, Proc. IEE, 1960.

[33] J. A. Tegopoulos, Current Sheets Equivalent to End-winding Currents of Turbine-generator Stator and Rotor, AIEE Trans. pt. Ⅲ, 1962.

[34] 奥田宏史，発電機端部磁界の計算，電気学会論文誌，第 89 巻，昭和 44 年，第 11 册.

[35] 汤蕴璆主编，电机内的电磁场，科学出版社，1981.

[36] 郑啸民、黄放，一种新的汽轮发电机定子端部绕组电流密度的精确表达式，理论电工第四届学术讨论会论文集，1991 年.

[37] 徐怡，汽轮发电机定子绕组端部的电流密度分布，哈尔滨电工学院学报，No. 3，1993.

[38] А. И. Вольдек, Основы методика расчета магнитных полей лобовых частей обмоток электрических машин,

Электричество, 1963. No. 1.

[39] А. И. Вольдек, Я. Б. Данилевич, Метод расчета магнитного поля в зоне лобовых частей обмоток статора и ротора турбогенераторов, Исследование электромагнитных полей, параметров и потерь в мощных электринеских машинах, Наука, 1966.

[40] P. J. Lawrenson, The Magnetic Field of the End Windings of Turbogenerators. Proc. IEE, 1961.

[41] P. Hammond, D. S. Ashworth, The Magnetic Field of a Turbogenerator. Proc. IEE. 1961.

[42] J. A. Tegopoulos, Flux Impinging on the End Plate of Turbin-generator. IEEE Trans. on PAS, 1963.

[43] C. J. Myercough, Calculation of Magnetic Field in the End Region of Turbogenerator, Proc. IEEE, No. 7. 1974.

[44] А. И. Важнов, И. А. Гордон и Г. Б. Гофман, Расчет трехмерного электромагнитного поля в мощных турбогенераторах, Электричество, 1976, No. 4.

[45] И. М. Постников, Л. Я. Станиславский, Электромагнитные и тепловые процессы в концевых частях мощных турбогенераторов, Наукова думка, 1971.

[46] 奥田宏史，有限要素法による進行波磁界および電流解析，電気学会論文誌，B48，昭和 51 年.

[47] K. Ito, T. Tokumasu, S. Nagano, M. Tari and S. Doi, Simulation for Design Purpose of Magnetic Fields in Turbine-driven Generator End Region, IEEE Trans. on PAS, No. 4. 1980.

[48] А. И. Вольдек, Я. Б. Данилевич, В. И. Косацевский и В. И. Яковлев, Электромагнитные процессы в торцевых частях электрицеских машин, энергоатомиздат, 1983.

[49] 陈伟华、汤蕴璆，汽轮发电机端部磁场的有限元分析，哈尔滨电工学院学报，No. 2，1986.

[50] 陈伟华，空载、三相短路和进相运行时汽轮发电机的端部磁场，哈尔滨电工学院学报，No. 1，1987.

[51] T. Nomura, S. Maeda, Analysis of Magnetic Flux in Stator End Windings of Large Turbine Generators Using Fourier Expansion, IEEE Trans. on Magnetics, No. 2, 1990.

[52] Xu Shanchun, Miao Lijie, Li Linxiang, Liu Tongyan and Fan Guoxiang, Quasi-3D Finite Element Analysis for Magnetic Field and Eddy Current in the End Region of Generators, Proc. ICEF '92, International Academic Publishers, 1993.

[53] 陈丕璋、严烈通、姚若萍著. 电机电磁场理论与计算，科学出版社，1986.

[54] 梁艳萍、汤蕴璆，水轮发电机瞬态电抗的数值计算，电工技术学报，电工技术报，No. 6，1996.

附录 A　恒定磁场和似恒电磁场解答的唯一性

A-1　恒定磁场解答的唯一性

（一）无旋磁场

在无旋磁场内，标量磁位 Ω 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Omega=0 \tag{A-1}$$

所以研究无旋磁场解答的唯一性，实质上就是研究拉普拉斯方程边值问题解答的唯一性. 可以证明，对于拉普拉斯方程$\nabla^2\Omega=0$，若给定边界曲面 S 上的磁位值 Ω，或者给定磁位的法向导数$\frac{\partial\Omega}{\partial n}$，则整个区域 V 内 Ω 的解答将是唯一的.

在证明唯一性前，先介绍一下格林公式和两条有关定理.

格林公式和两条有关定理　设标量函数 φ 和 ψ 在区域 V 内和边界曲面 S 上有连续的一阶偏导数，在区域内部有连续的二阶偏导数，则可证明：

$$\int_V\varphi\nabla^2\psi dV+\int_V(\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi)dV=\int_S\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS \tag{A-2}$$

式中$\frac{\partial\psi}{\partial n}$为边界曲面 S 上 ψ 的法向导数. 式（A-2）就称为格林公式.

在特殊情况下，若 $\varphi=\psi$，且 ψ 满足拉普拉斯方程，即$\nabla^2\psi=0$，则式(A-2)就成为

$$\int_V|\mathrm{grad}\psi|^2dV=\int_S\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS \tag{A-3}$$

从上式出发，可推出以下两条定理

定理 A-1　在区域 V 内，若函数 ψ 满足拉普拉斯方程，在边界曲面 S 上，$\psi=0$；则在整个区域 V 内，$\psi=0$.

证明　由于$\nabla^2\psi=0$，且在边界面 S 上 $\psi=0$，故式(A-3)的右端项为零，于是

$$\int_V|\mathrm{grad}\psi|^2dV=0$$

而$|\mathrm{grad}\psi|^2$ 恒为正值，故积分 $\int_V|\mathrm{grad}\psi|^2dV=0$ 的唯一可能，就是在区域 V 内

$$\mathrm{grad}\psi=0$$

上式说明，在区域 V 内，ψ=常值. 由于 ψ 是 V 内的连续函数，ψ 在边界 S 上等于零，表明该常值必定等于零，于是在整个区域 V 内 $\psi=0$.

定理 A-2　在区域 V 内，若函数 ψ 满足拉普拉斯方程，在边界曲面 S 上，函数的法向导数$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$；则在整个区域 V 内 ψ=常值.

证明　此定理的证明与定理 A-1 类似. 若区域 V 内$\nabla^2\psi=0$，且在边界 S 上$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$，

则式（A-3）的右端项为零，于是在区域 V 内 $\mathrm{grad}\psi=0$，即 $\psi=$常值.

拉普拉斯方程解答的唯一性 先证明拉普拉斯方程第一边值问题解答的唯一性：若区域 V 内 $\nabla^2\Omega=0$，在整个边界面 S 上，给定边值为 $\Omega=\Phi$，则 Ω 的解答是唯一的.

假设有两个解 Ω_1 和 Ω_2，它们同时满足拉普拉斯方程和给定的边界条件，即

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\Omega_1=0, \quad \nabla^2\Omega_2=0. \quad \text{在 } V \text{ 内} \\ &\Omega_1=\Phi, \quad \Omega_2=\Phi. \quad \text{在 } S \text{ 上} \end{aligned}\right\} \tag{A-4}$$

我们来证明，Ω_1 必定就是 Ω_2.

为此，令 $\psi=\Omega_1-\Omega_2$，则在 V 内

$$\nabla^2\psi=\nabla^2\Omega_1-\nabla^2\Omega_2=0 \tag{A-5}$$

在边界曲面 S 上

$$\psi=\Phi-\Phi=0 \tag{A-6}$$

于是根据定理 A-1 可知，在整个区域 V 内，$\psi=0$，即 $\Omega_1=\Omega_2$.

同理可以证明，拉普拉斯方程第二边值问题解答的唯一性：若区域 V 内 $\nabla^2\Omega=0$，在边界面 S 上给定法向导数 $\frac{\partial\Omega}{\partial n}=q$，则 Ω 的解答满足相差任一常数的唯一性.

最后来证明拉普拉斯方程混合边值问题解答的唯一性：若区域 V 内 $\nabla^2\Omega=0$，在部分边界面 S_1 上给定边值 $\Omega=\Phi$，余下的边界面 S_2 上给定法向导数 $\frac{\partial\Omega}{\partial n}=q$，则 Ω 的解答是唯一的.

设 Ω_1 和 Ω_2 同时满足拉普拉斯方程和给定的边界条件，并令 $\psi=\Omega_1-\Omega_2$，则

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\psi=0, \quad \text{在 } V \text{ 内} \\ &\psi=0, \quad \text{在 } S_1 \text{ 上}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0, \quad \text{在 } S_2 \text{ 上} \end{aligned}\right\} \tag{A-7}$$

根据格林公式可知

$$\int_V|\mathrm{grad}\psi|^2dV=\int_{S_1}\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS+\int_{S_2}\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS=0 \tag{A-8}$$

故在 V 内

$$\mathrm{grad}\psi=0 \quad \text{或} \quad \psi=\text{常值} \tag{A-9}$$

由于 ψ 为连续函数，而 ψ 在 S_1 面上等于零，故在整个区域 V 内 $\psi=0$，于是 $\Omega_1=\Omega_2$，即解答是唯一的.

（二）旋度磁场

若介质为线性、均匀（$\mu=$常值），在旋度磁场中，向量磁位 **A** 满足旋度旋度方程

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A}=\mu\mathbf{J} \tag{A-10}$$

式中 **J** 为电流密度. 为使 **A** 唯一，还应规定 **A** 的散度. 设 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$（库仑规范），则 **A** 将满足向量泊松方程

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} \tag{A-11}$$

下面来证明式(A-10)和(A-11)的唯一性. 在此之前，先介绍一下向量形式的格林公式.

向量形式的格林公式和有关定理 设向量函数 **P** 和 **Q** 在区域 V 内有连续的二阶偏导数，在边界曲面 S 上有连续的一阶偏导数，则可证明：

$$\int_V (\mathrm{rot}\mathbf{P}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{Q}-\mathbf{P}\cdot\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{Q})dV=\int_S(\mathbf{P}\times\mathrm{rot}\mathbf{Q})\cdot dS \tag{A-12}$$

上式称为向量形式的格林公式. 在特殊情况下，若 $\mathbf{P}=\mathbf{Q}$，且 $\mathbf{Q}$ 满足齐次旋度旋度方程 $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{Q}=0$，则式(A-12)就成为

$$\int_V|\mathrm{rot}\mathbf{Q}|^2dV=\int_S(\mathbf{Q}\times\mathrm{rot}\mathbf{Q})\cdot dS=\int_S(\mathrm{rot}\mathbf{Q}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{Q}dS$$

$$=\int_S(\mathbf{n}\times\mathbf{Q})\cdot\mathrm{rot}\mathbf{Q}dS \tag{A-13}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为边界面 S 的单位法向量. 从上式出发，可推出定理 A-3.

定理 A-3 在区域 V 内，若向量函数 $\mathbf{Q}$ 满足齐次旋度旋度方程 $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{Q}=0$，在边界面 S 上，$\mathbf{n}\times\mathbf{Q}=0$ 或 $\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0$，则在整个 V 内 $\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0$.

证明 从式(A-13)可见，若边界面 S 上 $\mathbf{n}\times\mathbf{Q}=0$ 或 $\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0$，则右端项为零，于是

$$\int_V|\mathrm{rot}\mathbf{Q}|^2dV=0$$

由此可得，V 内 $\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0$.

旋度旋度方程解答的唯一性 根据定理 A-3，即可证明旋度旋度方程 $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A}=\mu\mathbf{J}$ 的唯一性：若 V 内电密 $\mathbf{J}$ 的分布给定，边界面 S 上给定 $\mathbf{A}$ 的切向分量 $\mathbf{n}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}_t$，或者 $\mathbf{H}$ 的切向分量 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{H}_t$，则磁感强度 $\mathbf{B}$ 的解答即为唯一；$\mathbf{A}$ 的解答至多可以相差一个无旋向量 $\mathrm{grad}\psi$. 若 V 内进一步规定 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$，则在边界面 S 上给定 $\mathbf{A}_t$ 的情况下，$\mathbf{A}$ 的解答亦是唯一的.

设有两个向量磁位 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$，在 V 内它们都满足旋度旋度方程，在边界面 S 上都满足给定的边界条件；即

$$\left.\begin{array}{lll}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A}_1=\mu\mathbf{J}, & \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A}_2=\mu\mathbf{J} & \text{在 } V \text{ 内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_t & (\text{或 } \mathbf{n}\times\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_t) & \text{在 } S \text{ 面上}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_t & (\text{或 } \mathbf{n}\times\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_t) & \end{array}\right\} \tag{A-14}$$

令 $\mathbf{Q}=\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2$，不难看出，$\mathbf{Q}$ 满足

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{Q}=0, & \text{在 } V \text{ 内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{Q}=0 \quad (\text{或 } \mathbf{n}\times\nu\,\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0) & \text{在 } S \text{ 上}\end{array}\right\} \tag{A-15}$$

于是根据定理 A-3 可知，在 V 内

$$\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0 \quad \text{或 } \mathrm{rot}\mathbf{A}_1=\mathrm{rot}\mathbf{A}_2 \tag{A-16}$$

上式说明，磁感强度 $\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2$，即 V 内磁感强度的解答是唯一的.

由于 $\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0$，所以

$$\mathbf{Q}=\mathrm{grad}\psi \quad \text{或 } \mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2=\mathrm{grad}\psi \tag{A-17}$$

这说明，向量磁位 $\mathbf{A}$ 的解答至多可以相差一个无旋向量 $\mathrm{grad}\psi$. 从物理意义上看，这点不难理解，因为 $\mathbf{A}$ 的散度尚未规定，所以 $\mathbf{A}$ 的解答不唯一，而可以在特定的规范内变动.

为使 $\mathbf{A}$ 的解答成为唯一，必须对 $\mathbf{A}$ 的散度作出规定. 如果采用库仑规范，就有

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=0 \tag{A-18}$$

此时 $\mathrm{div}\mathbf{A}_1=0$，$\mathrm{div}\mathbf{A}_2=0$，故

$$\mathrm{div}\mathbf{Q}=\mathrm{div}\mathbf{A}_1-\mathrm{div}\mathbf{A}_2=0 \tag{A-19}$$

考虑到 $\mathbf{Q}=\text{grad}\psi$，于是

$$\text{div grad}\psi=\nabla^2\psi=0 \tag{A-20}$$

即 ψ 为调和函数.

对于调和函数，根据式(A-3)有

$$\int_V|\text{grad}\psi|^2dV=\int_S\psi(\text{grad}\psi\cdot\mathbf{n})dS \tag{A-21}$$

若边界面 S 上给定 $\mathbf{A}_t$，则 S 面上

$$\mathbf{n}\times\text{grad}\psi=\mathbf{n}\times\mathbf{Q}=0 \tag{A-22}$$

故 S 面是 ψ 的等值面，此时

$$\int_V|\text{grad}\psi|^2dV=\psi\int_S\text{grad}\psi\cdot d\mathbf{S}=\psi\int_V\text{div grad}\psi\,dV=0 \tag{A-23}$$

由此可得，在 V 内

$$\text{grad}\psi=0 \quad \text{或}\ \mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2 \tag{A-24}$$

即 $\mathbf{A}$ 的解答唯一.

当然，在确定 $\mathbf{B}$ 为唯一的基础上，若规定 V 内 $\text{div}\mathbf{A}=0$，边界面 S 上再给定向量磁位的法向分量 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=A_n$，则 S 面上有

$$\mathbf{n}\cdot\text{grad}\psi=\mathbf{n}\cdot\mathbf{Q}=0 \tag{A-25}$$

此时式(A-21)的右端项亦等于零，于是 V 内 $\text{grad}\psi=0$，由此可得 $\mathbf{A}$ 的解答亦为唯一. 这里要注意，给定边值 A_n 时，要保证 $\int_S\mathbf{A}\cdot dS=\int_V\text{div}\mathbf{A}dV=0$；为此，通常使 S 面上的 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0$.

对于混合边值问题，若 $S=S_1+S_2$，在 S_1 上给定 $\mathbf{n}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}_t$，在 S_2 上给定 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{H}_t$，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0$；则式(A-21)成为

$$\begin{aligned}\int_V|\text{grad}\psi|^2dV&=\int_{S_1}\psi(\text{grad}\psi\cdot\mathbf{n})dS+\int_{S_2}\psi(\text{grad}\psi\cdot\mathbf{n})dS\\&=\psi\int_{S_1}\text{grad}\psi\cdot\mathbf{n}dS=\psi\left[\int_{S_1}\text{grad}\psi\cdot\mathbf{n}dS+\int_{S_2}\text{grad}\psi\cdot\mathbf{n}dS\right]\\&=\psi\int_S\text{grad}\psi\cdot d\mathbf{S}=\psi\int_V\text{div grad}\psi dV=0\end{aligned} \tag{A-26}$$

于是 V 内 $\text{grad}\psi=0$，故 $\mathbf{A}$ 的解答亦为唯一.

归结起来，为使 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 的解答均为唯一，旋度旋度方程边值问题的三种表述为：

$$\left.\begin{array}{lll}\text{rot rot}\mathbf{A}=\mu\mathbf{J}, & \text{div}\mathbf{A}=0, & \text{在}V\text{内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}_t & & \text{在}S\text{上}\end{array}\right\} \tag{A-27}$$

或

$$\left.\begin{array}{llll}\text{rot rot}\mathbf{A}=\mu\mathbf{J}, & \text{div}\mathbf{A}=0, & \text{在}V\text{内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{H}_t, & \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0, & \text{在}S\text{上}\end{array}\right\} \tag{A-28}$$

对于混合边值问题，

$$\left.\begin{array}{llll}\text{rot rot}\mathbf{A}=\mu\mathbf{J}, & \text{div}\mathbf{A}=0, & \text{在}V\text{内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}_t & & \text{在}S_1\text{上}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{H}_t, & \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0 & \text{在}S_2\text{上}\end{array}\right\} \tag{A-29}$$

向量泊松方程解答的唯一性 若规定 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$（库仑规范），则

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} = -\nabla^2\mathbf{A}$$

由此可得 $\mathbf{A}$ 的向量泊松方程

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$$

但是，如果 $\mathrm{div}\mathbf{A}=$常值，但不等于零，则 $\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{A}$ 仍等于零，此时仍然可从旋度旋度方程得到 $\mathbf{A}$ 的向量泊松方程. 换言之，向量泊松方程的解答还不能保证 $\mathbf{A}$ 一定满足 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$. 要使 V 内各点的 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$，还需给定 $\mathrm{div}\mathbf{A}$ 在 S 上的边值为零. 下面从数学上来说明这一点.

对向量泊松方程两边取散度，可得

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{A}) = \mu\,\mathrm{div}\mathbf{J}$$

对恒定磁场，$\mathrm{div}\mathbf{J}=0$；另外 $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{A})\equiv 0$，故有

$$\nabla^2(\mathrm{div}\mathbf{A})=0 \tag{A-30}$$

上式说明，$\mathbf{A}$ 的向量泊松方程中隐含着 $\mathrm{div}\mathbf{A}$ 的拉普拉斯方程. 此时若在边界面 S 上给定 $\mathrm{div}\mathbf{A}=0$，由定理 A-1 可知，V 内 $\mathrm{div}\mathbf{A}$ 就处处为零. 当然，令 S 面上 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0$，亦可得到相同的结果.

由此可知，为得到向量泊松方程的唯一解，边值问题的表述应为：

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} & \text{在 } V \text{ 内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}_t,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0 & \text{在 } S \text{ 上}\end{array}\right\} \tag{A-31}$$

或

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} & \text{在 } V \text{ 内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{H}_t,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0 & \text{在 } S \text{ 上}\end{array}\right\} \tag{A-32}$$

对于混合边值问题，

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} & \text{在 } V \text{ 内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}_t & \text{在 } S_1 \text{ 上}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{H}_t & \text{在 } S_2 \text{ 上}\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0 & \text{在整个 } S \text{ 上}\end{array}\right\} \tag{A-33}$$

下面来证明向量泊松方程的唯一性. 先证明式(A-31)或(A-32)的唯一性.

设有 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$，在 V 内均满足向量泊松方程，边界面 S 上满足式(A-31)或(A-32)中的边界条件；即

$$\left.\begin{array}{lll}\nabla^2\mathbf{A}_1=-\mu\mathbf{J},\quad \nabla^2\mathbf{A}_2=-\mu\mathbf{J}, & & \text{在 } V \text{ 内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_t(\text{或 }\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_t),\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}_1=0 & & \text{在 } S \text{ 上}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_t(\text{或 }\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_t),\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}_2=0 & & \text{在 } S \text{ 上}\end{array}\right\} \tag{A-34}$$

令 $\mathbf{Q}=\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2$，可知

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2\mathbf{Q}=0, & \text{在 } V \text{ 内}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{Q}=0(\text{或 }\mathbf{n}\times\nu\,\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0),\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{Q}=0 & \text{在 } S \text{ 上}\end{array}\right\} \tag{A-35}$$

把 $\mathbf{Q}$ 与 $\nabla^2\mathbf{Q}$ 点积，并在 V 内作体积分，可得

$$\int_V \mathbf{Q}\cdot(\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{Q} - \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{Q})dV = 0 \tag{A-36}$$

考虑到

$$\int_V \mathbf{Q}\cdot \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{Q}\,dV = \int_V (\mathrm{rot}\mathbf{Q})^2 dV - \int_S (\mathbf{Q}\times \mathrm{rot}\mathbf{Q})\cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_V \mathbf{Q}\cdot \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{Q}\,dV = -\int_V (\mathrm{div}\mathbf{Q})^2 dV + \int_S \mathbf{Q}\,\mathrm{div}\mathbf{Q}\cdot d\mathbf{S}$$

式(A-36)可改写成

$$\int_V (\mathrm{rot}\mathbf{Q})^2 dV + \int_V (\mathrm{div}\mathbf{Q})^2 dV = \int_S (\mathbf{Q}\times \mathrm{rot}\mathbf{Q})\cdot \mathbf{n}dS + \int_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{Q})\mathrm{div}\mathbf{Q}dS \tag{A-37}$$

上式的右端第一项亦可写成

$$\int_S (\mathbf{Q}\times \mathrm{rot}\mathbf{Q})\cdot \mathbf{n}dS = \int_S (\mathbf{n}\times\mathbf{Q})\cdot \mathrm{rot}\mathbf{Q}dS = \int_S \mathbf{Q}\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{Q}\times\mathbf{n})dS \tag{A-38}$$

由于在边界面 S 上有 $\mathbf{n}\times\mathbf{Q}=0$ 或 $\mathbf{n}\times(\nu\mathrm{rot}\mathbf{Q})=0$，所以式(A-37)的右端第一项总等于零；另外，在 S 上有 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{Q}=0$，所以右端第二项亦等于零；于是

$$\int_V (\mathrm{rot}\mathbf{Q})^2 dV + \int_V (\mathrm{div}\mathbf{Q})^2 dV = 0 \tag{A-39}$$

由此可得

$$\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{Q}=0 \tag{A-40}$$

再求解由上式所构成的边值问题

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}\mathbf{Q}=0, \quad \mathrm{div}\mathbf{Q}=0, && \text{在 } V \text{ 内}\\ &\mathbf{n}\cdot\mathbf{Q}=0 && \text{在 } S \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{A-41}$$

可得 $\mathbf{Q}=0$，故知 $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$，即 $\mathbf{A}$ 的解答为唯一.

对于混合边值问题，把式(A-37)的右端第一项分成 S_1 和 S_2 上两项之和，可得

$$\int_V (\mathrm{rot}\mathbf{Q})^2 dV + \int_V (\mathrm{div}\mathbf{Q})^2 dV = \int_{S_1} (\mathbf{n}\times\mathbf{Q})\cdot \mathrm{rot}\mathbf{Q}dS + \int_{S_2} \mathbf{Q}\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{Q}\times\mathbf{n})dS + \int_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{Q})\cdot \mathrm{div}\mathbf{Q}dS \tag{A-42}$$

此时根据式(A-33)的边界条件，上式的右端项仍等于零，于是式(A-41)仍然成立，$\mathbf{A}$ 的解答仍为唯一.

A-2 似恒电磁场解答的唯一性

对于似恒电磁场，在线性、均匀介质中，磁感强度 $\mathbf{B}$ 满足

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{B} = -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{A-43}$$

上式称为 $\mathbf{B}$ 的旋度旋度方程. 考虑到 $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{B}=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{B}-\nabla^2\mathbf{B}$，而 $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$，可得 $\mathbf{B}$ 的涡流方程

$$\nabla^2\mathbf{B} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{A-44}$$

对于稳态正弦电磁场，$\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$，式(A-43)和(A-44)成为 $\dot{\mathbf{B}}$ 的复旋度旋度方程和复涡流方程

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{B}} = -j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{B}} \tag{A-45}$$

$$\nabla\dot{\mathbf{B}}=j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{B}} \tag{A-46}$$

把式（A-45）的两边再取一次散度，可得 $\mathrm{div}\dot{\mathbf{B}}=0$，这说明 $\dot{\mathbf{B}}$的复旋度旋度方程中隐含了 $\mathrm{div}\dot{\mathbf{B}}=0$ 这一方程，这是正弦电磁场的一个特点.

下面来研究式(A-45)和(A-46)解答的唯一性.

（一）复旋度旋度方程和复涡流方程解答的唯一性

先介绍复向量形式的格林公式.

复向量形式的格林公式及有关定理 设 $\dot{\mathbf{P}}$和 $\dot{\mathbf{Q}}$是 V 内具有连续二阶偏导数、在边界面 S 上具有连续一阶偏导数的复向量函数，可以证明：

$$\int_V(\mathrm{rot}\dot{\mathbf{P}}^*\cdot\mathrm{rot}\dot{\mathbf{Q}}-\dot{\mathbf{P}}^*\cdot\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{Q}})dV=\int_S(\dot{\mathbf{P}}^*\times\mathrm{rot}\dot{\mathbf{Q}})\cdot d\mathbf{S} \tag{A-47}$$

上式就是复向量形式的格林公式. 特殊情况下，$\dot{\mathbf{P}}=\dot{\mathbf{Q}}$，且 $\dot{\mathbf{Q}}$满足复旋度旋度方程 $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{Q}}=-ja^2\dot{\mathbf{Q}}(a^2=\omega\mu\sigma)$，就有

$$\int_V|\mathrm{rot}\dot{\mathbf{Q}}\ |^2dV+ja^2\int_V|\dot{\mathbf{Q}}\ |^2dV=\int_S(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{Q}}^*)\cdot\mathrm{rot}\dot{\mathbf{Q}}\,dS \tag{A-48}$$

定理 A-4 若复向量函数 $\dot{\mathbf{Q}}$在 V 内满足复旋度旋度方程 $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{Q}}=-ja^2\dot{\mathbf{Q}}$，在边界面 S 上给定 $\dot{\mathbf{Q}}$的切向分量 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{Q}}=0$，则在整个 V 内 $\dot{\mathbf{Q}}=0$.

证明 从式（A-48）可见，若边界面 S 上有 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{Q}}=0$，则

$$\int_V|\mathrm{rot}\ \dot{\mathbf{Q}}\ |^2dV+ja^2\int_V|\dot{\mathbf{Q}}\ |^2dV=0 \tag{A-49}$$

由此可得，在 V 内 $\dot{\mathbf{Q}}=0$.

复旋度旋度方程解答的唯一性 下面证明，若磁感强度 $\dot{\mathbf{B}}$在 V 内满足旋度旋度方程 $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{B}}=-j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{B}}$，在边界面 S 上给定 $\dot{\mathbf{H}}$的切向分量 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{H}}_t$，则 V 内 $\dot{\mathbf{B}}$的解答是唯一的.

设 V 内有 $\dot{\mathbf{B}}_1$ 和 $\dot{\mathbf{B}}_2$ 两个解答，它们都满足复旋度旋度方程，在边界面 S 上都满足给定的边界条件. 令 $\dot{\mathbf{Q}}=\dot{\mathbf{B}}_1-\dot{\mathbf{B}}_2$，不难得到

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{Q}}=-j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{Q}} && \text{在 } V \text{ 内}\\&\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{Q}}=0 && \text{在 } S \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{A-50}$$

于是由定理 A-4 可知，在 V 内 $\dot{\mathbf{Q}}=0$，即 $\dot{\mathbf{B}}_1=\dot{\mathbf{B}}_2$，所以磁感强度 $\dot{\mathbf{B}}$的解答是唯一的.

复涡流方程解答的唯一性 若磁感强度 $\dot{\mathbf{B}}$在 V 内满足复涡流方程 $\nabla\dot{\mathbf{B}}=j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{B}}$，在边界面 S 上给定磁场强度的切向分量 $\dot{\mathbf{H}}_t$ 和磁感强度的法向分量 $\dot{\mathbf{B}}_n$（或 $\mathrm{div}\dot{\mathbf{B}}=0$），则在 V 内 $\dot{\mathbf{B}}$的解答就是唯一的. 证明如下.

设 V 内有 $\dot{\mathbf{B}}_1$ 和 $\dot{\mathbf{B}}_2$ 都满足复涡流方程，在边界面 S 上都满足给定的边界条件. 令 $\dot{\mathbf{Q}}=\dot{\mathbf{B}}_1-\dot{\mathbf{B}}_2$，不难得到

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\nabla\times\dot{\mathbf{Q}}=j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{Q}} && \text{在 } V \text{ 内}\\ &\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{Q}}=0,\quad \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{Q}}=0\ (\text{或 div}\dot{\mathbf{Q}}=0) && \text{在 } S \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{A-51}$$

把 $\dot{\mathbf{Q}}^*$ 与 $\nabla\times\nabla\times\dot{\mathbf{Q}}$ 点积，并在 V 内作体积分，再考虑到

$$\int_V \dot{\mathbf{Q}}^*\cdot\text{rot rot}\dot{\mathbf{Q}}\,dV=\int_V \text{rot}\dot{\mathbf{Q}}^*\cdot\text{rot}\dot{\mathbf{Q}}\,dV-\int_S(\dot{\mathbf{Q}}^*\times\text{rot}\dot{\mathbf{Q}})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\int_V(\dot{\mathbf{Q}}^*\cdot\text{grad div}\dot{\mathbf{Q}}\,dV=-\int_V\text{div}\dot{\mathbf{Q}}^*\text{div}\dot{\mathbf{Q}}\,dV+\int_S\dot{\mathbf{Q}}^*\text{div}\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{n}dS$$

就有

$$\begin{aligned}&\int_V|\text{rot}\dot{\mathbf{Q}}|^2dV+\int_V|\text{div}\dot{\mathbf{Q}}|^2dV+j\omega\mu\sigma\int_V|\dot{\mathbf{Q}}|^2dV\\&=\int_S(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{Q}}^*)\cdot\text{rot}\dot{\mathbf{Q}}\,dS+\int_S\dot{\mathbf{Q}}^*\cdot\mathbf{n}\,\text{div}\dot{\mathbf{Q}}\,dS\end{aligned}\tag{A-52}$$

由于在边界面 S 上有 $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{Q}}=0$，$\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{Q}}=0$（或 $\text{div}\dot{\mathbf{Q}}=0$），故上式的右端项为零，由此可得

$$\text{rot}\dot{\mathbf{Q}}=0,\qquad \text{div}\dot{\mathbf{Q}}=0,\qquad \dot{\mathbf{Q}}=0$$

故 $\dot{\mathbf{B}}_1=\dot{\mathbf{B}}_2$，即解为唯一.

（二）旋度旋度方程瞬态解的唯一性

若 V 内磁感强度 $\mathbf{B}$ 满足 $\text{rot rot}\mathbf{B}=-\mu\sigma\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$，在边界面 S 上给定磁场强度的切向分量 $\mathbf{H}_t$，同时给定 $t=0$ 时 V 内各点 $\mathbf{B}$ 的初值 $\mathbf{B}_0(x,y,z)$，则 V 内 $\mathbf{B}$ 的瞬态解是唯一的. 证明如下.

设 $\dot{\mathbf{B}}_1$ 和 $\dot{\mathbf{B}}_2$ 在 V 内同时满足 $\text{rot rot}\mathbf{B}=-\mu\sigma\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ 和给定的初始条件，在 S 上同时满足给定的边界条件. 令 $\mathbf{Q}=\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2$，不难看出，$\mathbf{Q}$ 将满足

$$\left.\begin{aligned} &\text{rot rot}\mathbf{Q}=-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} && \text{在 } V \text{ 内}\\ &\mathbf{n}\times\mathbf{Q}=0 && \text{在 } S \text{ 上}\\ &\mathbf{Q}_{(t=0)}=0 && \text{在 } V \text{ 内}\end{aligned}\right\} \tag{A-53}$$

由向量形式的格林公式可知，当 $\text{rot rot}\mathbf{Q}=-\mu\sigma\dfrac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t}$ 时，有

$$\int_V|\text{rot}\mathbf{Q}|^2dV+\frac{1}{2}\mu\sigma\int_V\frac{\partial}{\partial t}|\mathbf{Q}|^2dV=\int_S(\mathbf{n}\times\mathbf{Q})\cdot\text{rot}\mathbf{Q}\,dS \tag{A-54}$$

由于在边界面 S 上有 $\mathbf{n}\times\mathbf{Q}=0$，故上式的右端项为零，于是

$$\text{rot}\mathbf{Q}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}|\mathbf{Q}|^2=0 \tag{A-55}$$

由上式的第二式可知，

$$\mathbf{Q}=\text{常向量} \tag{A-56}$$

再考虑到 $t=0$ 时，$\mathbf{Q}=0$，可知此常向量为零向量；于是 $\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2$，即瞬态解为唯一.

（三）用电磁位表述时，似恒正弦电磁场的唯一性

用电磁位 $\dot{\mathbf{A}}$，$\dot{\varphi}$表述时，在库仑规范下，似恒电磁场的基本方程为

$$\left.\begin{aligned}&\text{rot rot}\dot{\mathbf{A}}=-\mu\sigma\text{grad}\dot{\varphi}-j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{A}}\\&\nabla^2\dot{\varphi}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{在 } V \text{ 内} \tag{A-57}$$

这是 $\dot{\mathbf{A}}$和 $\dot{\varphi}$的联立方程．对上式的第一式两边取散度，并考虑到第二式，可得 $\text{div}\dot{\mathbf{A}}=0$．可见式(A-57)已隐含了库仑规范．下面来研究式(A-57)解答的唯一性．

若 V 内 $\dot{\mathbf{A}}$和 $\dot{\varphi}$满足式(A-57)，边界面 S 上给定向量磁位的切向分量 $\dot{A}_t$(或磁场强度的切向分量 $\dot{\mathbf{H}}_t$)和向量磁位的法向分量 $\dot{\mathbf{A}}_n$(或标量电位 $\dot{\Phi}$)，则 $\dot{\mathbf{A}}$，$\dot{\varphi}$和 $\dot{\mathbf{B}}$的解答均为唯一．

先证明 $\dot{\varphi}$的唯一性．从式(A-57)可见，$\dot{\varphi}$满足拉普拉斯方程，故若边界面 S 上给定边值 $\dot{\Phi}$或 $\dot{\varphi}$的法向导数$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n}$，则 $\dot{\varphi}$的解即为唯一．

考虑到边界面 S 上，电密的法向分量等于零，即

$$\mathbf{n}\cdot\sigma-\text{grad}\dot{\varphi}-j\omega\dot{\mathbf{A}})=0,$$

故

$$\left.\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n}\right|_S=-j\omega(\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{A}})|_S \tag{A-58}$$

上式说明，在 S 面给定 $\dot{\mathbf{A}}$的法向分量 $\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{A}}$，相当于给定$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n}$，此时 $\dot{\varphi}$的解答将具有相差一个任意常数的唯一性；若再规定 S 面上某一参考点的 $\dot{\varphi}$值，则 $\dot{\varphi}$的解答即为唯一．

再证明 $\dot{\mathbf{A}}$的唯一性．设 $\dot{\mathbf{A}}_1$ 和 $\dot{\mathbf{A}}_2$ 都满足式 (A-57) 中的第一式和给定的边界条件，考虑到 $\dot{\varphi}$的解已唯一确定，故有

$$\left.\begin{aligned}&\text{rot rot}\dot{\mathbf{A}}_1=-\mu\sigma\ \text{grad}\dot{\varphi}-j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{A}}_1 && \text{在 } V \text{ 内}\\&\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}_1=\dot{\mathbf{A}}_t && \text{在 } S \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{A-59}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{rot rot}\dot{\mathbf{A}}_2=-\mu\sigma\ \text{grad}\dot{\varphi}-j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{A}}_2 && \text{在 } V \text{ 内}\\&\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}_2=\dot{\mathbf{A}}_t && \text{在 } S \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{A-60}$$

令 $\dot{\mathbf{Q}}=\dot{\mathbf{A}}_1-\dot{\mathbf{A}}_2$，可得

$$\left.\begin{aligned}&\text{rot rot}\dot{\mathbf{Q}}=-j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{Q}} && \text{在 } V \text{ 内}\\&\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{Q}}=0 && \text{在 } S \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{A-61}$$

从定理 A-4 可知，对于 $\dot{\mathbf{Q}}$的这一边值问题，可得 $\dot{\mathbf{Q}}=0$，$\text{rot}\dot{\mathbf{Q}}=0$；由此可知 $\dot{\mathbf{A}}_1=\dot{\mathbf{A}}_2$，$\dot{\mathbf{B}}_1=\dot{\mathbf{B}}_2$，即向量磁位和磁感强度的解均为唯一．若边界面 S 上给定 $\dot{\mathbf{H}}_t$，从式(A-48)可见，同样可得 $\dot{\mathbf{Q}}=0$ 和 $\text{rot}\dot{\mathbf{Q}}=0$，于是 $\dot{\mathbf{A}}$和 $\dot{\mathbf{B}}$的解亦均为唯一．

附录 B　椭圆积分和雅可比椭圆函数

B-1　椭圆积分

形如 $\int R[w, \sqrt{P(w)}]dw$ 的积分叫做椭圆积分，其中 $P(w)$ 是 w 的三次或四次多项式，R 为变元 w、$\sqrt{P(w)}$ 的有理函数. 一般地讲，这类积分不能用初等函数表出(个别情况除外).

可以证明，通过一些变换，任何椭圆积分总可以化为三种基本类型，它们分别称为第一类、第二类和第三类椭圆积分. 之所以称为椭圆积分，是因为它们首先在求椭圆弧长中出现.

(一) 椭圆积分的定义

第一类椭圆积分 $F(w,k)$ 或 $F(\varphi,k)$ 的定义为

$$F(w,k) \equiv \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \quad \text{(雅可比形式)} \tag{B-1}$$

上式中，若令 $w=\sin\varphi$，则亦可写为

$$F(\varphi,k) \equiv \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{(勒让德形式)} \tag{B-2}$$

其中，w 称为振幅，φ 称为幅角，k 称为模；k 是积分中的参数，在一般的工程应用问题中，$0<k<1$.

第二类椭圆积分 $E(w,k)$ 或 $E(\varphi,k)$ 的定义为

$$E(w,k) \equiv \int_0^w \sqrt{\frac{1-k^2w^2}{1-w^2}}dw \quad \text{(雅可比形式)} \tag{B-3}$$

上式中，若令 $w=\sin\varphi$，则亦可写为

$$E(\varphi,k) \equiv \int_0^w \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \quad \text{(勒让德形式)} \tag{B-4}$$

其中，w、φ 和 k 等与第一类椭圆积分中的意义相同.

第三类椭圆积分 $\Pi(w,k_1,k)$ 或 $\Pi(\varphi,k_1,k)$ 的定义为

$$\Pi(w,k_1,k) \equiv \int_0^\varphi \frac{dw}{(1-k_1^2w^2)\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \tag{B-5}$$

令 $w=\sin\varphi$，则亦可写为

$$\Pi(\varphi,k_1,k) \equiv \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k_1^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{B-6}$$

式(B-5)和(B-6)都叫做勒让德形式. 注意第三类积分不但依赖于 φ 和 k^2，而且依赖于 k_1^2；k_1 在工程问题中常代表另一个模.

有时引入 $k=\sin\theta$，θ 称为模数角，则第一类椭圆积分可写为

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}$$

第二类椭圆积分可写为

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

这三类椭圆积分，当上限 $w=1\left(\text{即 }\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$ 时，称为完全积分；当积分上限为其他值时，称为不完全积分.

（二）完全椭圆积分

第一类完全椭圆积分记为 K 或 $K(k)$，第二类完全椭圆积分记为 E 或 $E(k)$，即

$$K=\int_0^1\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{B-7}$$

$$E=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2w^2}{1-w^2}}dw=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{B-8}$$

因此

$$F(1,k)=F\left(\frac{\pi}{2},k\right)\equiv K(k)\equiv K,$$

$$E(1,k)=E\left(\frac{\pi}{2},k\right)\equiv E(k)\equiv E.$$

通常把 k' 称为补模，

$$k'=\sqrt{1-k^2}$$

第一类椭圆积分对应于补模的完全积分用 K' 或 $K'(k)$ 表示，即

$$K'(k)\equiv K(k')=\int_0^1\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k'^2w^2)}} \tag{B-9}$$

第二类椭圆积分对应于补模的完全积分用 E' 或 $E'(k)$ 表示，即

$$E'(k)\equiv E(k')=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k'^2w^2}{1-w^2}}dw \tag{B-10}$$

下面来求 K' 用模 k 表示时的表达式.

在式（B-9）中令

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2w^2}}$$

即

$$w=\frac{\sqrt{t^2-1}}{k't},\quad \sqrt{1-w^2}=\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{k't}$$

$$dw=\frac{dt}{k't^2(t^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

于是

$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{k't^2(t^2-1)^{\frac{1}{2}}}\frac{k't}{(1-k^2t^2)^{\frac{1}{2}}}t$$

$$=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{j\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{B-11}$$

式（B-11）已将 K' 用 k 表示.

由式(B-7)和式(B-11)可知，

$$K+jK'=\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \tag{B-12}$$

即

$$F(1/k,k)=K+jK' \tag{B-13}$$

或写为

$$F\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{k}\right),k\right]=K+jK' \tag{B-14}$$

其中 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)$ 表示角 φ 的值.

再求 E' 用 k 表示的表达式.

在式(B-10)中，令

$$t=\frac{\sqrt{1-k'^2w^2}}{k}$$

则

$$w=\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{k'},\quad \sqrt{1-w^2}=\frac{k\sqrt{(t^2-1)}}{k'}$$

$$dw=-\frac{k^2t}{k'\sqrt{1-k^2t^2}}dt$$

于是

$$E'=\int_{\frac{1}{k}}^{1}kt\frac{k'}{k\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{-k^2t}{k'\sqrt{1-k^2t^2}}dt$$

$$=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{k^2t^2}{j(1-t^2)(1-k^2t^2)}dt$$

$$=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{j\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}-\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{j\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=K'-\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{j\sqrt{1-t^2}}dt \tag{B-15}$$

所以有

$$j(K'-E')=\int_1^{\frac{1}{k}}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt$$

再考虑到式（B-8），就有

$$\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{1-t^2}dt=E+j(K'-E') \tag{B-16}$$

于是

$$E(1/k,k)=E+j(K'-E') \tag{B-17}$$

或写成

$$E\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{k}\right),k\right]=E+j(K'-E') \tag{B-18}$$

其中 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)$ 表示角 φ 的值.

B-2 雅可比椭圆函数

由于本书仅涉及工程上常用的雅可比椭圆函数（以下简称为椭圆函数），所以我们从第一类椭圆积分的反演来引入.

（一）椭圆函数的定义

对于第一类椭圆积分

$$z=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \tag{B-19}$$

当模 k 为固定时，z 仅是变动上限 w 的函数. 在特殊情况下，若 $k=0$，则

$$z=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}=\sin^{-1}w \tag{B-20}$$

或

$$w=\sin z$$

这时积分就相当于正弦函数的反函数，反过来也可将正弦函数看作是这个积分的反演.

一般讲，若 $k\neq 0$，则可由椭圆积分的反演来引入椭圆函数. 令

$$w=\sin\varphi$$

则第一类椭圆积分可写成

$$z=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{B-21}$$

积分(B-21)的反演可写作

$$\varphi=\mathrm{am}\ z \tag{B-22}$$

式中，am 表示幅角（即 φ 为 z 的幅角），因而

$$w=\sin\ \mathrm{am}\ z \tag{B-23}$$

缩写为

$$w=\mathrm{sn}\ z,\qquad \text{或 } w=\mathrm{sn}(z,k) \tag{B-24}$$

sn z 就是 $k\neq 0$ 时与上述正弦函数 $\sin z$ 相对应的椭圆函数；sn z 是积分（B-19）的反演. 当 $k=0$ 时，sn z 就变为 $\sin z$，即

$$\mathrm{sn}(z,0)=\sin z$$

总之，sn z 是与正弦函数类似地作为第一类椭圆积分的反演而引出的.

自然也有

$$z=\mathrm{sn}^{-1}w=\mathrm{sn}^{-1}(w,k) \tag{B-25}$$

另外两个椭圆函数 cn z 和 dn z 的定义是：

$$\mathrm{cn}\ z=\cos\ \mathrm{am}\ z=\sqrt{1-w^2}=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 z} \tag{B-26}$$

$$\mathrm{dn}\ z=\Delta\ \mathrm{am}\ z=\sqrt{1-k^2w^2}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 z} \tag{B-27}$$

sn z、cn z 和 dn z 是主要的雅可比椭圆函数. 显然，它们之间具有下列关系：

$$\mathrm{sn}^2 x+\mathrm{cn}^2 z=1 \tag{B-28}$$

$$\mathrm{dn}^2 x+k^2\mathrm{sn}^2 z=1 \tag{B-29}$$

从这 3 个椭圆函数可以导出其他的椭圆函数，例如

$$\mathrm{tn}\ z=\frac{\mathrm{sn}\ z}{\mathrm{cn}\ z} \tag{B-30}$$

在较复杂的公式中，常采用格莱歇尔符号：

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{ns}\ z=\frac{1}{\mathrm{sn}\ z}, \quad \mathrm{nc}\ z=\frac{1}{\mathrm{cn}\ z}, \quad \mathrm{nd}\ z=\frac{1}{\mathrm{dn}\ z}\\
&\mathrm{sc}\ z=\frac{\mathrm{sn}\ z}{\mathrm{cn}\ z}, \quad \mathrm{sd}\ z=\frac{\mathrm{sn}\ z}{\mathrm{dn}\ z}, \quad \mathrm{cd}\ z=\frac{\mathrm{cn}\ z}{\mathrm{dn}\ z}\\
&\mathrm{cs}\ z=\frac{\mathrm{cn}\ z}{\mathrm{sn}\ z}, \quad \mathrm{ds}\ z=\frac{\mathrm{dn}\ z}{\mathrm{sn}\ z}, \quad \mathrm{dc}\ z=\frac{\mathrm{dn}\ z}{\mathrm{cn}\ z}
\end{aligned}\right\} \tag{B-31}$$

（二）椭圆函数的主要性质

下面再介绍一下雅可比椭圆函数的主要性质.

1. sn z 是奇函数，cn z 和 dn z 是偶函数，即

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{sn}(-z)=-\mathrm{sn}\ z\\
&\mathrm{cn}(-z)=\mathrm{cn}(z), \quad \mathrm{dn}(-z)=\mathrm{dn}(z)
\end{aligned}\right\} \tag{B-32}$$

2. sn z、cn z 和 dn z 都是具有双周期的半纯函数，它们的周期如下：

sn z：$4K$ 和 $2jK'$

cn z：$4K$ 和 $2K+2jK'$

dn z：$2K$ 和 $4jK'$

3. 由式(B-7)和式(B-12)知

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{sn}K=1\\
&\mathrm{sn}(K+jK')=\frac{1}{k}
\end{aligned}\right\} \tag{B-33}$$

4. 椭圆函数的微分　由式(B-19)有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dz}{dw}=\frac{1}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}\\
&\frac{dw}{dz}=\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}
\end{aligned}\right\}$$

故

$$\frac{d}{dz}\mathrm{sn}\ z=\mathrm{cn}\ z\ \mathrm{dn}\ z \tag{B-34}$$

由式(B-28)和(B-29)分别可得

$$\frac{d}{dz}\mathrm{cn}\ z=-\mathrm{sn}\ z\ \mathrm{dn}\ z \tag{B-35}$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{dn}\ z=-k^2\mathrm{sn}\ z\ \mathrm{cn}\ z \tag{B-36}$$

B-3 用椭圆函数表示椭圆积分

由式(B-25)可知，

$$F(w,k)=\mathrm{sn}^{-1}(w,k) \tag{B-37}$$

这就是用椭圆函数来表示的第一类椭圆积分.

由

$$E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

令 $\sin\varphi=\mathrm{sn}\ u$，则 $\cos\varphi\,d\varphi=\mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u\ du$，$d\varphi=\dfrac{\mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u\ du}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2u}}=\mathrm{dn}u\ du$，于是

$$E(\varphi,k)=E(u,k)=\int_0^{u}\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}\mathrm{dn}u\ du=\int_0^{u}\mathrm{dn}^2u\ du \tag{B-38}$$

这就是用椭圆函数表示的第二类椭圆积分.

类似地，对第三类椭圆积分的勒让德形式，我们有

$$\Pi(\varphi,k_1,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-k_1^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\int_0^{u}\frac{du}{1-k_1^2\mathrm{sn}^2u} \tag{B-39}$$

若同时令 $k_1=k\mathrm{sn}\alpha$（模为 k），则

$$\Pi(u,\alpha)=\int_0^{u}\frac{du}{1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\ \mathrm{sn}^2u} \tag{B-40}$$

这就是用椭圆函数表示时的第三类椭圆积分(勒让德形式).

B-4 雅可比第三类椭圆积分的各种形式

对第三类椭圆积分，雅可比采用了与勒让德不同的定义，我们用 Π_J 表示雅可比第三类椭圆积分：

$$\Pi_J(u,\alpha)\equiv k^2\mathrm{sn}\alpha\ \mathrm{cn}\alpha\ \mathrm{dn}\alpha\int_0^{u}\frac{\mathrm{sn}^2u}{1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\ \mathrm{sn}^2u}du \tag{B-41}$$

采用这种形式比较便于计算.

根据式（B-41）的定义，不难证明 Π_J 与 Π 的关系为：

$$\Pi=u+\frac{\mathrm{sn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha\ \mathrm{dn}\alpha}\Pi_J \tag{B-42}$$

还可以用其他的辅助函数来表示 Π_J，例如

$$\Pi_J(u,\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{u}[Z(u-\alpha)-Z(u+\alpha)+2Z(\alpha)]du \tag{B-43}$$

其中 $Z(\varphi)$是雅可比 Zeta 函数，

$$Z(\varphi)=E(\varphi)-F(\varphi)\frac{E}{K}\quad(\text{模为 }k) \tag{B-44}$$

利用 Zeta 函数与 Theta 函数 $\Theta(u)$的关系，

$$\int_0^u Z(u)du = \log \Theta(u) \tag{B-45}$$

式(A-43)亦可写成

$$\Pi_J(u,\alpha) = \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} + uZ(\alpha) + C \tag{B-46}$$

B-5 $\Pi_J(K+jK',\alpha)$的实部和虚部的计算

由式(B-46)可知，

$$\Pi_J(K+jK',\alpha) = \frac{1}{2}\{\log\Theta(K+jK'-\alpha) - \log\Theta(K+jK'+\alpha)\} + (K+jK')Z(\alpha) \tag{B-47}$$

由《E. I. E. P.》[①] 中的公式(141.01)查出，

$$Z(u_1+jK') = Z(u_1) + \mathrm{cs}\ u_1\ \mathrm{dn}\ u_1 - j\pi/2K$$

因而

$$Z(K-\alpha+jK') = Z(K-\alpha) + \mathrm{cs}(K-\alpha)\mathrm{dn}(K-\alpha) - j\pi/2K$$

将上式的两边都对 $K-\alpha$ 积分，并考虑到

$$\int \mathrm{cs}u\ \mathrm{dn}u\ du = \int \frac{\mathrm{cn}\ u}{\mathrm{sn}\ u}\mathrm{dn}u\ du = \int \frac{d(\mathrm{sn}u)}{\mathrm{sn}u} = \log\ \mathrm{sn}u$$

就可得到

$$\log\Theta(K-\alpha+jK') + C_1 = \log\Theta(K-\alpha) + C_2 + \log\mathrm{sn}(K-\alpha) - j\pi(K-\alpha)/2K \tag{B-48}$$

同理，

$$\log\Theta(K+\alpha+jK') + C_1 = \log\Theta(K+\alpha) + C_2 + \log\mathrm{sn}(K+\alpha) - j\pi(K+\alpha)/2K \tag{B-49}$$

于是可得

$$\log\Theta(K-\alpha+jK') - \log\Theta(K+\alpha+jK') = \log\frac{\Theta(K-\alpha)}{\Theta(K+\alpha)} + \log\frac{\mathrm{sn}(K-\alpha)}{\mathrm{sn}(K+\alpha)} + \frac{j\pi}{2K}(2\alpha) \tag{B-50}$$

由《E. I. E. P.》(1051.03)和(1051.02)可知，

$$\frac{\Theta(K-\alpha)}{\Theta(K+\alpha)} = \frac{\Theta_1(-\alpha)}{\Theta_1(\alpha)} = 1,$$

由《E. I. E. P.》(122.03)可知，

$$\frac{\mathrm{sn}(K-\alpha)}{\mathrm{sn}(K+\alpha)} = \frac{\mathrm{cd}(-\alpha)}{\mathrm{cd}(\alpha)} = 1,$$

于是式（B-50）可写成下列形式：

$$\log\Theta(K-\alpha+jK') - \log\Theta(K+\alpha+jK') = j\pi\alpha/K \tag{B-51}$$

① P. Byrd and M. D. Friedman 著，Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists，Springer，1954 一书的缩写.

将上式代入式（B-47），最后可得

$$\Pi_j(K+jK',\alpha)=\frac{j\pi\alpha}{2K}+(K+jK')Z(\alpha)$$
$$=KZ(\alpha)+j\left[\frac{\pi\alpha}{2K}+K'Z(\alpha)\right] \tag{B-52}$$

B-6 椭圆积分和椭圆函数的幂级数展开

（一）完全椭圆积分 K 和 E 的展开

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{256}k^6+\frac{1225}{16384}k^8+\cdots\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m k^m}{m!}\right]^2 \tag{B-53}$$

式中$\left(\frac{1}{2}\right)_m$表示$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+(m-1)\right)$的 m 项连乘积.

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{4}k^2-\frac{3}{64}k^4-\frac{5}{256}k^6-\frac{175}{16384}k^8-\cdots\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1-2m}\binom{-\frac{1}{2}}{m}^2 k^{2m} \tag{B-54}$$

式中$\binom{-\frac{1}{2}}{m}$表示$\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-m+1\right)}{m!}$

（二）雅可比范数 q

$$q=\frac{k^2}{16}\left[1+2\left(\frac{k}{4}\right)^2+15\left(\frac{k}{4}\right)^4+150\left(\frac{k}{4}\right)^6+1707\left(\frac{k}{4}\right)^8+\cdots\right]^4 \quad (k^2<1) \tag{B-55}$$

（三）非完全椭圆积分 $F(\varphi,k)$和 $E(\varphi,k)$的展开

$$F(\varphi,k)=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{m}(-k^2)^m t_{2m}(\varphi) \quad \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2},k^2<1\right) \tag{B-56}$$

式中

$$t_0(\varphi)=\varphi,$$
$$t_2(\varphi)=\frac{1}{2}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi),$$
$$t_4(\varphi)=\frac{1}{8}[3\varphi-\sin\varphi\cos\varphi(3+2\sin^2\varphi)],$$
$$t_{2m}(\varphi)=\frac{2m-1}{2m}t_{2(m-1)}(\varphi)-\frac{1}{2m}\sin^{2m-1}\varphi\cos\varphi.$$

$$E(\varphi,k)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\frac{1}{2}}{m}\right](-k^2)^m t_{2m}(\varphi)\qquad\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2},k^2<1\right)\tag{B-57}$$

其中 t_{2m} 如上所示.

（四）雅可比 Zeta 函数的展开

$$Z(u,k)=\left(1-\frac{E}{K}\right)u-2k^2\frac{u^3}{3!}+8k^2(k^2+1)\frac{u^5}{5!}-16k^2(2k^4+13k^2+2)\frac{u^7}{7!}$$
$$+128k^2(k^6+30k^4+30k^2+1)\frac{u^9}{9!}-\cdots\qquad(|u|<K')\tag{B-58}$$

（五）椭圆函数的展开

$$\mathrm{sn}\,u=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!}$$
$$-(1+135k^2+135k^4+k^6)\frac{u^7}{7!}+\cdots\quad(|u|<K')\tag{B-59}$$

$$\mathrm{sn}\,u=\frac{2\pi}{kK}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\sin(2m+1)\frac{\pi u}{2K}$$
$$\left[\left|\mathrm{Im}\,\frac{u}{K}\right|<\mathrm{Im}(jK'/K)\right]\tag{B-60}$$

$$\mathrm{cn}\,u=1-\frac{u^2}{2!}+(1+4k^2)\frac{u^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!}$$
$$+(1+408k^2+912k^4+64k^6)\frac{u^8}{8!}-\cdots\qquad(|u|<K')\tag{B-61}$$

$$\mathrm{cn}\,u=\frac{2\pi}{kK}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1+q^{2m+1}}\cos(2m+1)\frac{\pi u}{2K}$$
$$\left[\left|\mathrm{Im}\,\frac{u}{K}\right|<\mathrm{Im}(jK'/K)\right]\tag{B-62}$$

$$\mathrm{dn}\,u=1-k^2\frac{u^2}{2!}+(4+k^2)k^2\frac{u^4}{4!}-(16+44k^2+k^4)k^2\frac{u^6}{6!}$$
$$+(64+912k^2+408k^4+k^6)k^2\frac{u^8}{8!}-\cdots\qquad(|u|<K')\tag{B-63}$$

$$\mathrm{dn}\,u=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m+1}}{1+q^{2(m+1)}}\cos(m+1)\frac{\pi u}{K}$$
$$\left[\left|\mathrm{Im}\,\frac{u}{K}\right|<\mathrm{Im}(jK'/K)\right]\tag{B-64}$$

附录 C　恒定磁场问题的有限元自适应网格加密

单元形状好、误差分布均匀的网格通常称为最优网格．在电磁场问题的有限元计算中，如何得到最优网格，以使整个计算的 CPU 时间最短，精度符合规定要求，这是一个重要的实际问题．为此，需要进行自适应网格加密．

C-1　后验误差估计和自适应有限元过程

先验误差估计给出的是，按某种范数而言，某个偏微分方程边值问题近似解的收敛性和误差阶数．因此，先验误差估计是对近似解收敛性的定性分析，其误差特征是总体性的．先验误差估计是近似计算的理论基础，其重要性是不言而喻的．

随着有限元法应用的日趋广泛，工程上要求知道误差估计的具体数字，而不是笼统的阶数估计；这只能从求出的近似解和求解过程中的信息，在“事后”进行评估，这种估计称为后验误差估计．后验误差估计的误差特征是局部性的，决定是否终止计算的总体误差估计，可由局部误差估计算出．

把后验误差估计与网格生成和改进结合在一起，形成一个渐进的过程，使之形成较为理想的网格，并得到合乎精度要求的有限元解，这就是自适应有限元过程．具体来说，自适应有限元过程就是根据所规定的总体误差要求——终止条件，由计算机自动进行的如下过程：

(1) 从初始的“疏网格”出发；

(2) 用有限元法求近似解；

(3) 进行局部误差估计；

(4) 检验是否满足终止条件；

(5) 如果满足终止条件，则过程结束；如果不满足，按所规定的“细分准则”对单元细分，并接着进行步骤(6)和(7)；

(6) 将网格优化；

(7) 转回到(2)．

自适应网格加密的方式有 h 方式，p 方式和 h-p 方式三种．h 方式是指，保持各单元为线性插值，用单元细分的办法来减小局部误差．p 方式是指，保持网格不变，用提高单元插值阶数 p 的办法来减小局部误差．h-p 方式是前两种方式的结合．采用 p 方式时，上述过程(1)—(7)中的“疏网格”指线性插值，“单元细分”是指提高单元上的插值阶数．

下面先说明 h 方式的自适应网格加密．

C-2　h 方式的自适应网格加密

对二维线性恒定磁场问题，h 方式的后验误差估计大致可分为两类：一类是基于互补

变分原理的途径；另一类是基于局部量计算的途径．基于互补变分原理的途径，一般说来计算量较大，此外在补泛函的处理上比较困难．基于局部量计算的途径，其中又有多种方法．下面介绍一种计算上较为简便的方法．

（一）基于单元交界面条件的局部误差估计

对于二维恒定磁场问题，用向量磁位 A_z 作为位函数来计算时，在单元交界面处，磁感强度的法向分量 B_n 总是连续的，磁场强度的切向分量却不一定连续．于是从交界面处磁场强度切向分量的间断程度，可以得到局部误差估计．

设 P_k（$k=1$，2，3）为单元三边的中点，如图 C-1 所示．利用高斯求积公式，将误差化为 P_k 处的加权平均值，可得单元 Ω_i 上的误差估计 e_i 为（本附录文献［2］）

$$e_i=\sum_{k=1}^{3}(B_{tk(cal)}-B_{tk(est)})^2\frac{\Delta_i}{3} \tag{C-1}$$

式中下标“*cal*”和“*est*”分别表示计算值和精确解的估计值；Δ_i 表示单元面积．由于磁场强度切向分量精确值比较接近于面积较小和磁导率较大的单元中的 H_t 值，故选用

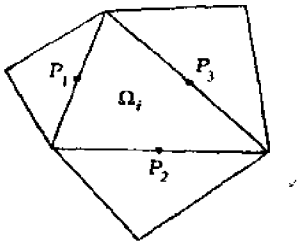


图 C-1　单元 Ω_i 及其相邻单元

$$B_{t(est)}=\mu_+[(1-\theta)H_{t+}+\theta H_{t-}] \tag{C-2}$$

式中下标“＋”和“－”分别表示交界面的内和外，θ 为

$$\theta=\frac{\sqrt{\Delta}_+/\mu_+}{(\sqrt{\Delta}_+/\mu_+)+(\sqrt{\Delta}_-/\mu_-)} \tag{C-3}$$

（二）单元细分准则和方式

实践表明，为使细分单元不致过多，细分通常以最大误差作为依据．设 e_{max} 为所有单元中 e_i 的最大值，即最大误差；m_i 为以最大误差 e_{max} 为基值时 e_i 的相对值；即

$$m_i=\frac{e_i}{e_{max}} \tag{C-4}$$

$f(m_i)$ 为单元细分后所得的单元数．按 m_i 的不同，$f(m_i)$ 可有不同的取法：

方式(1)

$$f(m_i)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant m_i<\dfrac{1}{3};\\ 2, & \text{当 } \dfrac{1}{3}\leqslant m_i<\dfrac{2}{3};\\ 3, & \text{当 } \dfrac{2}{3}\leqslant m_i\leqslant 1.\end{cases} \tag{C-5}$$

其中 $f(m_i)=2$ 指在最长边中点处加一节点，并与此边对面的顶点连线，把原来的单元一分为二，如图 C-2(a)所示；以它的长边为交界边的相邻单元也跟着一分为二．$f(m_i)=3$ 指在三角形形心处加一节点，并与三个顶点连线，把原来的单元一分为三，如附图 C-2(b)所示．

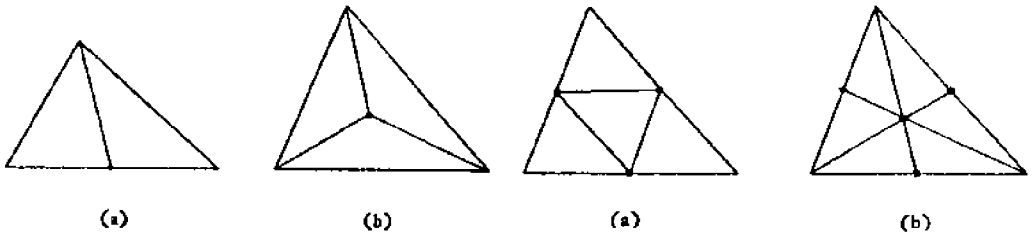


图 C-2　把原来的单元一分为二或一分为三　　图 C-3　把原来的单元一分为四或一分为六

方式〈2〉

$$f(m_i)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant m_i<\dfrac{1}{3};\\ 4, & \text{当 } \dfrac{1}{3}\leqslant m_i<\dfrac{2}{3};\\ 6, & \text{当 } \dfrac{2}{3}\leqslant m_i\leqslant 1.\end{cases}\tag{C-6}$$

其中 $f(m_i)=4$ 指将三边中点相连，把原来的单元细分为 4 个子单元，如图 C-3(a)所示；相邻的 3 个单元跟着都一分为二. $f(m_i)=6$ 指先在形心处加一节点，将单元一分为三，再在原来单元每边中点处加一节点，并与形心处所加节点相连，从而把 3 个小单元再一分为二，如图 C-3(b)所示；与之相邻的三个单元同时一分为二.

实践表明，对多数情况，方式〈2〉比方式〈1〉好，因为方式〈1〉的细分过程较慢，使自适应过程的 CPU 时间过长.

（三）笛朗耐(Delaunay)过程和节点编号优化

每次对网格进行细分之后，都会出现一批形状较差的单元，为此需要用笛朗耐过程对单元形状进行改进. 把已有网格中每两个相邻的三角形所构成的四边形，按笛朗耐规则逐一进行检查，对不符合规则的依次进行修改，以改进单元的形状.

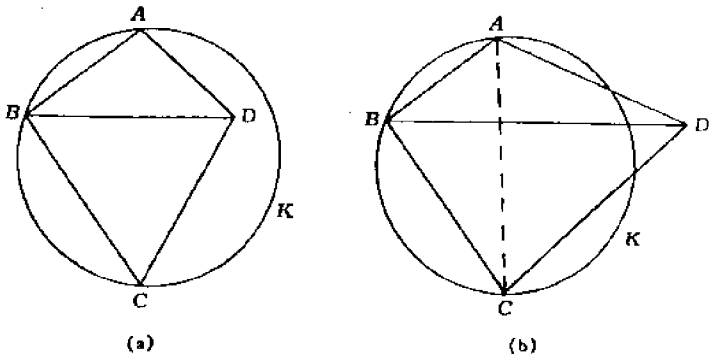


图 C-4　笛郎耐规则

以图 C-4 所示以 BD 为交界边的两个相邻单元为例，笛朗耐规则是指：过 A、B、C

三点作圆 K，看 D 点的位置在圆内还是在圆外；如果 D 点在圆外，则认为此四边形不符合笛朗耐规则；其他情况，包括 D 点在圆内或圆周上，以及 A、B、C 三点都在同一直线上以致不存在圆 K 的情况，均认为符合规则. 对不符合笛朗耐规则的情况，应将交接边 BD 删去，改为 AC（图中用虚线表示），形成另外两个新三角形△ABC 和△ADC. 对每个四边形用笛朗耐规则进行检查并修改，即可得到一个新网格；新网格中各单元的最小角之和将达到最大值，即新网格是按已有节点集所形成的最接近于正三角形单元的网格. 此网格称为笛朗耐三角形网格. 上述过程就称为笛朗耐过程.

具体实施时，笛朗耐过程既可按每两个相邻单元所构成的四边形进行；亦可按每一条非边界边所关联的单元进行.

得到笛朗耐三角形网格后，还要进行节点编号优化. 节点编号优化的方法有多种，可参见本附录文献[4].

（四）h 方式的总体误差估计

h 方式的总体误差估计 C（亦称为收敛参数），一般是把各个单元上的局部误差 e_i 进行累加或平方累加（视 e_i 的定义而定）再开方而得. 对式(C-1)的局部误差定义，有

$$C=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{E}e_i}{\int_{\Omega}|B_{cal}|^2d\Omega}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{E}e_i}{\sum_{i=1}^{E}B_{i(cal)}^2\Delta_i}} \tag{C-7}$$

式中 E 为总单元数. 当 C 小于某一给定的容许值时，自适应过程就终止.

C-3 叠层元和 p 方式自适应网格加密

采用 p 方式自适应过程时，将产生低阶元和高阶元的接续问题，此时只能采用叠层元. 采用叠层元不但可以解决局部单元提高插值阶数后高阶元与低阶元之间的联结问题，还可以充分利用原先低阶元计算时形成的数据和信息，使总的CPU时间明显缩短. 下面先对叠层元作一简要介绍，然后说明 p 方式的自适应过程.

（一）叠层三角元的特点

叠层有限元的概念最初是1971年引入的，当时是为了解决从网格较密的区域到网格不太密的区域，作为一种过渡单元而引入. 随着往后的发展，叠层元显示出其他明显的优点，并逐步建立起一些有用的叠层族. 工程上，O. C. Zienkiewicz 等最初将叠层矩形元和四边形元应用于力学问题；1976年，A. Peano 和 B. A. Szabo 对叠层三角元作出了开创性工作. 80年代后期，叠层三角元开始在电磁场问题中得到应用.

与通常的拉格朗日型元(L型元)相比较，叠层三角元具有以下特点：

(1) 保持网格不变，通过提高单元的局部插值阶数来改善近似解(即采用 p 方式局部加密)；

(2) p-1 阶叠层形状函数集是 p 阶叠层形状函数集的子集，因此局部加密增加新的自由度时，原来的单元系数阵将是新的单元系数阵的左上角子矩阵；

(3) 叠层元的节点，除了 3 个主节点(即三角形的 3 个顶点)外，其余节点均为形式节点；各节点的插值系数与 L 型元的节点插值系数通过线性变换相联系.

由于叠层元的结构有利于局部高阶插值，所以随着自适应有限元的发展，人们对叠层元就更加关注.

(二) 叠层元的形状函数

C^0 叠层三角元的形状函数可以有多种形式，这里采用形式最为简单的简单叠层元(本附录文献 [5]).

设 $\mathbf{N}_i^e$ 和 $\mathbf{N}_i'^e$ 以及 $\mathbf{u}_i^e$ 和 $\mathbf{u}_i'^e$ 分别表示 L 型元和叠层元的形状函数及插值系数；L_1、L_2、L_3 为三角元的面积坐标，$L_i=\dfrac{1}{2\Delta_e}(a_i+b_ix+c_iy)$，$i=1$，2，3；其中 $a_i=x_jy_m-x_my_j$，$b_i=y_j-y_m$，$c_i=x_m-x_j$；Δ_e 为单元面积. 对于一阶元，叠层元就是 L 型元，故其形状函数为：

$$p=1\text{ 时},\qquad N'^e=L_i,\qquad i=1,2,3 \tag{C-8}$$

对于二阶叠层元，共有 6 个节点，如图 C-5(a)所示. 在 3 个主节点处，其形状函数保持为原来一阶时的形状函数；对于边中点处的 3 个形式节点 4、5、6，形状函数分别为 L_2L_3、L_3L_1、L_1L_2；即

$$\left.\begin{aligned}&p=2\text{ 时}\\&N_i'^e=L_i,\qquad i=1,\ 2,\ 3\\&N_4'^e=L_2L_3,\quad N_5'^e=L_3L_1,\quad N_6'^e=L_1L_2\end{aligned}\right\} \tag{C-9}$$

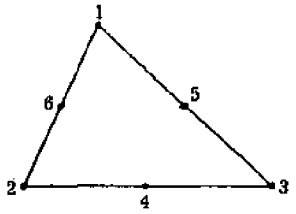


图 C-5　$p=2$ 时单元的节点图

(a) 叠层元的节点；(b) L 型元的节点

对于三阶叠层元，共有 10 个节点，其中 7、8、9 三个节点的位置分别与节点 4、5、6 重合，节点 10 位于形心处，如图 C-6 所示. 此时，节点 1—6 的形状函数保持为原来二阶时的形状函数，新增节点 7、8、9、10 的四个形状函数，如下式所示；即

$$\left.\begin{aligned}&p=3\text{ 时}\\&N_i'^e=L_i,\ i=1,\ 2,\ 3\\&N_4'^e=L_2L_3,\qquad N_5'^e=L_3L_1,\qquad N_6'^e=L_1L_2,\\&N_7'^e=(\mathrm{Sign}\ S_i)\cdot(L_2^2L_3-L_3^2L_2),\qquad N_8'^e=(\mathrm{Sign}\ S_i)\cdot(L_3^2L_1-L_1^2L_3),\\&N_9'^e=(\mathrm{Sign}\ S_i)\cdot(L_1^2L_2-L_2^2L_1),\qquad N_{10}'^e=L_1L_2L_3\end{aligned}\right\} \tag{C-10}$$

不难看出，此时一阶形状函数是二阶形状函数的子集；二阶形状函数又是三阶形状函数的子集.

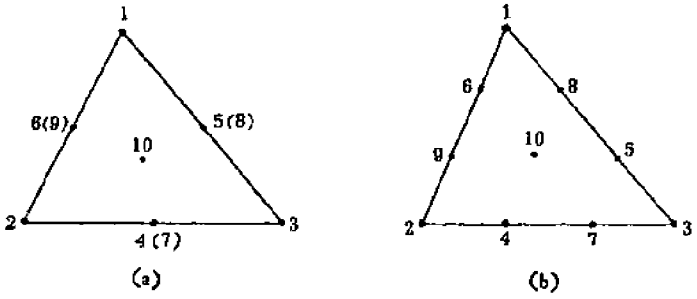


图 C-6　$p=3$ 时单元的节点
(a) 叠层元；(b) L 型元

对于叠层元，单元上的插值函数 u^e 等于

$$u^e=\sum_1^n N_i^e u_i^e \tag{C-11}$$

式中 n 为单元的节点数. 研究表明，在三个主节点处，对任何插值阶数 p，叠层系数与 L 型元的插值系数恒相等，即等于该三节点处磁位的近似解（本附录文献 [5]）

$$u_i^{'e}=u_i^e \qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{C-12}$$

对于其他节点处的二阶、三阶叠层系数 $u_i^{'e}$ ($i=4$—9)，可以分别解释为相应的边中点处被插值函数局部边方向的二阶、三阶切向导数值的某常数倍；由此可得，交界边两侧单元所对应的一对三阶叠层系数的值应当反号. 但是单元插值公式总是式 (C-11) 的形式，故交界边两侧的一对三阶形状函数前必须相应地冠以相反的符号. 为此，当 $p\geqslant 3$ 时，将网格中的每条边都任意指定一个正向（规则网格可以统一指定几个正向），单元边按 i、j、m 局部转向（逆时针方向）；当单元边的局部转向与规定的正向一致时，称该局部边为正向局部边，反之为负向局部边. 相应地，式(C-10)中的 Sign S_i 为

$$\text{Sign } S_i=\begin{cases}1, & \text{对正向局部边；}\\ -1, & \text{对负向局部边}\end{cases} \tag{C-13}$$

（三）采用二阶叠层元时，准泊松方程混合边值问题的离散格式

对于二维恒定磁场的准泊松方程混合边值问题

$$\left.\begin{aligned} &-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=J_z, \quad \text{在 } G \text{ 内}\\ &u|_{\Gamma_1}=u_0, \quad \nu\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2}=q \end{aligned}\right\} \tag{C-14}$$

其中 u 为向量磁位 $u=A_z$；ν 为磁阻率；u_0 和 q 分别为给定的第一和第二边值. 此边值问题与下列条件变分问题等价：

$$\left.\begin{aligned} &I(u)=\iint_G\left\{\frac{1}{2}\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-J_z u\right\}dxdy-\int_{\Gamma_2}qudl=\min\\ &u|_{\Gamma_1}=u_0 \end{aligned}\right\} \tag{C-15}$$

与 L 型元相似，用叠层元来离散时，其步骤是：(1)单元分析；(2)总体合成；(3)用一类边界条件修改总体系数阵和右端项列向量；(4)求解修改后的方程组，得到叠层系数的解答；(5)由求出的叠层解，通过线性变换，求出 L 型元的节点值. 下面逐一加以说明.

单元分析 经过计算不难得到

$$\frac{\partial I^e}{\partial \mathbf{u}'^e} = \mathbf{k}^e\mathbf{u}'^e - \mathbf{f}^e \tag{C-16}$$

式中 $\mathbf{u}'^e$ 为单元的叠层系数列向量；$\mathbf{k}^e$ 为叠层元的单元系数阵；$\mathbf{f}^e$ 为单元右端项列向量. 对于二阶叠层元.

$$\mathbf{u}'^e = [u_1'^e \quad u_2'^e \quad u_3'^e \quad u_4'^e \quad u_5'^e \quad u_6'^e]^T \tag{C-17}$$

$$\mathbf{k}^e = \frac{\nu_e}{24\Delta_e}\begin{bmatrix} 6(b_1^2+c_1^2) & 6(b_1b_2+c_1c_2) & 6(b_1b_3+c_1c_3) & -2(b_1^2+c_1^2) & -2(b_1b_2+c_1c_2) & -2(b_1b_3+c_1c_3) \\ & 6(b_2^2+c_2^2) & 6(b_2b_3+c_2c_3) & -2(b_1b_2+c_1c_2) & -2(b_2^2+c_2^2) & -2(b_2b_3+c_2c_3) \\ & & 6(b_3^2+c_3^2) & -2(b_1b_3+c_1c_3) & -2(b_2b_3+c_2c_3) & -2(b_3^2+c_3^2) \\ & & & (b_1^2+c_1^2-b_2b_3-c_2c_3) & (b_1b_2+c_1c_2) & (b_1b_3+c_1c_3) \\ & \text{对} & \text{称} & & (b_2^2+c_2^2-b_1b_3-c_1c_3) & (b_2b_3+c_2c_3) \\ & & & & & (b_3^2+c_3^2-b_1b_2-c_1c_2) \end{bmatrix} \tag{C-18}$$

$$\mathbf{f}^e = \frac{1}{3}J_z\Delta_e\left[1\ 1\ 1\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right]^T + \frac{1}{2}qL_e\left[0\ 1\ 1\ \frac{1}{3}\ 0\ 0\right]^T \tag{C-19}$$

式中 L_e 表示单元在第二类边界 Γ_2 上的边长；对于内部单元和第一类边界，$L_e=0$.

总体合成 把各个单元的贡献叠加，可得总体方程

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}' = \mathbf{F} \tag{C-20}$$

式中 $\mathbf{u}'$ 为总体叠层系数列向量；$\mathbf{K}$ 为总体系数矩阵；$\mathbf{F}$ 为总体右端项列向量.

叠层系数与 L 型元插值系数间的线性变换 在步骤(3)中，需要把第一类边界单元上的节点值变换为相应的形式节点上的叠层系数值；在步骤(5)中需要把所有形式节点上的叠层系数值变换为 L 型元上相应的节点值. 为此需要用到 u^e 和 u'^e 之间的线性变换. 对于 $p=2$，研究表明：

$$\left.\begin{aligned} u_i'^e &= u_i^e, \quad i=1,2,3 \\ u_4'^e &= -2(u_2^e+u_3^e-2u_4^e) \\ u_5'^e &= -2(u_1^e+u_3^e-2u_5^e) \\ u_6'^e &= -2(u_1^e+u_2^e-2u_6^e) \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} u_i^e &= u_i'^e, \quad i=1,2,3 \\ u_4^e &= \frac{1}{4}(2u_2'^e+2u_3'^e+u_4'^e) \\ u_5^e &= \frac{1}{4}(2u_1'^e+2u_3'^e+u_5'^e) \\ u_6^e &= \frac{1}{4}(2u_2'^e+2u_1'^e+u_6'^e) \end{aligned}\right\} \tag{C-21}$$

主节点处的磁感强度 三个主节点处的磁感强度应为

$$
\left.\begin{aligned}
B_{x1}&=\frac{1}{2\Delta_e}(c_1u_1'^e+c_2u_2'^e+c_3u_3'^e+c_3u_5'^e+c_2u_6'^e)\\
B_{y1}&=-\frac{1}{2\Delta_e}(b_1u_1'^e+b_2u_2'^e+b_3u_3'^e+b_3u_5'^e+b_2u_6'^e)\\
B_{x2}&=\frac{1}{2\Delta_e}(c_1u_1'^e+c_2u_2'^e+c_3u_3'^e+c_3u_4'^e+c_1u_6'^e)\\
B_{y2}&=-\frac{1}{2\Delta_e}(b_1u_1'^e+b_2u_2'^e+b_3u_3'^e+b_3u_4'^e+b_1u_6'^e)\\
B_{x3}&=\frac{1}{2\Delta_e}(c_1u_1'^e+c_2u_2'^e+c_3u_3'^e+c_2u_4'^e+c_1u_5'^e)\\
B_{y3}&=-\frac{1}{2\Delta_e}(b_1u_1'^e+b_2u_2'^e+b_3u_3'^e+b_2u_4'^e+b_1u_5'^e)
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(C-22)}
$$

(四)采用三阶叠层元时,准泊松方程混合边值问题的离散格式

对于 $p=3$ 的情况,经计算可知,单元系数阵 $\mathbf{k}^e$ 见第 438 页式(C-23),单元右端项列向量 $\mathbf{f}^e$ 为

$$
\mathbf{f}^e=\frac{1}{3}J_z\Delta_e\left[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \frac{21}{20}\right]^T+\frac{1}{2}qL_e\left[0\ 1\ 1\ \frac{1}{3}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right]^T\qquad\text{(C-24)}
$$

$\mathbf{u}'^e$ 与 $\mathbf{u}^e$ 之间的线性变换为:

$$
\left.\begin{aligned}
&u_i'^e=u_i^e,\qquad i=1,2,3\\
&u_4'^e=\frac{9}{4}(-u_2^e-u_3^e+u_4^e+u_7^e),\\
&u_5'^e=\frac{9}{4}(-u_1^e-u_3^e+u_5^e+u_8^e),\\
&u_6'^e=\frac{9}{4}(-u_1^e-u_2^e+u_6^e+u_9^e),\\
&(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u_7'^e=\frac{9}{4}(-u_2^e+u_3^e+3u_4^e-3u_7^e),\\
&(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u_8'^e=\frac{9}{4}(u_1^e-u_3^e+3u_5^e-3u_8^e),\\
&(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u_9'^e=\frac{9}{4}(-u_1^e+u_2^e+3u_6^e-3u_9^e),\\
&u_{10}'^e=\frac{9}{2}(u_1^e+u_2^e+u_3^e)-\frac{27}{4}(u_4^e+u_5^e+u_6^e+u_7^e+u_8^e+u_9^e)+27u_{10}^e
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&u_i^e=u_i'^e,\qquad i=1,2,3\\
&u_4^e=\frac{2}{3}u_2'^e+\frac{1}{3}u_3'^e+\frac{2}{9}u_4'^e+\frac{2}{27}(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u_7'^e\\
&u_5^e=\frac{1}{3}u_1'^e+\frac{2}{3}u_3'^e+\frac{2}{9}u_5'^e+\frac{2}{27}(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u_8'^e\\
&u_6^e=\frac{2}{3}u_1'^e+\frac{1}{3}u_2'^e+\frac{2}{9}u_6'^e+\frac{2}{27}(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u_9'^e\\
&u_7^e=\frac{1}{3}u_2'^e+\frac{2}{3}u_2'^e+\frac{2}{9}u_4'^e-\frac{2}{27}(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u_7'^e
\end{aligned}\right\}
$$

$$\mathbf{k}'=\frac{\nu_e}{360\Delta_e}$$

$$\times\begin{bmatrix}
90(b_1^2+c_1^2) & 90(b_1b_2+c_1c_2) & 90(b_3b_1+c_3c_1) & -30(b_1^2+c_1^2) & -30(b_1b_2+c_1c_2) & -30(b_3b_1+c_3c_1) & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & 90(b_2^2+c_2^2) & 90(b_2b_3+c_2c_3) & -30(b_1b_2+c_1c_2) & -30(b_2^2+c_2^2) & -30(b_2b_3+c_2c_3) & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & 90(b_3^2+c_3^2) & -30(b_3b_1+c_3c_1) & -30(b_2b_3+c_2c_3) & -30(b_3^2+c_3^2) & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & 15(b_1^2+c_1^2\\-b_2b_3-c_2c_3) & 15(b_1b_2+c_1c_2) & 15(b_3b_1+c_3c_1) & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\3(b_1B_{23}+c_1(\ \) & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\[-3(b_2^2+c_2^2)] & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\3(b_3^2+c_3^2) & -3(b_2b_3+c_2c_3)\\
 & & & 15(b_2^2+c_2^2\\-b_1b_3-c_1c_3) & 15(b_2b_3+c_2c_3) & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\3(b_1^2+c_1^2) & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\3(b_2B_{31}+c_2C_{31}) & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\[-3(b_3^2+c_3^2)] & -3(b_3b_1+c_3c_1)\\
 & & & & 15(b_3^2+c_3^2\\b_2-c_1c_2) & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\[-3(b_1^2+c_1^2)] & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\3(b_2^2+c_2^2) & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\3(b_3B_{12}+c_3C_{12}) & -3(b_1b_2+c_1c_2)\\
 & & & & & 4(b_1^2+c_1^2)\\-6(b_2b_3+c_2c_3) & (\mathrm{Sign}_7S_i)(\mathrm{Sign}_8S_i)\\[-2(b_1b_2+c_1c_2)] & (\mathrm{Sign}_7S_i)(\mathrm{Sign}_9S_i)\\[-2(b_3b_1+c_3c_1)] & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\(b_1B_{23}+c_1C_{23})\\
 & & & & & & 4(b_2^2+c_2^2)\\-6(b_3b_1+c_3c_1) & (\mathrm{Sign}_8S_i)(\mathrm{Sign}_9S_i)\\[-2(b_2b_3+c_2c_3)] & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\(b_2B_{31}+c_2C_{31})\\
 & & & & & & & 4(b_3^2+c_3^2)\\-6(b_1b_2+c_1c_2) & (\mathrm{Sign}S_i)\cdot\\(b_3B_{12}+c_3C_{12})\\
 & & & & & & & & (b_1^2+c_1^2\\-b_2b_3-c_2c_3)
\end{bmatrix}\tag{C-23}$$

其中 $B_{ij}=b_i-b_j$，$C_{ij}=c_i-c_j$。

$$
\left.\begin{aligned}
u'_8 &= \frac{2}{3}u'_1 + \frac{1}{3}u'_3 + \frac{2}{9}u'_5 - \frac{2}{27}(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u'_8\\
u'_9 &= \frac{1}{3}u'_1 + \frac{2}{3}u'_2 + \frac{2}{9}u'_6 - \frac{2}{27}(\mathrm{Sign}S_i)\cdot u'_9\\
u'_{10} &= \frac{1}{3}(u'_1 + u'_2 + u'_3) + \frac{1}{9}(u'_4 + u'_5 + u'_6) + \frac{1}{27}u'_{10}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(C-25)}
$$

$p=3$ 时三个主节点处的磁感强度为

$$
\left.\begin{aligned}
B_{x1} &= \frac{1}{2\Delta_e}(c_1u'_1 + c_2u'_2 + c_3u'_3 + c_3u'_5 + c_2u'_6 - c_3u'_8 + c_2u'_9)\\
B_{y1} &= -\frac{1}{2\Delta_e}(b_1u'_1 + b_2u'_2 + b_3u'_3 + b_3u'_5 + b_2u'_6 - b_3u'_8 + b_2u'_9)\\
B_{x2} &= \frac{1}{2\Delta_e}(c_1u'_1 + c_2u'_2 + c_3u'_3 + c_3u'_4 + c_1u'_6 + c_3u'_7 - c_1u'_9)\\
B_{y2} &= -\frac{1}{2\Delta_e}(b_1u'_1 + b_2u'_2 + b_3u'_3 + b_3u'_4 + b_1u'_6 + b_3u'_7 - b_1u'_9)\\
B_{x3} &= \frac{1}{2\Delta_e}(c_1u'_1 + c_2u'_2 + c_3u'_3 + c_2u'_4 + c_1u'_5 - c_2u'_7 + c_1u'_8)\\
B_{y3} &= -\frac{1}{2\Delta_e}(b_1u'_1 + b_2u'_2 + b_3u'_3 + b_2u'_4 + b_1u'_5 - b_2u'_7 + b_1u'_8)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(C-26)}
$$

（五）叠层元的其他性质

除前述特点外，叠层元还有以下几个性质：

（1）在一定限制下，形式节点可取不同位置．例如交界边上的节点，只要相邻的两个局部节点（图 C-6 中的节点 4 和 7，5 和 8，…）取在同一位置即可；通常取在边中点处是为了方便．

（2）理论分析和实际计算证明（本附录文献 [6]），叠层三角元与同阶 L 型元的精度相同．

（3）对于恒定磁场的边值问题，用叠层三角元离散所得总体方程，其总体系数矩阵是对称、正定和稀疏的，但一般为非带状（本附录文献 [6]）．

（六）p 方式自适应过程的实施

p 方式的初始网格常取规则、均匀网格，然后根据加密指示因子进行判断，接着进行全局或局部 p 方式加密．p 方式的加密指示因子，既可用本附录文献 [1] 中介绍的式子，亦可用式(C-1)．

节点总体编号的次序是：在 $p=1$ 的基础上进行 $p=2$ 的加密时，所有 $p=1$ 的节点保持原来编号不变，接着对新增加的 $p=2$ 的节点编号；如果在此基础上又进行 $p=3$ 的加密，则保持原来 $p=1$ 和 $p=2$ 的节点编号不变，接着对新增加的 $p=3$ 的节点编号．由于叠层形状函数的结构特点，这样编号后，新的单元系数阵将以原来的单元系数阵作为左上角子矩阵经加边而成；新的总体系数阵亦是以原来的总体系数阵作为左上角子矩阵经加边而成，从而节约了许多计算时间．

对于低阶元和高阶元的联结，可以用图 C-7 的网格作为例子来说明．设加密前所有

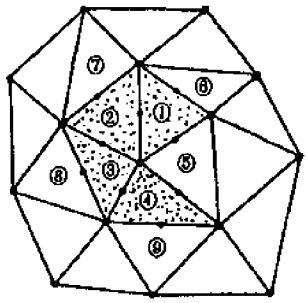


图 C-7 低阶元与高阶元的联结

的单元都是一阶元，局部加密后，单元①、②、③、④各增加三个节点而成为二阶元；这样，相邻单元中单元⑤有 5 个有效节点，单元⑥、⑦、⑧、⑨各有 4 个有效节点，周围其他单元仍保持为一阶元. 在总体合成时，单元系数阵中只有与有效节点相应的行和列有贡献. 具体来说，单元①—⑨的单元系数阵都是 6×6 的方阵；但单元⑤的系数阵中有一行、一列元素为零；单元⑥、⑦、⑧、⑨的系数阵中有两行、两列元素为零.

上面提到，对于恒定磁场问题，叠层元的总体系数阵是对称、正定、稀疏阵，因此通常用 ICCG 法或迭代法来解所形成的代数方程组.

C-4 h-p 方式自适应网格加密

在上面两节里，先后说明了 h 方式和 p 方式自适应网格加密. h 方式的优点是，在对场的分布一无所知的情况下，经过多次自适应加密，最终可以得到接近于最优网格的网格；此外，h 方式的总体误差估计亦较易计算. 但是，如果初始网格太疏，对于磁场变化比较剧烈的区域，自适应加密的次数要很多（例如 8—10 次），才能达到要求的精度；而每次加密后，都要经过笛朗耐过程和节点编号优化，从而使 CPU 时间过长. 如果初始网格较密但剖分不太合理，由于方程组的阶数较高，也会使自适应的 CPU 时间过长.

p 方式的主要优点是采用高阶插值. 计算表明，在原有网格上进行二次插值，要比用 h 方式细分一次的精度高. p 方式每次“加密”后，不必进行网格优化和节点重新编号；采用叠层元后还可进一步减少计算量. p 方式的缺点是，初始的疏网格常常不是较优网格；此外，如果仅在小部分区域内提高插值阶数，则对改进解的精度效果不太明显；最后，对于 $p\geqslant 3$ 的高阶叠层插值，要按单元进行符号处理，单元系数阵的计算和总体误差估计亦都比较复杂.

h-p 方式是吸取 h 方式和 p 方式两者的优点，将两者结合起来的一种方式；其基本思想是：在对场的分布一无所知的情况下，先使用 h 方式，经过几次（通常为 2—4 次）自适应加密，使改进后的网格其总体误差小于某规定值，然后转入 p 方式. 进入 p 方式后，网格不再变动，全部单元进行 $p=2$ 的叠层插值. 由于 p 方式的初始网格其误差分布已比较均匀，这预示着二阶叠层插值时，误差分布也将比较均匀.

计算表明，从 $p=1$ 提高到 $p=2$，精度提高较快；从 $p=2$ 到 $p=3$，精度提高稍慢. 对于多数工程问题，转入 p 方式且全部单元采用 $p=2$ 的叠层插值后，即可达到所需精度，使自适应过程结束. 对于精度要求较高的场合，可以进一步进行 $p=3$ 的局部或全局叠层插值，待精度达到要求后，再使自适应过程结束.

以变压器窗口内的漏磁场计算为例，对 h 方式和 h-p 方式进行比较. 这是一个泊松方程的混合边值问题. 图 C-8 (a) 表示初始网格，其总节点数 $N=48$，总单元数 $E=70$. 经过两次 h 方式(方式 2)加密，可得图 C-8(b)所示中间网格($N=134$，$E=238$). 再经过四

次 h 方式加密，可得图 C-8(c)所示最终网格($N=687, E=1322$). 表 C-1 列出了与解析解对比时，h 方式的局部误差和 CPU 时间；图 C-8(d)表示由最终网格算出的场图.

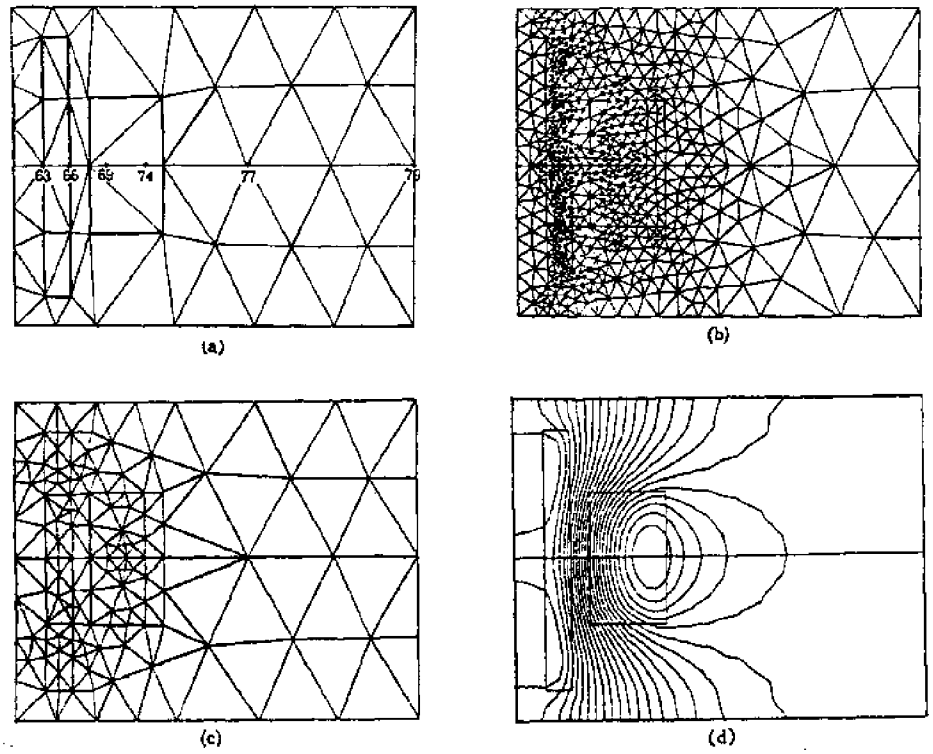


图 C-8　变压器窗口内的漏磁场计算

(a) 初始网格；(b) 中间网格；(c) h 方式的最终网格；(d) 漏磁场分布图

表 C-1　h 方式和 h-p 方式的比较

项目 / 方式 \ 节点号	A_z 的误差 (%)						CPU 时间 (Micro VAX-2 机)
	63	66	69	74	77	79	
h 方式	12.51	0.44	0.22	0.35	0.13	0.01	14′10″
h-p 方式	3.77	0.39	0.11	0.13	0.10	0.06	1′40″

如果从中间网格出发，转入 p 方式，并对全部单元进行二阶叠层插值，可得 h-p 方式. 表 C-1 同时列出了 h-p 方式的局部误差和 CPU 时间.

由于 h-p 方式吸收了 p 方式中使用高阶插值的优点，加上转入 p 方式时初始网格较好，又省去了 p 方式中误差指示因子的计算和逐个单元的判断，因此在同样精度下，h-p 方式比单纯的 h 方式或单纯的 p 方式的 CPU 时间要省. 总之，h-p 方式是一种简单、有效，可以较快地达到所需精度的有限元的自适应过程.

C-5 后验误差估计

对于二维恒定磁场问题，通过对一系列具有解析解的模型题进行计算，得到总体实际误差 ε 与总体估计误差 C [由式 (C3-7) 算出] 之间具有如下关系 (本附录文献 [7]).

对 h 方式：

(1) 当 $10\%<C\leqslant 20\%$ 时，实际误差 ε_1 为

$$\varepsilon_1=(0.86\pm 0.18)C \tag{C-27}$$

(2) 当 $C\leqslant 10\%$ 时，ε_1 为

$$\varepsilon_1=(0.77\pm 0.09)C \tag{C-28}$$

式(C-27)和(C-28)右端括号内第一个数字表示平均值；第二个数字表示变动范围. 这样，对于无法找到解析解的工程实际问题，通过算出估计误差 C，由式(C-27)和(C-28)即可算出实际误差 ε_1 的值.

对 h-p 方式：

(1) 当 $10\%<\varepsilon_1\leqslant 20\%$ 时，升为二阶元后的实际误差 ε_2 为

$$\varepsilon_2=(0.072\pm 0.048)\varepsilon_1 \tag{C-29}$$

(2) 当 $\varepsilon_1\leqslant 10\%$ 时，有

$$\varepsilon_2=(0.045\pm 0.037)\varepsilon_1 \tag{C-30}$$

式中 ε_1 表示升阶前 h 方式的实际误差；ε_2 表示全部单元升为二阶元时的实际误差. 这样，先由 C 算出 ε_1，再由 ε_1 即可得到 ε_2.

参 考 文 献

[1] I. Babuška, O. C. Zienkiewicz, J. Gago and E. R. de A. Oliveira, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, John Wiley & Sons, 1986.

[2] Song-Yop Hahn, C. Calmels, G. Meunier and J. L. Coulomb, A Posteriori Error Estimate for Adaptive Finite Element Mesh Generation, IEEE Trans. on MAG, 1988, No. 1.

[3] 吴海容、梁艳萍、恒定磁场有限元计算的后验误差估计，哈尔滨电工学院学报，1993，No. 1.

[4] 范国祥、许善椿，有限元网格自动生成及自适应改进，哈尔滨电工学院学报，1992，No. 4.

[5] Wu Hairong, Liang Yanping and Tang Yungiu, Some Properties of Hierarchic Triangular Finite Elements, Electromagnetic Field Problems and Applications (Proc. ICEF'92), International Academic Publishers, 1993.

[6] 吴海容、梁艳萍，叠层三角元的结构，电工数学进展（第四届全国电工数学学术年会论文集），万国学术出版社，1993.

[7] 汤蕴璆等，用基于叠层元的 h-p 方式自适应有限元计算磁场问题(Ⅰ)、(Ⅱ)，哈尔滨电工学院学报，1994，No. 2 和 No. 4.

附录 D　线性代数方程组的数值解法.

本附录将介绍求解线性代数方程组的几种常用的直接解法和迭代解法.

D-1　高斯消去法

对于含有 n 个未知数的线性代数方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{D-1}$$

用矩阵表示时有

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{D-2}$$

式中 $\mathbf{x}$ 为未知数的列向量；$\mathbf{A}$ 为方程组的系数矩阵；$\mathbf{b}$ 为右端项列向量. 若方程组(D-1)的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 是非奇异的，则一定存在唯一解.

高斯消去法是求解系数矩阵为稠密矩阵的线性代数方程组的一种基本和有效的方法. 高斯消去法以系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的三角形化为基础，即经过 $n-1$ 步消元，把方程组(D-1)变成系数矩阵为上三角阵的等价(即具有相同解)的三角形方程组，然后从下而上回代，求解三角形方程组；前一过程称为消元过程，后一过程称为回代过程.

(一) 消元过程

为讨论方便起见，把式(D-1)改写成

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \cdots\cdots & \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{D-3}$$

用矩阵表示时有

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \tag{D-4}$$

其中 $\mathbf{A}^{(1)}$ 为 n 阶方阵；$\mathbf{b}^{(1)}$ 为 n 维列向量；

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \tag{D-5}$$

第一步消元就是从式(D-3)中后面的 $n-1$ 个方程中消去未知数 x_1，为此需使 $\mathbf{A}^{(1)}$ 中第一列的第 2 至第 n 个元素变换为 0. 设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$，用 $a_{11}^{(1)}$ 除以第一列其余元素 $a_{i1}^{(1)}$ 的值，得到 $a_{i1}^{(2)}$，然后用第 i 行 ($i=2, 3, \cdots, n$) 的元素减去第一行各相应元素的 $a_{i1}^{(2)}$ 倍 ($i=2,$

3，…，n)，同时对右端列向量的分量 $b_i^{(1)}$ 也作相应的运算；即

$$\left.\begin{aligned} a_{i1}^{(2)} &= \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \qquad i = 2,3,\cdots,n \\ a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - a_{i1}^{(2)}a_{1j}^{(1)} \\ &= a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}a_{1j}^{(1)}, \qquad i,j = 2,3,\cdots,n \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - a_{i1}^{(2)}b_1^{(1)} \\ &= b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}b_1^{(1)}, \qquad i = 2,3,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{D-6}$$

这样，经过第一步消元，$\mathbf{A}^{(1)}$和 $\mathbf{b}^{(1)}$就变成 $\mathbf{A}^{(2)}$和 $\mathbf{b}^{(2)}$；

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix} \tag{D-7}$$

这时(D-1)就变成下列等价方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots & \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{D-8}$$

用矩阵表示时有

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} \tag{D-9}$$

如果 $a_{11}^{(1)}=0$，则一定存在 $a_{i1}^{(1)}\neq 0$，这时可把第 i 个方程与第一个方程对换，再进行上述计算.

类似地，从式 (D-8) 出发，进行第二步消元，以消去式(D-8)中后面 $n-2$ 个方程中的 x_2. 设 $a_{22}^{(2)}\neq 0$，用 $a_{22}^{(2)}$去除第 2 列的各个元素 $a_{i2}^{(2)}$ ($i=3$，4，…，n)，得到 $a_{i2}^{(3)}$，然后用第 i 行 ($i=3$，4，…，n) 的各个元素减去第 2 行中相应元素的 $a_{i2}^{(3)}$倍，对右端列向量 $\mathbf{b}^{(2)}$的各分量 $b_i^{(2)}$ ($i=3$，4，…，n) 也作类似处理；即

$$\left.\begin{aligned} a_{i2}^{(3)} &= \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \qquad i = 3,4,\cdots,n \\ a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(2)} - a_{i2}^{(3)}a_{2j}^{(2)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}a_{ij}^{(2)}, \qquad i,j = 3,4,\cdots,n \\ b_i^{(3)} &= b_i^{(2)} - a_{i2}^{(3)}b_2^{(2)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}b_2^{(2)}, \qquad i = 3,4,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{D-10}$$

于是矩阵 $\mathbf{A}^{(2)}$和列向量 $\mathbf{b}^{(2)}$将化为 $\mathbf{A}^{(3)}$和 $\mathbf{b}^{(3)}$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(3)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{bmatrix} \tag{D-11}$$

此时方程组（D-8）将化为下列等价方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \\ \cdots\cdots & \\ a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n &= b_n^{(3)} \end{aligned}\right\} \tag{D-12}$$

用矩阵表示时有

$$\mathbf{A}^{(3)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(3)} \tag{D-13}$$

如此继续下去，经过 $n-1$ 步消元后，原系数矩阵 $\mathbf{A}^{(1)}$ 便化成上三角矩阵 $\mathbf{A}^{n}$，右端列向量 $\mathbf{b}^{(1)}$ 也相应地变成 $\mathbf{b}^{(n)}$，

$$\mathbf{A}^{n} = \left.\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & \vdots & & \\ & \mathbf{0} & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathbf{b}^{(n)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \tag{D-14}$$

原方程组(D-1)将化成如下的等价三角形方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots & \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n &= b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}\right\} \tag{D-15}$$

用矩阵表示时有

$$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)} \tag{D-16}$$

由原来的方程组(D-1)得出等价的上三角方程组(D-15)的过程，就称为消元过程. 消元过程的计算公式可归纳为：对 $k=1, 2, \cdots, n-1$，递推地计算下列各量

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}^{(k+1)} &= \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad i = k+1, k+2, \cdots, n \\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k+1)}a_{kj}^{(k)} \qquad i, j = k+1, k+2, \cdots, n \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k+1)}b_k^{(k)} \qquad i = k+1, k+2, \cdots, n \end{aligned}\right\} \tag{D-17}$$

（二）回代过程

把消元结束后所得的上三角方程组（D-15）改写为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots & \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{D-18}$$

上式中的系数 a_{ij} 和 b_i，表面上与式(D-1)中一样，但其数值已经改变. 这样由最末一个方程即可算出 $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$；将它代入第 $n-1$ 个方程，可得 $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$. 如此逐个方程

由下而上递推，即可求得 x_n，x_{n-1}，…，x_1，这个过程称为回代过程. 回代时的计算公式可归纳为

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \qquad i = n, n-1, \cdots, 1 \tag{D-19}$$

其中规定 $\sum_{j=n+1}^{n} a_{ij}x_j = 0$.

在消元中，用作除数的元素 $a_{kk}^{(k)}$称为第 k 个主元素. 若主元素 $a_{kk}^{(k)}=0$，消元过程将无法进行下去；若 $a_{kk}^{(k)}$是一个接近于零的小数，由于计算中的舍入误差等因素，最终亦会使方程组的解失真. 为克服这一缺点，可把各方程中要消去的那个未知数（例如 x_k）的系数中，按模选择其最大者（例如是第 i_k 个方程）作为主元素，然后将第 i_k 个方程与第 k 个方程交换位置，再进行消元.

D-2 乔列斯基法

对于具有对称正定系数矩阵 **A** 的线性代数方程组，用乔列斯基法来求解比高斯消去法可节省一半运算量和存储量，而且无需选主元素，解的精度也较高，所以乔列斯基法是求解这类方程组的一种有效方法.

（一）乔列斯基分解

设 **A** 为对称正定矩阵，**U** 为单位上三角阵，**D** 为非奇异的对角线矩阵，**L** 为单位下三角阵；则总可以把 **A** 分解为 **L**、**D** 和 **U** 三个矩阵的乘积，即

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU} \tag{D-20}$$

这种分解称为 **A** 的 LDU 分解.

定理 D-1 n 阶矩阵 **A** 有唯一的 LDU 分解的充要条件是，**A** 的各阶主子矩阵 $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，…，$\mathbf{A}_k$ 都是非奇异阵.

证明从略.

设方程组（D-1）的系数矩阵 **A** 是 n 阶对称正定矩阵，由于 **A** 是正定的，所以它的各阶主子行列式 $\det\mathbf{A}_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）都大于零，根据定理（D-1）可知，**A** 存在唯一的 LDU 分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$$

因为 **A** 是对称的，$\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$，故有

$$\mathbf{LDU} = (\mathbf{LDU})^T = \mathbf{U}^T\mathbf{D}^T\mathbf{L}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$

由于分解是唯一的，所以

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{L}, \qquad \mathbf{L}^T = \mathbf{U}$$

由此，这种分解的形式必然为

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T \tag{D-21}$$

由于 **A** 是正定的，故其左上角主子阵都是正定的，对等式

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{D}_k\mathbf{L}_k^T$$

两端求行列式，可知 **D** 的对角线元素都是正数. 于是

$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(d_1^{\frac{1}{2}} d_2^{\frac{1}{2}} \cdots d_n^{\frac{1}{2}})$$

而

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^T = (\mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})(\mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^T = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^T \tag{D-22}$$

式中 $\mathbf{L}_1$ 为下三角矩阵，$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$；$\mathbf{L}_1^T$ 为上三角阵；

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & \mathbf{0} & \\ & \cdots\cdots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \tag{D-23}$$

式 (D-22) 就是对称正定矩阵 **A** 的乔列斯基分解（在不致混淆的情况下，可省略 $\mathbf{L}_1$ 的下标，仍记为 **L**）.

$\mathbf{L}_1$ 中的各个元素，可根据矩阵乘法和式(D-22)两端对应元素应当相等的原则来确定. 当 $i>j$ 时，有

$$\begin{aligned} a_{ij} &= l_{i1}l_{1j}^T + l_{i2}l_{2j}^T + \cdots + l_{ij}l_{jj}^T \\ &= l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + \cdots + l_{ij}l_{jj} \end{aligned} \tag{D-24}$$

当 $i=j$ 时，有

$$a_{ii} = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \cdots + l_{ii}^2 \tag{D-25}$$

从而可以导出 l_{ij} 的递推公式为：对 $i=1, 2, \cdots, n$ 进行下列计算

$$\left.\begin{aligned} l_{ij} &= \Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}\Big) \Big/ l_{jj}, \qquad j = 1,2,\cdots,j-1 \\ l_{ii} &= \Big(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{D-26}$$

整个计算仅需计算 $\mathbf{L}_1$ 阵的下三角部分，上三角部分的元素为零；计算中仅用到 **A** 阵的下三角部分的元素 $a_{ij}(i \geqslant j)$.

（二）对称正定线性代数方程组的乔列斯基解法

对系数矩阵 **A** 进行乔列斯基分解后，方程组(D-1)就化为

$$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{D-27}$$

如果令

$$\mathbf{L}_1^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{D-28}$$

则方程组(D-1)的求解就归结为等价的两个三角形方程组的求解：

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{L}_1\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{L}_1^T\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}\right\} \tag{D-29}$$

这种解法就称为乔列斯基法或平方根法.

对于 $\mathbf{L}_1\mathbf{y}=\mathbf{b}$，可从前向后逐次求出 **y** 的各个分量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，其计算公式为

$$y_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j\right) \Big/ l_{ii}, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{D-30}$$

其中规定 $\sum_{j=1}^{0} l_{ij} y_j = 0$.

将求出的 $\mathbf{y}$ 代入 $\mathbf{L}_1^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$，然后由后向前逐次求解 $\mathbf{x}$ 的各个分量 x_n，x_{n-1}，…，x_1，计算公式为

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j\right) \Big/ l_{ii}, \qquad i = n, n-1, \cdots, 1 \tag{D-31}$$

其中规定 $\sum_{j=n+1}^{n} l_{ji} x_j = 0$.

（三）对称正定矩阵的 LDL^T 分解

在乔列斯基分解中，计算下三角矩阵 $\mathbf{L}_1$ 的元素时，要进行 n 次开方运算，这样将增加不少计算量，精度亦稍差. 为避免开方运算，可对乔列斯基分解作如下修改.

把下三角矩阵 $\mathbf{L}_1$ 改写成乘积形式

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}\ \mathrm{diag}(L_{ii}) \tag{D-32}$$

其中 $\mathrm{diag}(L_{ii})$ 表示由 $\mathbf{L}_1$ 的主对角线元素 l_{ii} ($i=1, 2, \cdots, n$) 所构成的对角线矩阵；$\mathbf{L}$ 为单位下三角阵；于是可得乔列斯基分解的修改形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T = \mathbf{L}\ \mathrm{diag}(L_{ii})\ \mathrm{diag}(L_{ii})\ \mathbf{L}^T \\ &= \mathbf{L}\ \mathrm{diag}(L_{ii}^2)\ \mathbf{L}^T = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \end{aligned} \tag{D-33}$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \mathbf{0} \\ & & \vdots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{D-34}$$

$\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{D}$ 中的元素，可对式(D-33)的右端进行矩阵乘法，并令其等于 $\mathbf{A}$ 中的相应元素来确定：

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} d_k l_{jk}, \qquad a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} d_k l_{ik} \tag{D-35}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} l_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}\right) \Big/ d_j, && \begin{matrix} i = 1,2,\cdots,n \\ j = 1,2,\cdots,i-1 \end{matrix} \\ d_i &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k l_{ik}^2, && i = 1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{D-36}$$

为节省计算次数，可引进辅助量 $\bar{a}_{ij} = l_{ij} d_j$，则

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{a}_{ik} l_{jk}, \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\cdots,n \\ j = 1,2,\cdots,i-1 \end{matrix} \tag{D-37}$$

按行依次确定 $\bar{a}_{ij}$，则式(D-36)可化为

$$\left.\begin{aligned} d_i &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{a}_{ik} l_{ik}, \qquad i = 1,2,\cdots,n \\ l_{ij} &= \bar{a}_{ij}/d_j, \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\cdots,n \\ j = 1,2,\cdots,i-1 \end{matrix} \end{aligned}\right\} \tag{D-38}$$

这里，在计算 **L** 的第 i 行元素时，只用到 $\bar{a}_{ik}$（$k=1$，$2\cdots$，$i-1$），前面的 $\bar{a}_{pc}$（$p<i$）不再需要参与计算，这样仅需增加 $n-1$ 个工作单元保存 $\bar{a}_{ij}$就可以.

（四）对称正定线性代数方程组的 LDL^T 解法

在得到 **A** 的 LDL^T 分解后，方程组(D-1)可改写成

$$\mathbf{LDL^Tx = b} \tag{D-39}$$

如令 $\mathbf{y=DL^Tx}$，则有

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Ly} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{L^Tx} &= \mathbf{D^{-1}y} \end{aligned}\right\} \tag{D-40}$$

由上式的第一式，可从前向后逐次算出 y_1，y_2，$\cdots$，y_n，其中

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{D-41}$$

上式中规定 $\sum_{j=1}^{0} l_{ij}\, y_j = 0$. 然后计算向量 $\mathbf{D^{-1}y}$ 的各个分量

$$(\mathbf{D^{-1}y})_i = \frac{y_i}{d_i} \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{D-42}$$

最后解上三角形方程 $\mathbf{L^Tx=D^{-1}y}$. 此时有

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}^T x_j = \frac{y_i}{d_i} \tag{D-43}$$

由于 $l_{ij}^T = l_{ji}$，$l_{ii}=1$，故得

$$x_i = \frac{y_i}{d_i} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j \qquad i = n, n-1,\cdots,1 \tag{D-44}$$

其中规定 $\sum_{j=n+1}^{n} l_{ji} x_j = 0$. 这样从后向前，即可逐次求出 x_n，x_{n-1}，$\cdots$，x_1.

D-3 共轭梯度法

系数矩阵为对称正定的线性代数方程组，还可以用共轭梯度法和预条件共轭梯度法来求解. 先说明共轭梯度法.

（一）实内积，对称正定矩阵的谱条件数

在 $\mathbf{R}^n$ 上定义一个 **x** 和 **y** 的二元实函数，记为 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$，如果它满足下述三条性质，则称 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个实内积：

$$\left.\begin{aligned} &\text{(1) 正定性} \quad (\mathbf{x},\mathbf{x}) \geqslant 0，\text{等号当且仅当 } \mathbf{x}=0 \text{ 时成立.} \\ &\text{(2) 对称性} \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x}) \\ &\text{(3) 对第二变元线性} \quad (\mathbf{x},\alpha_1\mathbf{y}_1+\beta\mathbf{y}_2)=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)+\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}_2) \end{aligned}\right\} \tag{D-45}$$

由于对称性，故内积对第一变元也具有线性性质.

如果在 $\mathbf{R}^n$ 上定义

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \triangleq \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{D-46}$$

容易验证，按上式定义的$(\mathbf{x},\mathbf{y})$满足内积应具有的三条性质，我们称它为 $\mathbf{R}^n$ 上的通常内积. 一般如不加声明，$(\mathbf{x},\mathbf{y})$就是指通常内积. 若 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 满足$(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$，则称 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 正交.

对于任一 n 阶实方阵 $\mathbf{A}$，不难验证

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{A}^T\mathbf{y}) \tag{D-47}$$

当 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵时，上式成为

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{Ay}) \tag{D-48}$$

以下着重考虑 $\mathbf{A}$ 为 n 阶对称正定矩阵时的情形.

首先，若定义 A-内积为

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})_A \triangleq (\mathbf{Ax},\mathbf{y}) \tag{D-49}$$

容易验证，$(\mathbf{x},\mathbf{y})_A$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个内积. 由于内积 $(\mathbf{x},\mathbf{y})_A$ 的正定性，可定义 A-范数 $\|\mathbf{x}\|_A$ 为

$$\|\mathbf{x}\|_A^2 \triangleq (\mathbf{Ax},\mathbf{x}) \tag{D-50}$$

若 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 满足 $(\mathbf{x},\mathbf{y})_A=0$，称为 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ A-正交或 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}A$-共轭；在不致混淆的情况下，也称 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 共轭.

其次，从谱条件数的定义可知，对称正定矩阵 $\mathbf{A}$ 的谱条件数 C_A（有时也简称为 $\mathbf{A}$ 的条件数）为 $\mathbf{A}$ 的最大与最小特征值之比；即

$$C_A = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \tag{D-51}$$

显然 $C_A \geqslant 1$.

（二）等价极小问题

定理 D-2 向量 $\tilde{\mathbf{x}}$是对称正定线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{D-52}$$

的解的充要条件是，$\tilde{\mathbf{x}}$是下述二次函数 $F(\mathbf{x})$取极小问题的解，

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) - (\mathbf{b},\mathbf{x}) = \min \tag{D-53}$$

即

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \min \tag{D-54}$$

证明 记方程 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的精确解为 $\tilde{\mathbf{x}}$，则

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) - (\mathbf{b},\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}[(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) - (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}) - (\mathbf{Ax},\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}[(\mathbf{A}(\mathbf{x}-\tilde{x}),x-\tilde{\mathbf{x}}) - (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{x}})] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}[\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|_{\mathbf{A}}^2 - \| \mathbf{x} \|_{\mathbf{A}}^2] \tag{D-55}$$

显然，当且仅当 $\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}$时，$F(\mathbf{x})$达到极小值，由此定理得证.

定理 D-2 也说明，使 $F(\mathbf{x})$取极小值的解是唯一的，故 $F(\mathbf{x})$的稳定点唯一. 我们也可以通过使 grad $F(\mathbf{x})=0$ 确定此解. 事实上，从式(D-54)有

$$\frac{\partial F}{\partial x_m} = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j - b_m \qquad m = 1,2,\cdots,n \tag{D-56}$$

即

$$\text{grad } F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \tag{D-57}$$

若余向量为 $\mathbf{r}$，

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{D-58}$$

则

$$-\text{grad}F(\mathbf{x}) = \mathbf{r} \tag{D-59}$$

因此，grad $F(\mathbf{x})=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}$成立时.

（三）共轭梯度法

共轭梯度法（CG 法）正是根据定理 D-2，使 $F(\mathbf{x})$的值随着迭代过程的进行而单调下降，最后求得方程(D-52)的解. 具体方法如下.

从任意的初始解向量 $\mathbf{x}_0$ 出发，依次沿方向向量 $\mathbf{p}_0$，$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$，…对原先的解向量 $\mathbf{x}_k$ 不断进行修正，以得到新的解向量 $\mathbf{x}_{k+1}$；即使

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{D-60}$$

其中 α_k 为实标量. 由式(D-58)知，余向量 $\mathbf{r}_{k+1}$为

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k \qquad k = 0,1,2, \tag{D-61}$$

式(D-60)中 α_k 的选取，应使在第 k 步迭代完成后，从 $\mathbf{x}_k$ 出发构成 $\mathbf{x}_{k+1}$的一维搜索中，$F(\mathbf{x}_{k+1})$达到极小值；使得随着迭代过程的进行，$F(\mathbf{x})$的值逐次下降. 由式 (D-53)、(D-60)，并利用式 (D-57)，可得

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_{k+1}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k), \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) - (\mathbf{b}, \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) \\ &= F(\mathbf{x}_k) + \alpha_k[(\mathbf{A}\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k) - (\mathbf{b}, \mathbf{p}_k)] + \frac{1}{2}\alpha_k^2(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k) \\ &= F(\mathbf{x}_k) - \alpha_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k) + \frac{1}{2}\alpha_k^2(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k) \end{aligned} \tag{D-62}$$

于是

$$\frac{dF(\mathbf{x}_{k+1})}{d\alpha_k} = \alpha_k(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k) - (\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k) \tag{D-63}$$

$$\frac{d^2F(\mathbf{x}_{k+1})}{d\alpha_k^2} = (\mathbf{p}_k, \mathbf{A}_k) \tag{D-64}$$

因为 $(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k) > 0$，故使 $F(\mathbf{x}_{k+1})$取稳定值的 α_k，必使 $F(\mathbf{x}_{k+1})$取极小值；由式 (D-63) 可知，此 α_k 为

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)} \tag{D-65}$$

由式(D-62)可知，对此 α_k，有

$$\Delta F = F(\mathbf{x}_{k+1}) - F(\mathbf{x}_k) = -\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{r}_k,\mathbf{p}_k)^2}{(\mathbf{p}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_k)}$$

上式表明，$F(\mathbf{x})$的值确实随迭代过程的进行而单调下降.

接下去的重要问题是，方向向量系 $\{\mathbf{p}_k\}$ 怎样产生. 定理 D-2 的证明过程提示，$\{\mathbf{p}_k\}$ 应形成 A-共轭向量系；即要求

$$(\mathbf{p}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_l) = (\mathbf{A}\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_l) = 0 \qquad k \neq l \tag{D-66}$$

另外，原来还有

$$(\mathbf{p}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_k) > 0 \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{D-67}$$

设 $\mathbf{p}_{k+1}$是 $\mathbf{r}_{k+1}$和 $\mathbf{p}_k$ 的线性组合，不妨取

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\mathbf{p}_k \tag{D-68}$$

把上式对 $\mathbf{A}\mathbf{p}_k$ 作内积，得

$$(\mathbf{p}_{k+1},\mathbf{A}\mathbf{p}_k) = (\mathbf{r}_{k+1},\mathbf{A}\mathbf{p}_k) + \beta_k(\mathbf{p}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_k)$$

由 $\mathbf{p}_{k+1}$与 $\mathbf{p}_k$ 的 A-共轭性要求，便知 β_k 应取

$$\beta_k = -\frac{(\mathbf{r}_{k+1},\mathbf{A}\mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_k)} \tag{D-69}$$

至此，已得到CG法的基本计算公式. 下面将进一步导出 α_k 和 β_k 的其他表达形式，并证明向量系$\{\mathbf{r}_k\}$的正交性和$\{\mathbf{p}_k\}$的 A-共轭性，最后再给出CG法的全部公式.

(四) $\{\mathbf{r}_k\}$的正交性和$\{\mathbf{p}_k\}$的 A-共轭性

为得到 α_k 的其他形式，先证明两个辅助公式：

(1) $(\mathbf{r}_{k+1},\mathbf{p}_k)=0 \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ (D-70)

证明 利用式(D-61)和(D-65)，可知

$$(\mathbf{r}_{k+1},\mathbf{p}_k) = (\mathbf{r}_k,\mathbf{p}_k) - \alpha_k(\mathbf{A}\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_k) = 0$$

(2) $(\mathbf{r}_k,\mathbf{p}_k)=(\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_k) \qquad k=0,1,2,\cdots$ (D-71)

证明 对任取的初始向量 $\mathbf{x}_0$，可算出 $\mathbf{r}_0=\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_0$，只须取

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 \tag{D-72}$$

则式(D-71)对 $k=0$ 成立. 对 $k=1,2,\cdots$，利用式(D-68)和(D-70)，可得

$$(\mathbf{r}_k,\mathbf{p}_k) = (\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_k) + \beta_{k-1}(\mathbf{r}_k,\mathbf{p}_{k-1}) = (\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_k)$$

利用式 (D-71)，可得 α_k 的另一种表达形式，

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}_k,\mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_k)} = \frac{(\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_k)}{(\mathbf{p}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_k)} \tag{D-73}$$

定理 D-3 共轭梯度法中，$\{\mathbf{r}_k\}$ 形成正交向量系，$\{\mathbf{p}_k\}$ 则形成 A-共轭向量系.

证明 用归纳法可以证明，当 $k>0$ 时，有(证明从略)

$$\left.\begin{aligned}&(\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_l) = 0, \qquad \text{对 } 0 \leqslant l < k\\ &(\mathbf{A}\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_l) = (\mathbf{p}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_l) = 0, \qquad \text{对 } 0 \leqslant l < k\end{aligned}\right\} \tag{D-74}$$

由此定理 D-3 得证.

把式(D-61)代入(D-69)，并利用式(D-73)和$\{\mathbf{r}_k\}$是正交系这一性质，可得 β_k 的另一形式为

$$\beta_k = -\frac{(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)} = -\frac{(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k+1})}{\alpha_k(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)} = \frac{(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)} \tag{D-75}$$

（五）共轭梯度法的计算公式和收敛性

上面导出了CG法的全部计算公式. 归纳起来，用CG法求解n阶具有对称正定系数矩阵A的线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$时，步骤如下：

（1）任取初始向量$\mathbf{x}_0$，并计算$\mathbf{r}_0$，

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \tag{D-76}$$

再取$\mathbf{p}_0=\mathbf{r}_0$.

（2）对$k=0, 1, 2, \cdots$，计算下列各项，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)} = \frac{(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)} \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k \\ \beta_k &= -\frac{(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)} = \frac{(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)} \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k \end{aligned}\right\} \tag{D-77}$$

直到$\mathbf{r}_k$或$\mathbf{p}_k$为$\mathbf{0}$.

定理D-4 用CG法求解n阶具有对称正定系数矩阵的线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$时，最多计算n步，便可得到方程组的真解.

证明 在余向量列$\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\cdots$中，如果对某个$k$（$k<n$），出现$\mathbf{r}_k=0$，则在第$k$步即得到精确解；如果$\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_{n-1}$均为非零向量，则这$n$个向量为一线性无关系，与这$n$个向量都正交的$\mathbf{r}_n$必为零向量，从而最多$n$步即可得到精确解.

从定理D-4可知，CG法可在有限步内求得真解，所以从理论上看，它属于直接法；但是CG法的计算公式是一种迭代格式，所以它也具有通常迭代法的各种优点. 实际计算时，由于舍入误差的影响，有时不能在n步内完成，但是随着迭代过程的继续，总会得到一个合乎精度要求的近似解.

（六）对CG法收敛性的进一步讨论

进一步的理论研究表明，CG法收敛的快慢与系数矩阵A的特征值的分布有密切关系.

定理D-5 用CG法求解n阶对称正定线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$时，若A仅有m个相异的特征值，$m<n$，则CG法将在m步内收敛.

证明从略.

实际上，如果这m个相异的特征值聚集在p个点附近，$p<m$，且聚集程度足够好，则CG法在p步内就能得到较好的结果.

此外，CG法的收敛性与A的条件数C_A有下列关系：

$$\frac{\| \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}} \|_A}{\| \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}} \|_A} \leqslant 2\left[\frac{\sqrt{C_A}-1}{\sqrt{C_A}+1}\right]^k \tag{D-78}$$

上式的左端是第 k 次迭代的误差与初始误差的比值（按 A-范数而言）. 故条件数 C_A 越小（即 C_A 愈接近于 1），则 CG 法收敛就越快.

A-4 不完全乔利斯基分解-共轭梯度法

对椭圆型方程采用有限元法求数值解，常导致系数矩阵为大型、稀疏、对称正定阵的线性方程组的求解. 当方程的阶数很高，特别是系数矩阵 A 的条件数很大，特征值的分布较为分散、不是聚集在少数几个点周围时，直接用 CG 法来求解这类问题，收敛往往非常慢. 为加速收敛，近年来普遍采用预条件共轭梯度法.

（一）预条件共轭梯度法

设想一种极端情况，若系数矩阵 **A** 是单位矩阵 **I**，则 **A** 的所有特征值都等于 1，此时采用 CG 法求解，迭代一次就可以收敛. 事实上，若 $\mathbf{A}=\mathbf{I}$，原方程组成为 $\mathbf{Ix}=\mathbf{b}$；任取 $\mathbf{x}_0$，则 $\mathbf{r}_0=\mathbf{b}-\mathbf{x}_0$，取 $\mathbf{p}_0=\mathbf{r}_0$，则 $\alpha_0=\dfrac{(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_0)}=1$，于是 $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_0+\mathbf{r}_0=\mathbf{b}$.

对于一般的对称正定线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

要把系数矩阵化为单位矩阵，应将方程两边左乘 $\mathbf{A}^{-1}$；当方程组的阶数很高时，这将涉及计算 $\mathbf{A}^{-1}$ 的繁重工作量以及其他许多问题，因此实际工作中极少采用. 虽然如此，此设想却给予我们一个启示，计算精确的 $\mathbf{A}^{-1}$ 虽然不行，但是是否可以找到一个某种意义下 $\mathbf{A}^{-1}$ 的近似，利用它把原方程组变换成另一等价方程组

$$\mathbf{By} = \mathbf{d}$$

使得变换后的系数阵 **B** 成为非常近似于单位矩阵的对称正定阵，且其特征值大多聚集在 1 的附近，其条件数比原先大为降低. 这样，对变换后的方程组用 CG 法求解，就会很快收敛. 当然我们还希望，矩阵 **B** 仍能保持原先的稀疏性，且易于返回求得原问题的解.

将原方程组变换为等价的方程组，使得系数矩阵的特征值分布和条件数得到显著改善，这种技术称为预条件技术. 对于上述对称正定线性方程组，先用预条件技术进行处理，再用 CG 法求解，这种方法就称为预条件共轭梯度法（PCG 法）.

（二）不完全乔列斯基分解共轭梯度法

研究表明，利用矩阵的不完全（或近似）分解来实现预条件技术，是一个有效的方法. 若用对称正定矩阵的不完全乔列斯基分解来实现预条件技术，并与共轭梯度法连用，就称为不完全乔列斯基分解共轭梯度法（ICCG 法）.

设 **A** 为对称正定矩阵，将 **A** 进行乔列斯基分解，有

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^T \tag{D-79}$$

其中 $\mathbf{L}_1$ 为下三角矩阵. 若采用改进形式，则

$$\mathbf{A}=\mathbf{LDL}^T \tag{D-80}$$

其中 **D** 为对角矩阵. 式(D-79)和(D-80)是完全乔列斯基分解. 若 **A** 为大型稀疏矩阵，采用完全分解时，由于分解固有的计算格式，使 **A** 中的许多零元素在 $\mathbf{L}_1$ 中成为非零元素，从而使矩阵 $\mathbf{L}_1$ 失去了 **A** 原有的稀疏性；这一方面将使计算时间增加，另外也使存储量增大. 为克服上述缺点，可采用不完全乔列斯基分解.

所谓矩阵 **A** 的不完全乔列斯基分解，是指让分解 $\mathbf{LL}^T$ 成为与 **A** 很“接近”的对称正定矩阵，同时使 **L** 保持 **A** 原有的稀疏性；即

$$\mathbf{A}=\mathbf{LL}^T+\mathbf{E} \tag{D-81}$$

式中 **E** 是误差矩阵. 如何得到式(D-81)，将在下面(三)中说明. 上式表明，

$$\mathbf{A}\approx\mathbf{LL}^T \tag{D-82}$$

故 $(\mathbf{LL}^T)^{-1}$ 是 **A** 的近似逆，$(\mathbf{LL}^T)^{-1}=(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{L}^{-1}$.

把对称正定线性方程组

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \tag{D-83}$$

两边左乘 $\mathbf{L}^{-1}$，并注意到 $\mathbf{x}=(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{x}$，则上式可变换成

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}(\mathbf{L}^T\mathbf{x})=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} \tag{D-84}$$

若记

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1},\qquad \mathbf{y}=\mathbf{L}^T\mathbf{x},\qquad \mathbf{d}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} \tag{D-85}$$

式(D-84)就成为

$$\mathbf{By}=\mathbf{d} \tag{D-86}$$

下面验证 **B** 是对称正定矩阵. 显然 $\mathbf{B}^T=\mathbf{B}$. 若设 **A** 有完全分解式(D-79)，则

$$\begin{aligned}(\mathbf{Bx},\mathbf{x})&=(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2^T(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{x},(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{x})\\&=(\mathbf{L}_1^T(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{x},\mathbf{L}_1^T(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{x})\geqslant 0\end{aligned}$$

由 $\mathbf{L}_1^T(\mathbf{L}^T)^{-1}$ 非奇异，可知上式中的等号成立当且仅当 $\mathbf{x}=0$ 时，故 **B** 为对称正定阵. 再利用式(D-85)和(D-82)进行粗略估计，可知

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}\approx\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{LL}^T)(\mathbf{L}^T)^{-1}\approx\mathbf{I} \tag{D-87}$$

故 **B** 是非常近似于单位矩阵的对称正定阵.

将方程组 $\mathbf{By}=\mathbf{d}$ 用共轭梯度法求解，可得如下计算公式：

(1) 任取初始向量 $\mathbf{y}_0$，计算余向量 $\hat{\mathbf{r}}_0$，

$$\hat{\mathbf{r}}_0=\mathbf{d}-\mathbf{By}_0 \tag{D-88}$$

取 $\hat{\mathbf{p}}_0=\hat{\mathbf{r}}_0$.

(2) 对 $k=0,1,2,\cdots$，计算

$$\left.\begin{aligned}\alpha_k&=\frac{(\hat{r}_k,\hat{r}_k)}{(\hat{\mathbf{p}}_k,(\mathbf{L}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}\hat{\mathbf{p}}_k)}\\\mathbf{y}_{k+1}&=\mathbf{y}_k+\alpha_k\hat{\mathbf{p}}_k\\\hat{\mathbf{r}}_{k+1}&=\hat{\mathbf{r}}_k-\alpha_k\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}\hat{\mathbf{p}}_k\\\beta_k&=\frac{(\hat{\mathbf{r}}_{k+1},\hat{\mathbf{r}}_{k+1})}{(\hat{\mathbf{r}}_k,\hat{\mathbf{r}}_k)}\\\hat{\mathbf{p}}_{k+1}&=\hat{\mathbf{r}}_{k+1}+\beta_k\hat{\mathbf{p}}_k\end{aligned}\right\} \tag{D-89}$$

上面是 y 的解算. 下面通过推导，进一步把上面的计算改为相应于 x 的直接解算. 通过式(D-85)可得

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \mathbf{d} - \mathbf{B}\mathbf{y}_k = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k) = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r}_k \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{D-90}$$

$$(\hat{\mathbf{r}}_k, \hat{\mathbf{r}}_k) = (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{r}_k, \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r}_k) = (\mathbf{r}_k, (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_k) \tag{D-91}$$

记 $\hat{\mathbf{p}}_k = (\mathbf{L}^T)^{-1}\hat{\mathbf{p}}_k$，则

$$(\hat{\mathbf{p}}_k, \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k) \tag{D-92}$$

$$\mathbf{p}_0 = (\mathbf{L}^T)^{-1}\hat{\mathbf{p}}_0 = (\mathbf{L}^T)^{-1}\hat{\mathbf{r}}_0 = (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_0 \tag{D-93}$$

将 $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \alpha_k\hat{\mathbf{p}}_k$ 两边左乘 $(\mathbf{L}^T)^{-1}$，可得

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{p}_k \tag{D-94}$$

将 $\hat{\mathbf{r}}_{k+1} = \hat{\mathbf{r}}_k - \alpha_k\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}\hat{\mathbf{p}}_k$ 两边左乘矩阵 L，可得

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k \tag{D-95}$$

将 $\hat{\mathbf{p}}_{k+1} = \hat{\mathbf{r}}_{k+1} + \beta_k\hat{\mathbf{p}}_k$ 两边左乘 $(\mathbf{L}^T)^{-1}$，可得

$$\mathbf{p}_{k+1} = (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\mathbf{p}_k \tag{D-96}$$

把式(D-90)—(D-96)代入式(D-89)，便可得到用 ICCG 法求解方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的计算公式：

(1) 设 A 的不完全乔列斯基分解为 $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$. 任取初始向量 $\mathbf{x}_0$，计算 $\mathbf{r}_0$，

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \tag{D-97}$$

取 $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_0$.

(2) 对 $k = 0, 1, 2, \cdots$，计算

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{(\mathbf{r}_k, (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)} \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{p}_k \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k \\ \beta_k &= \frac{(\mathbf{r}_{k+1}, (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{r}_k, (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_k)} \\ \mathbf{p}_{k+1} &= (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\mathbf{p}_k \end{aligned}\right\} \tag{D-98}$$

定理 D-6 用 ICCG 法求解对称正定线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 中，若记 $\mathbf{H} = (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}$，则 $\{\mathbf{p}_k\}$ 是 A-正交向量系；$\{\mathbf{r}_k\}$ 是 H-正交向量系.

证明 用 ICCG 法解 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$，相当于用 CG 法求解 $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{d}$，其中 $\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}$ 是对称正定阵，$\mathbf{y} = \mathbf{L}^T\mathbf{x}$，$\mathbf{d} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$；利用式 (D-90) $\mathbf{p}_k = (\mathbf{L}^T)^{-1}\hat{\mathbf{p}}_k$ 和关于 CG 法的对应结论——定理 D-3，即可证出.

类似地，若采用不完全乔列斯基分解的改进形式，则只要把 $\mathbf{p}_0$ 和式 (D-98) 中的 $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ 换成 $\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$，即可得到相应的 ICCG 法计算公式.

最后应当指出，初始向量 $\mathbf{x}_0$ 虽然是任选的，由于 $(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}$ 是 A 的近似逆，故如将 $\mathbf{x}_0$ 取为 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{b}$，则效果会更好.

(三) 矩阵 A 的不完全乔列斯基分解

设 A 为大型稀疏对称正定矩阵，$\mathbf{A} = [a_{ij}]$. 为使 A 在不完全乔列斯基分解后，矩阵 L 仍保持 A 阵的稀疏性，对 L 中与 A 的零元素位置相对应的元素，不进行计算而强制它

等于零；L 中与 A 的非零元素相对应的元素，则完全按照完全分解的计算公式算出. 这样，由于运算中不出现新的非零元素，故 L 将保持 A 原有的稀疏性，使存储量显著减少；另一方面又减少了许多计算量. 由不完全分解所得到的 $\mathbf{LL}^T$ 与 A 很接近，但不相等，$\mathbf{A}-\mathbf{LL}^T$ 就构成了误差矩阵 E.

不完全乔列斯基分解的具体作法是，引入一个零元素的下标集合 P，

$$P=\{(i,j)\,|\,a_{ij}=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n\} \tag{D-99}$$

(1) 当 $(i,j)\in P$ 时，令 L 中的元素 $l_{ij}=0$；

(2) 当 $(i,j)\notin P$ 时，按完全分解的公式来计算. 若采用 $\mathbf{LL}^T$ 形式，有

$$\left.\begin{aligned} l_{ii}&=\left(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ l_{ij}&=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}\right)/l_{jj}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&i=1,2,\cdots,n\\&j=1,2,\cdots,i-1\end{aligned} \tag{D-100}$$

若采用 $\mathbf{LDL}^T$ 形式，则有

$$\left.\begin{aligned} d_i&=a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}d_kl_{ik}^2\\ l_{ij}&=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}d_kl_{ik}l_{jk}\right)/d_j\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&i=1,2,\cdots,n\\&j=1,2,\cdots,i-1\end{aligned} \tag{D-101}$$

需要注意的是，完全分解 $\mathbf{A}=\mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^T$ 中，$\mathbf{L}_1$ 的主对角线元素 $l_{ii}>0$ 总成立；而在非完全分解 $\mathbf{A}\approx\mathbf{LL}^T$ 中，不能保证 $l_{ii}>0$ 总成立. 当出现 $l_{ii}\leqslant 0$ 时，可以简单地把 l_{ii} 换成某个正数并继续计算；这样做仅仅影响到误差矩阵 E 的某个主对角线元素，使其成为非零. 事实上只要 L 的多数主对角线元素不发生这种情况，则不完全分解仍可得到对 A 的很好的近似(参见本附录文献[1]).

D-5 不完全乔列斯基分解复双共轭梯度法

本节进一步研究具有非奇异复对称系数矩阵 A 的复线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解法.

虽然共轭梯度法可以直接推广到复的情形，且计算公式的形式与实的公式一样，只是公式中的内积是指复内积；但是复共轭梯度法要求方程组的系数矩阵至少是 Hermite 阵，因此它对工程问题不切实用. 对于系数矩阵 A 是复对称阵的线性方程组，可以先用不完全乔列斯基分解进行预条件处理，再用复双共轭梯度法来求解，这就是不完全乔列斯基分解复双共轭梯度法 (IC-CBCG 法). 下面分成三步来说明.

(一) 复内积和有关定理

先引入复内积的概念. 在 $\mathbf{C}^n$ 上定义一个 x 和 y 的二元复函数，记为 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$，如果它满足下述三条性质，则称 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个复内积：

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ \text{正交性}\quad(\mathbf{x},\mathbf{x})\geqslant 0,\ \text{等号当且仅当}\ \mathbf{x}=0\ \text{时成立.}\\&(2)\ \text{共轭对称性}\quad(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})^*\\&(3)\ \text{对第二变元线性}\quad(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}_1+\beta\mathbf{y}_2)=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)+\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}_2)\end{aligned}\right\} \tag{D-102}$$

式中上标 * 表示取共轭. 由于共轭对称性，故复内积对第一变元具有共轭线性性质；即

$$(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2,\mathbf{y})=\alpha^*(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})+\beta^*(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) \tag{D-103}$$

在 $\mathbf{C}^n$ 上，如果定义

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})\triangleq\mathbf{x}^H\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_i^*y_i \tag{D-104}$$

其中上标 H 表示转置且取共轭，即 $\mathbf{x}^H=(\mathbf{x}^T)^*$；不难验证，按上式定义的 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 满足复内积的三条性质，我们称它为 $\mathbf{C}^n$ 上的通常复内积. 如不加声明，$(\mathbf{x},\mathbf{y})$就是指通常内积. 若 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 满足$(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$，称为 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 正交.

对任一 n 阶复方阵 $\mathbf{A}$，不难验证，按通常复内积的性质有

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{A}^H\mathbf{y}) \tag{D-105}$$

若 $\mathbf{A}$ 为 Hermite 矩阵，$\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，上式就成为

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{Ay}) \tag{D-106}$$

另外，对任何 $\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$，$(\mathbf{Ax},\mathbf{x})$ 总为实数.

如果 $\mathbf{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵，并满足

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{x})\geqslant 0,\qquad \forall\,\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n \tag{D-107}$$

等号当且仅当 $\mathbf{x}=0$ 时成立，则称 $\mathbf{A}$ 为复正定矩阵.

定理 D-7 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非奇异 Hermite 矩阵，则向量 $\tilde{\mathbf{x}}$ 是复线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解的充要条件为，$\tilde{\mathbf{x}}$ 使下述二次函数 $F(\mathbf{x})$取稳定值；即

$$F(\mathbf{x})=(\mathbf{Ax},\mathbf{x})-(\mathbf{x},\mathbf{b})-(\mathbf{b},\mathbf{x})=\text{stationary} \tag{D-108}$$

或

$$F(\mathbf{x})=(\mathbf{Ax},\mathbf{x})-2\mathrm{Re}(\mathbf{b},\mathbf{x})=\text{stationary} \tag{D-109}$$

证明 参见本附录文献[5].

因为针对复正定线性方程组的复共轭梯度法，也是通过使 $\mathrm{grad}\,F(\mathbf{x})=0$ 来推导计算公式，故定理 D-7 表明，复共轭梯度法的计算公式可直接用于系数矩阵 $\mathbf{A}$ 为非奇异 Hermite 阵的情况.

（二）复双共轭梯度法

下面来研究具有任意非奇异复系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的 n 阶复线性方程组

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \tag{D-110}$$

的求解，其中 $\mathbf{x}$，$\mathbf{b}\in\mathbf{C}^n$. 把上式配上另一辅助方程组

$$\mathbf{A}^H\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{b}} \tag{D-111}$$

其中 $\hat{b}$是某指定向量；把式(D-110)和(D-111)合起来写成一个 $2n$ 阶方程组，

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{A}^H\\ \mathbf{A} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{b}}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix} \tag{D-112}$$

显然，上式的系数矩阵是 Hermite 阵. 以定理 D-7 为基础，使用与推导复共轭梯度法计算公式同样的办法，可得求解式(D-112)的复双共轭梯度法(CBCG 法)的计算公式：

(1) 任取 $\mathbf{x}_0$，计算 $\mathbf{r}_0$，

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{r}_0=\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_0, & \text{取 } \hat{\mathbf{r}}_0=\mathbf{r}_0^*, \\ \text{取 } \mathbf{p}_0=\mathbf{r}_0, & \text{取 } \hat{\mathbf{p}}=\hat{\mathbf{r}}_0. \end{array}\right\} \tag{D-113}$$

(2) 对 $k=0, 1, 2, \cdots$，作如下计算

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_k=\dfrac{(\hat{\mathbf{r}}_k,\mathbf{r}_k)}{(\hat{\mathbf{p}}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_k)} & \\ \mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k+\alpha_k\mathbf{p}_k & \\ \mathbf{r}_{k+1}=\mathbf{r}_k-\alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k, & \hat{\mathbf{r}}_{k+1}=\hat{\mathbf{r}}_k-\alpha_k^*\mathbf{A}^H\hat{\mathbf{p}}_k \\ \beta_k=\dfrac{(\hat{\mathbf{r}}_{k+1},\mathbf{r}_{k+1})}{(\hat{\mathbf{r}}_k,\mathbf{r}_k)} & \\ \mathbf{p}_{k+1}=\mathbf{r}_{k+1}+\beta_k\mathbf{p}_k, & \hat{\mathbf{p}}_{k+1}=\hat{\mathbf{r}}_{k+1}+\beta_k^*\hat{\mathbf{p}}_k \end{array}\right\} \tag{D-114}$$

定理 D-8 复双共轭梯度法中的$\{\mathbf{r}_k\}$与$\{\hat{\mathbf{r}}_k\}$满足双正交性

$$(\hat{\mathbf{r}}_k,\mathbf{r}_l)=(\mathbf{r}_k,\hat{\mathbf{r}}_l)=0, \qquad k\neq l \tag{D-115}$$

$\{\mathbf{p}_k\}$与$\{\hat{\mathbf{p}}_k\}$满足双共轭性

$$(\hat{\mathbf{p}}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_l)=(\mathbf{p}_k,\mathbf{A}^H\hat{\mathbf{p}}_l)=0, \qquad k\neq l \tag{D-116}$$

定理 D-9 若求解 n 阶非奇异复线性方程组的复双共轭梯度法可正常进行迭代，则至多于第 n 次迭代收敛.

定理 D-8 和 D-9 的证明，以及 CBCG 法计算公式的推导，参见本附录文献[5].

注意，CBCG 法从理论上看，不排除对某个 $k<n$，发生$(\hat{\mathbf{p}}_k,\mathbf{A}\mathbf{p}_k)=0$,从而使 α_k，β_k 的分母为 0；或对某个 k，发生$(\hat{\mathbf{r}}_k,\mathbf{r}_k)=0$,致使 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k$ 的情形. 发生上述情况时，计算将中断；此时可把现有的近似解作为 $\mathbf{x}_0$，重新开始计算.

(三) 不完全乔列斯基分解复双共轭梯度法

对于大型、稀疏的非奇异复对称线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{D-117}$$

其中 A 为复对称矩阵,$\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$,可以用不完全乔列斯基分解复双共轭梯度法（IC-CBCG 法）来求解. 先对矩阵 A 进行不完全乔列斯基分解，

$$\mathbf{A}\approx\mathbf{L}\mathbf{L}^T, \qquad \mathbf{A}^*\approx\mathbf{L}^*\mathbf{L}^H \tag{D-118}$$

其中 L 为复下三角阵；则 $(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}$是 A 的近似逆

$$(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}=(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{L}^{-1} \tag{D-119}$$

将式(D-117)变换为

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}(\mathbf{L}^T\mathbf{x})=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} \tag{D-120}$$

得

$$\mathbf{B}\mathbf{y}=\mathbf{d} \tag{D-121}$$

其中

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}, \qquad \mathbf{y}=\mathbf{L}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{d}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} \tag{D-122}$$

显然，$\mathbf{B}^T=\mathbf{B}$，故$\mathbf{B}^H=\mathbf{B}^*$. 而

$$\mathbf{B}^*=(\mathbf{L}^*)^{-1}\mathbf{A}^*(\mathbf{L}^H)^{-1} \tag{D-123}$$

再将

$$\mathbf{A}^*\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^* \tag{D-124}$$

进行预条件处理，使其变换为

$$\mathbf{B}^*\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{d}^* \tag{D-125}$$

其中

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{L}^H\mathbf{x}^* \tag{D-126}$$

把式(D-121)和(D-125)合起来写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^* \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \tag{D-127}$$

并用 CBCG 法解算上式：任取 $\mathbf{y}_0$，计算 $\mathbf{R}_0=\mathbf{d}-\mathbf{B}\mathbf{y}_0$，取 $\mathbf{P}_0=\mathbf{R}_0$，$\hat{\mathbf{R}}_0=\mathbf{R}_0^*$，$\hat{\mathbf{P}}_0=\hat{\mathbf{R}}_0$；对 $k=0$，1，2，…，计算

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_k = \frac{(\hat{\mathbf{R}}_k,\mathbf{R}_k)}{(\hat{\mathbf{P}}_k,\mathbf{B}\mathbf{P}_k)} \\ &\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \alpha_k\mathbf{P}_k \\ &\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k + \alpha_k\mathbf{B}\mathbf{P}_k, \qquad \hat{\mathbf{R}}_{k+1} = \hat{\mathbf{R}}_k - \alpha_k^*\mathbf{B}^*\hat{\mathbf{P}}_k \\ &\beta_k = \frac{(\hat{\mathbf{R}}_{k+1},\mathbf{R}_{k+1})}{(\hat{\mathbf{R}}_k,\mathbf{R}_k)} \\ &\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{R}_{k+1} + \beta_k\mathbf{P}_k, \qquad \hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \hat{\mathbf{R}}_{k+1} + \beta_k\mathbf{P}_k \end{aligned}\right\} \tag{D-128}$$

即可解出向量 $\mathbf{y}$.

最后导出 $\mathbf{x}$ 的计算公式. 若记

$$\mathbf{p}_k = (\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{P}_k, \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{D-129}$$

并利用式(D-122)，可得

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{p}_k \\ &\mathbf{R}_k = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r}_k \\ &\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k \end{aligned}\right\} \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{D-130}$$

类似地，可得

$$\hat{\mathbf{R}}_k = (\mathbf{L}^*)^{-1}\mathbf{r}_k^* \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{D-131}$$

利用式(D-126)和(D-128)，并与式(D-130)中的第一式取共轭后对比，可得

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \mathbf{L}^H\mathbf{p}_k^* \tag{D-132}$$

于是

$$(\hat{\mathbf{R}}_k,\mathbf{R}_k) = (\mathbf{r}_k^*,(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_k) \tag{D-133}$$

$$(\hat{\mathbf{p}}_k,\mathbf{B}\mathbf{P}_k) = (\mathbf{p}_k^*,\mathbf{A}\mathbf{p}_k) \tag{D-134}$$

由上述各式及式(D-122)和(D-126)，便可得到对于 $\mathbf{x}$ 的 IC-CBCG 法的计算公式：

(1) 任取 $\mathbf{x}_0$，计算 $\mathbf{r}_0$，

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \tag{D-135}$$

取 $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{r}_0$.

(2) 对 $k=0, 1, 2, \cdots$ 作如下计算，

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{(\mathbf{r}_k^*, (\mathbf{LL}^T)^{-1}\mathbf{r}_k)}{(\mathbf{p}_k^*, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)} \\
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \\
\mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k \\
\beta_k &= \frac{(\mathbf{r}_{k+1}^*, (\mathbf{LL}^T)^{-1}\mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{r}_k^*, (\mathbf{LL}^T)^{-1}\mathbf{r}_k)} \\
\mathbf{p}_{k+1} &= (\mathbf{LL}^T)^{-1}\mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(D-136)}$$

若不完全乔列斯基分解采用 $\mathbf{LDL}^T$ 形式，只需将式(D-136)和 $\mathbf{p}_0$ 中的 $(\mathbf{LL}^T)^{-1}$ 换为 $(\mathbf{LDL}^T)^{-1}$.

这里有两点需要说明：(1) 由于 **A** 和 **B** 均为复对称，所以公式得以简化，无需计算辅助量 $\hat{\mathbf{r}}_i$, $\hat{\mathbf{p}}_i$ 等；这是由于，所添加的辅助方程实际上就是原方程. (2) 式(D-136)形式上虽然与实 ICCG 法的格式相似，但式中的内积是复内积，此外它是从复双共轭梯度法导出，而不是对实 ICCG 公式的机械套搬.

参 考 文 献

[1] D. S. Kershaw. The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for Iterative Solution of System of Linear Equations, Journal of Computational Physics, vol. 26, 1978.

[2] D. A. H. Jacobs, Generalizations of the Conjugate Gradient Method for Solving Nonsymmetric and Complex Systems of Algebraic Equations. CERL Report, RD/L/N 70/80, August, 1980.

[3] D. A. H. Jacobs, A Generalization of the Conjugate Gradient Method to Solve Complex Systems, IMA Journal of Numerical Analysis, 1986, No. 6.

[4] 朱建国、唐宝乾，PCBCG 算法及其在三维涡流问题有限元分析中的应用，电工技术学报，1989，No. 2.

[5] 吴海容，复双共轭梯度法的结构，哈尔滨电工学院学报，1996，No. 2.